MODIFIKASI METODE RUNGE KUTTA ORDE EMPAT (KUTTA) BERDASARKAN RATA-RATA KONTRA HARMONIK

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Jurusan Matematika

Oleh:

SUPINAH
10654004499

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2011

MODIFIKASI METODE RUNGE KUTTA ORDE EMPAT (KUTTA) BERDASARKAN RATA-RATA KONTRAHARMONIK

SUPINAH

NIM: 10654004499

Tanggal Sidang: 01 Februari 2011

Periode Wisuda: Februari 2011

Jurusan Matematika

Fakultas Sains dan Teknologi

Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau

Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas Akhir ini membahas modifikasi Metode RK-4 Kutta berdasarkan Rata-rata Kontra Harmonik. Metode RK-4 Kutta adalah salah satu metode iterasi yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa. Berdasarkan hasil kajian, diperoleh bahwa metode modifikasi RK-4 Kutta mempunyai bentuk persamaan sebagai berikut :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 + k_2} + 2\frac{k_2^2 + k_3^2}{k_2 + k_3} + \frac{k_3^2 + k_4^2}{k_3 + k_4}\right)$$

dengan galat orde 5 ($O(h^5)$). Hasil simulasi numerik menunjukkan modifikasi RK-4 Kutta lebih baik dibandingkan dengan RK-4 Kutta.

Kata kunci *:Galat, Rata-rata Kontra Harmonik, RK-4 Kutta*

MODIFICATION OF FOURTH RUNGE-KUTTA (KUTTA) METHOD BASED ON CONTRAHARMONIC MEAN

SUPINAH

NIM: 10654004499

Date of Final Exam: February 01, 2011

Graduation Cremony Priod: February, 2011

Mathematic Departement

Faculty of Sciences and Technology

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

This thesis discusses modification of RK-4 Kutta method based on Contraharmonic mean. The RK-4 Kutta is one of iterative method that usually used to solve the ordinary differential equations. Based on the result of studies, obtained that modified RK-4 Kutta has a form as follow :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 + k_2} + 2\frac{k_2^2 + k_3^2}{k_2 + k_3} + \frac{k_3^2 + k_4^2}{k_3 + k_4}\right)$$

has an orde of error $O(h^5)$. The numerical solutions show that modified RK-4 Kutta based on the contraharmonic mean has an error better than RK-4 Kutta.

***Keyword**: Contraharmonic mean, Error, RK-4 Kutta,*

DAFTAR ISI

Halaman

LEMBAR PERSETUJUAN ii

LEMBAR PENGESAHAN iii

LEMBAR PERSEMBAHAN iv

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL v

LEMBAR PERNYATAAN vi

ABSTRAK vii

ABSTRACT viii

KATA PENGANTAR ix

DAFTAR ISI xi

DAFTAR LAMBANG xiii

DAFTAR GAMBAR xiv

DAFTAR LAMPIRAN xv

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang I-1

1.2 Rumusan Masalah I-3

1.3 Batasan Masalah I-3

1.4 Tujuan I-3

1.5 Sistematika Penulisan I-4

BAB II LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan Diferensial Biasa Orde 1 .... II-1

2.2 Metode Deret Taylor II-4

2.3 Metode Runge-Kutta.. II-9

2.3.1 Metode Runge-Kutta orde Satu............................... II-10

2.3.2 Metode Runge-Kutta orde Dua............................... II-11

2.3.3 Metode Runge-Kutta orde Tiga II-14

2.3.4 Metode Runge-Kutta orde Empat II-15

2.4 Galat Pemotongan II-20

2.5 Rata-rata Kontra Harmonik II-23

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

BAB IV PEMBAHASAN

4.1 Modifikasi Metode RK-4 Kontra Harmonik IV-1

4.2 Galat Metode RK-4 Kontra Harmonik IV-7

4.3 Simulasi Numerik IV-7

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan V-1

5.2 Saran V-1

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Persoalan yang melibatkan model matematika banyak muncul dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan seperti dalam bidang Fisika, Kimia, Ekonomi, atau pada persoalan rekayasa yang diberikan dalam bentuk persamaan differensial orde satu atau orde dua. Seringkali model matematika tersebut muncul dalam bentuk yang tidak ideal atau rumit. Model matematika yang rumit ini kadangkala tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik yang sudah baku untuk mendapatkan solusi sejatinya (*exact solution*). Bila metode analitik tidak dapat lagi diterapkan, maka solusi persoalan sebenarnya masih dapat dicari dengan menggunakan perhitungan numerik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmetika biasa.

Beberapa perhitungan numerik satu langkah yang sering digunakan untuk menyelesaikan PDB seperti Euler, Heun, Taylor, dan Runge-Kutta adalah beberapa contoh metode yang tergolong dalam metode numerik. Metode Runge-Kutta dikenal sebagai metode yang memiliki keakurasian lebih baik dibandingkan dengan ketiga metode tersebut.

Metode Runge-Kutta merupakan alternatif lain dari metode Taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang tinggi dan sekaligus menghindarkan keperluan mencari turunan yang lebih tinggi dengan jalan mengevaluasi fungsi $f(x,y)$ pada titik terpilih setiap selang.

Secara umum bentuk Metode Runge-Kutta ditulis sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n \tag{1.1}$$

sedangkan Metode Runge-Kutta orde empat adalah :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{1.2}$$

Beberapa modifikasi telah dilakukan pada metode Runge-Kutta orde empat. Berdasarkan bentuk umumnya, metode Runge-Kutta orde empat dapat dimodifikasi berdasarkan rata-rata Aritmatik seperti berikut ini:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3}\left(\frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_2 + k_3}{2} + \frac{k_3 + k_4}{2}\right) \qquad (1.3)$$

Selain menggunakan rata-rata Aritmatik, modifikasi metode Runge-Kutta Orde 4 berdasarkan rata-rata Geometri telah dilakukan oleh Evans (1991), dan diperoleh:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3}\left(\sqrt{k_1 k_2} + \sqrt{k_2 k_3} + \sqrt{k_3 k_4}\right) \qquad (1.4)$$

dengan $k_1 = f(x_i, y_i)$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{16}(-k_1 + 9k_2))$$

$$k_4 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{24}(-3k_1 + 5k_2 + 22k_3))$$

Selanjutnya, Sanugi dan Evans (1994) melakukan modifikasi Runge-Kutta orde empat berdasarkan rata-rata Harmonik,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{2h}{3}\left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} + \frac{k_3 k_4}{k_3 + k_4}\right) \qquad (1.5)$$

dengan $k_1 = f(x_i, y_i)$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{8}(-k_1 + 5k_2))$$

$$k_4 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{8}(-5k_1 + 7k_2 + 18k_3))$$

Ababneh dan Rozita (2009) memperkenalkan modifikasi metode Runge-Kutta orde tiga berdasarkan rata-rata Kontra Harmonik untuk permasalahan persamaan diferrensial, yang diberikan oleh:

$$y_{i+1} = y_i + h\left[\frac{1}{4}\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 + k_2} + \frac{3}{4}\frac{k_2^2 + k_3^2}{k_2 + k_3}\right] \tag{1.6}$$

dengan $k_1 = f(x_i, y_i)$

$$k_2 = f(x_i + h\frac{2}{3}, y_n + h\frac{2}{3}k_1)$$

$$k_3 = f(x_i + h\frac{4}{21}\left(3 + \sqrt{2}\right), y_i + h\frac{4}{21}\left(3 + \sqrt{2}\right)k_2)$$

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan untuk memodifikasi Metode Runge-Kutta tersebut, penulis tertarik untuk mengembangkan modifikasi yang dilakukan Ababneh dan Rozita (2009) dengan mengaplikasikan rata-rata Kontra Harmonik terhadap metode Runge-Kutta orde 4 Kutta. Oleh karena itu, rumusan pada tugas akhir ini adalah bagaimana merumuskan ”Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde empat Kutta berdasarkan rata-rata Konta Harmonik”.

1.2. Rumusan Masalah

Perumusan masalah pada tugas akhir ini adalah bagaimana menentukan rumusan dari modifikasi metode Runge-Kutta Orde empat Kutta berdasarkan rata-rata Kontra Harmonik.

1.3. Batasan Masalah

Penulis membatasi permasalahan pada penulisan tugas akhir ini yaitu pada hasil Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde empat Kutta dan rata-rata Kontra Harmonik.

1.4. Tujuan

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan rumusan baru dari modifikasi metode Runge-Kutta Orde empat Kutta berdasarkan rata-rata Kontra Harmonik.

1.5. Sistematika Penulisan

BAB I **Pendahuluan**

Pendahuluan menguraikan latar belakang pemilihan judul, tujuan, rumusan masalah, batasan masalah, serta sitematika penulisan tugas akhir.

BAB II **Landasan Teori**

Landasan teori berisikan tentang hal-hal yang dijadikan sebagai dasar teori untuk pengembangan tulisan tugas akhir.

BAB III **Metodologi Penelitian**

Bab ini berisi tentang metode-metode yang dilakukan untuk memperoleh data dan hasil yang dibutuhkan dalam penulisan tugas akhir ini.

BAB IV **Pembahasan**

Bab pembahasan berisi langkah-langkah dan hasil dari pembuktikan persamaan Runge-Kutta Orde empat Kutta berdasarkan rata-rata Kontra Harmonik.

BAB V **Penutup**

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1. Persamaan Differensial Biasa Orde 1

Pada landasan teori ini akan dibahas sedikit tentang persamaan diferensial biasa orde satu. Ini dikarenakan hasil modifikasi dari metode RK-4 Kutta digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde 1 ini.

Definisi : (Richard Bronson & Gabriel Costa ; *Persamaan Diferensial Edisi Tiga*, terjemahan). Suatu persamaan Diferensial adalah suatu persamaan yang dicari dan turunannya. Suatu persamaan diferensial dikatakan suatu persamaan diferensial biasa jika fungsi yang tidak diketahui terdiri dari satu variabel independen.

Ekspresi matematis $y', y'', y''', y^{(4)}, \ldots, y^{(n)}$ sering digunakan untuk menuliskan masing-masing turunan pertama, kedua, ketiga, keempat,…, ke-*n* dari fungsi *y* terhadap variabel independen. Sedangkan pangkat pada masing-masing turunan tersebut dikenal dengan Orde. Jika y' maka persamaan tersebut dikatakan sebagai persamaan diferensial orde satu, dan jika y'' maka disebut sebagai persamaan Diferensial orde dua. Begitu seterusnya sampai orde-*n*. Penulisan skripsi ini, penulis hanya akan membahas persamaan Diferensial biasa Orde satu.

Pada metode numerik, persamaan diferensial sering menggunakan nilai awal untuk mendapatkan solusi dari persamaan fungsi yang ditanya. Nilai awal ini adalah kondisi tambahan terhadap fungsi yang dicari dan turunannya terhadap variabel independen.

Bentuk standar dari persamaan diferensial biasa orde satu dengan nilai awal ditulis sebagai:

$$y' = f(x, y) \tag{2.1}$$

dengan nilai awal $y(x_0) = y_0$ dan $y' = {}^{dy}/_{dx}$.

Terdapat dua cara untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde satu, yaitu :

1. Metode Analitik

   Metode Analitik adalah metode sejati karena ia memberi kita solusi sejati (*Exact Solution*) atau solusi sesungguhnya yang memiliki galat sama dengan nol. Beberapa persamaan diferensial orde satu yang dapat diselesaikan secara analitik adalah :

a. Persamaan Diferensial orde satu yang dapat dipisahkan.

   Perhatikan suatu persamaan diferensial berikut :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (2.2)$$

Jika $M(x, y) = A(x)$ adalah fungsi dari x saja dan $N(x, y) = B(x)$ adalah fungsi dari y saja, maka persamaan (2.2) memiliki variabel-variabel terp dapat dipisah dan persamaan tersebut dapat dipisahkan.

Contoh 2.1 : $y' = y$.

Tentukan solusinya dengan menggunakan variabel terpisah!

Penyelesaian : $y' = y$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = dx$$

$$\ln y = x + c$$

$$y = ce^x$$

maka solusi dari $y' = y$ adalah $y = ce^x$.

b. Persamaan Diferensial orde satu eksak.

   Perhatikan kembali bentuk persamaan (2.2). jika terdapat suatu fungsi $g(x, y)$ sehingga :

$$dg(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy \tag{2.3}$$

Maka persamaan (2.3) dikenal sebagai persamaan diferensial eksak. Sedangkan persamaan (2.2) dikatakan eksak hanya jika ${}^{dM(x,y)}/_{dy} = {}^{dN(x,y)}/_{dx}$.

c. Persamaan diferensial orde satu Linier.

Persamaan diferensial orde satu linear memiliki bentuk :

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{2.4}$$

dengan faktor integrasinya adalah :

$$I(x) = e^{\int p(x)dx} \tag{2.5}$$

Persamaan (2.4) hanya bergantung pada x dan independen terhadap y. Jika persamaan (2.5) dikalikan ke persamaan (2.4) maka :

$$I(x)y' + p(x)I(x)y = q(x)I(x) \tag{2.6}$$

Persamaan (2.6) adalah bentuk persamaan diferensial eksak dan dapat diselesaikan dengan cara yang sama untuk menyelesaikan persamaan diferensial eksak.

Contoh 2.2 : Carilah faktor integrasi untuk $y' - 3y = 6$.

penyelesaian : persamaan ini memiliki bentuk $p(x) = -3$ dan $g(x) = 6$ dan berbentuk linear maka ;

$$\int p(x)dx = \int -3\, dx = -3x$$

sehingga faktor integrasinya adalah :

$$I(x) = e^{\int p(x)dx}$$

$$= e^{-3x}$$

2. Metode Numerik

Metode Numerik digunakan untuk persoalan rumit yang sering muncul dan sulit, atau tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik. Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmatik biasa. Dengan metode numerik, hanya akan diperoleh solusi hampiran saja dan terdapat perbedaan dengan hasil solusi sejati. Sehingga akan ada selisih antara keduanya yang disebut dengan *error* atau galat.

Beberapa metode numerik untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu adalah :

a. Metode Euler
b. Metode Heun
c. Metode Deret Taylor
d. Metode Runge-Kutta

Pada penulisan Tugas Akhir ini penulis menggunakan Metode Deret Taylor dan Runge-Kutta untuk dimodifikasi sehingga menghasilkan rumusan baru yang mengandung unsur rata-rata kontra harmonik dan dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde satu.

2.2 Metode Deret Taylor

Deret Taylor adalah deret yang berbentuk polinomial yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial.

Teorema 2.1:(Rinaldi Munir; *Metode Numerik*, revisi kedua): Andaikan f dan semua turunannya, *f'*, *f"*, *f'"*, …, kontinu pada selang [a,b], maka untuk nilai-nilai x disekitar x_0 dan $x \in [a, b]$, $f(x)$ dapat diperluas (diekspansi) kedalam deret Taylor, maka :

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}\ f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n\,(x_0) \qquad (2.7)$$

Apabila $a = x_0$ atau $b = x$ maka persamaan (2.7) dapat dinyatakan sebagai:

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}\ f''(a) + \cdots +$$

$$\frac{(b-a)^n}{n!} f^n\,(a) \qquad (2.8)$$

Bukti : Teorema dasar kalkulus

Berdasarkan teorema dasar kalkulus diperoleh persamaan

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'^{(x)} dx \quad \text{atau} \quad f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)dx \qquad (2.9)$$

dan bentuk integral parsial

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$$

dengan menerapkan integral parsial pada suku kedua ruas kanan dari persamaan (2.9) maka dapat diasumsikan bahwa:

$$u = f'(x)\,, dv = dx, \quad du = f''(x)dx, v = x,$$

maka

$$\int_a^b f'(x)dx = f'(x)(x)|_a^b - \int_a^b (x)f''(x)\,dx$$

atau

$$\int_a^b f'(x)dx = f'(x)(b-a) - \int_a^b (x)f''(x)dx \qquad (2.10)$$

Substitusikan persamaan (2.9) kedalam persamaan (2.10), maka diperoleh:

$$f(b) = f(a) + f'(x)(b-a) - \int_a^b (x)f''(x)dx \qquad (2.11)$$

Terapkan kembali integral parsial pada persamaan $\int_a^b (x) f"(x) dx$ dengan memisalkan:

$$u = f"(x), dv = -(x)dx$$

$$du = f'''(x)dx, v = -\frac{(x)^2}{2}$$

kemudian didapatkan:

$$\int_a^b f"(x)xdx = f"(x)\frac{-(x)^2}{2}|_a^b - \int_a^b -\frac{(x)^2}{2} f'''(x)dx$$

$$\int_a^b xf"(x)dx = f"(x)\frac{-(b-a)^2}{2!} + \int_a^b \frac{(x)^2}{2} f'''(x)dx \qquad (2.12)$$

dengan memasukkan persamaan (2.12) ke persamaan (2.11) akan didapatkan:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f"(a)}{2!}(b-a)^2 + \int_a^b \frac{(x)^2}{2} f'''(x)dx \qquad (2.13)$$

apabila proses tersebut dilakukan secara terus-menerus sebanyak *n* kali, maka akan diperoleh suatu deret yang disebut **deret Taylor**.

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f"(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(b-a)^n + R_n(b) \qquad (2.14)$$

dimana

$$R_n(b) = \frac{1}{n!}\int_a^b f^{n+1}(x)(b-x)^n dx \qquad (2.15)$$

$R_n(b)$ merupakan bentuk sisa atau galat untuk $f(b)$.

dengan mengganti $a= x_0$, $b=x_0+h$, dan $R_n(b) = O(h^{n+1})$, untuk $k=0,1,2,\ldots,n$, maka teorema (2.1) dan bentuk sisanya dapat ditulis sebagai:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f"(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{n+1}(x_0)}{n!}h^{n+1} + \frac{f^{n+1}(x_0)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

atau

$$f(x_0+h) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^m(x_0)}{m!}h^m + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}h^{n+1} \tag{2.16}$$

maka,

$$f(x_0+h) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^m(x_0)}{m!}h^m + O(h^{n+1}) \tag{2.17}$$

dengan

$$O(h^{n+1}) = R_n(b) = \left({f^{n+1}(c)}\big/{(n+1)!} \right) h^{n+1}$$

Persamaan (2.16) menyiratkan bahwa untuk menghitung nilai hampiran $f(x_0+h)$, perlu dicari terlebih dahulu $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$, yang dapat dikerjakan dengan rumus:

$$f^{(k)}(x_i) = P^{(k-1)}f(x_i, y_i)$$

dengan P adalah operator turunan.

$$P = \left(\frac{\partial}{\partial x} + f\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

dimana

$$Pf = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}f = f_x + ff_y$$

$$P^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2f\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + f^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f = f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy}$$

$$P^3 f = (\frac{\partial^3}{\partial x^3} + f\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 2f\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 2f^2\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}$$

$$+f^2 \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} + f^3 \frac{\partial^3}{\partial y^3}) \times f$$

$$= f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f^2 f_{xyy} + f^3 f_{yyy}$$

Apabila turunan pada persamaan (2.16) dicari, maka akan diperoleh:

$$f'(x_0) = f(x_i, y_i) = f$$

$$f''(x_0) = f_x + f_y f$$

$$f^{(3)}(x_0) = f_{xx} + f_{xy}f + f_{yx}f + f_{yy}f^2 + f_y f_x + f_y^2 f$$

$$= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_x f_y + f_y^2 f$$

$$f^{(4)}(x_0) = f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f_x f_{xy} + 5ff_y f_{xy} + 3f^2 f_{xyy} + 3ff_y f_{yy}$$

$$+ 4f^2 f_x f_{yy} + f^3 f_{yyy} + f_{xx} f_y + f_y^2 (f_x + ff_y)$$

sehingga persamaan (2.16) dapat ditulis sebagai:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf + \frac{h^2}{2}\left(f_x + ff_y\right)$$

$$+\frac{h^3}{6}\left(f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy} + f_x f_y + ff_y^2\right)$$

$$+\frac{h^4}{24}(\left(f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f_3 f_{xy} + 5ff_y f_{xy} + 3f^2 f_{xyy} + 4f^2 f_y f_{yy}\right)$$

$$+f^3 f_{yyy} + f_{xx} f_y + f_y^2\left(f_x + ff_y\right)) + O(h^5) \qquad (2.18)$$

Dengan hanya mengambil turunan terhadap *y* pada persamaan (2.18), akan didapatkan:

$$y_{i+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2} ff_y + \frac{h^3}{6}\left(ff_y{}^2 + f^2 f_y\right)$$

$$+\frac{h^4}{24}\left(f^3 f_{yyy} + 4f^2 f_y f_{yy} + ff_y^3\right) \qquad (2.19)$$

2.3 Metode Runge-Kutta

Penyelesaian PDB dengan menggunakan deret Taylor tidak praktis karena metode ini membutuhkan perhitungan turunan $f(x,y)$. Selain itu, tidak semua fungsi mudah dihitung turunannya, terutama bagi fungsi yang bentuknya rumit. Semakin tinggi orde metode deret taylor, semakin tinggi turunan fungsi yang harus dihitung. Metode Runge-Kutta adalah alternatif lain dari metode deret taylor dan tidak membutuhkan perhitungan turunan. Metode ini berusaha mendapatkan derajat ketelitian yang lebih tinggi.

Metode Runge-Kutta mempunyai tiga sifat utama :

1. Metodenya satu langkah : untuk mencapai y_{m+1} hanya diperlukan keterangan yang tersedia pada titik sebelumnya yaitu x_m, y_m.
2. Mendekati ketelitian deret Taylor sampai suku dalam h^p, dimana nilai p berbeda untuk metode yang berbeda, dan p ini disebut derajat dari metode.
3. Tidak memerlukan perhitungan turunan $f(x, y)$ tetapi hanya memerlukan fungsi itu sendiri.

Bentuk umum metode Runge-Kutta orde n ialah :

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2 + \cdots + a_n k_n \quad (2.20)$$

dengan $k_1 = hf(x_i, y_i)$

$$k_2 = hf(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1)$$

$$k_3 = hf(x_i + p_3 h, y_i + q_{31} k_1 + q_{32} k_2)$$

...

$$k_n = hf(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 + q_{n-1,2} k_1 + \ldots + q_{n-1,n-1} k_{n-1})$$

Metode Runge-Kutta dengan n langkah dapat ditunjukkan kedalam sebuah tabel. Tabel ini dikenal sebagai Tabel Butcher, berikut adalah bentuk umum Metode Runge-Kutta digambarkan dalam sebuah Tabel Butcher.

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
p_2 & q_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
p_3 & q_{31} & q_{32} & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
p_n & q_{n1} & q_{n2} & q_{n3} & \dots & 0 \\
\hline
 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n
\end{array}
$$

Tabel Butcher ini berbentuk matrik segitiga bawah dimana $p_2, p_3, \dots, p_n$ merupakan nilai x_n yang bertambah dan $q_{21}, q_{31}, \dots, q_{n3}$ merupakan hasil kali faktor q_{ij} pada persamaan k_i yang dipengaruhi oleh y_n. Secara umum, tabel Butcher ini menunjukkan bahwa hasil aproksimasi sama dengan bentuk berikut ini :

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{i=1}^{n} a_i k_i$$

dengan $k_i = f(x_i + hp_i, y_i + h \sum_{j=1}^{n} q_{ij} k_j)$

2.3.1 Metode Runge-Kutta Orde satu

Metode Runge-Kutta Orde satu memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 \text{ dengan } k_1 = hf(x_i, y_i).$$

Metode Euler adalah salah satu contoh Metode Runge-Kutta Orde satu. Metode ini memiliki batas penggunaan karena mempunyai galat yang besar yang bertumpuk dalam setiap prosesnya. Akan tetapi metode ini penting untuk dipelajari karena analisis galatnya mudah untuk dipahami.

Asumsikan bahwa $y(x), y'(x)$, dan $y''(x)$ adalah kontinu dan gunakan teorema taylor untuk memperluas $y(x)$ disekitar $x = x_0$. Untuk setiap x, terdapat nilai c_1 antara x dan x_0 sehingga :

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + {y"(c_1)(x - x_0)^2}/{2} \quad (2.21)$$

Jika $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ dan $h = x - x_0$ disubstitusikan ke persamaan (2.21) maka akan menghasilkan sebuah ekspresi untuk (x_1) :

$$y(x_1) = y(x_0) + hf(x_0, y_0) + y"(c_1)\, {h^2}/{2} \quad (2.22)$$

Dengan mengabaikan bentuk orde ke-dua maka akan kita dapatkan bentuk aproksimasi Euler yang ditulis sebagai berikut :

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \quad (2.23)$$

Proses ini jika dilakukan secara berulang maka secara umum akan menghasilkan barisan titik yang menghampiri solusi kurva $y = y(x)$. Sehingga secara umum Metode Euler ditulis sebagai :

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (2.24)$$

Sedangkan galat atau *error* untuk Metode Euler ini adalah bentuk orde dua dari persamaan (2.22) yang dikenal dengan galat potongan.

2.3.2 Metode Runge-Kutta Orde Dua

Bentuk umum Metode Runge-Kutta Orde Dua adalah :

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2 \quad (2.25)$$

dengan $k_1 = h(f(x_i, y_i))$

$$k_2 = hf(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1)$$

Nilai a_1, a_2, p_2, dan q_{21} ditentukan sebagai berikut :

Misalkan $f = f(x_i, y_i)$

$$f_x = \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x}$$

$$f_y = \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y}$$

Uraikan k_2 kedalam deret taylor disekitar (x_i, y_i) sampai orde satu, sehingga :

$$k_2 = hf(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1)$$

$$= hf(x_i + p_2 h f_x + q_{21} k_1 f_y)$$

$$= hf(x_i + p_2 h f_x + q_{21} h f f_y)$$

$$= hf\left(x_i + h\left(p_2 f_x + q_{21} f f_y\right)\right)$$

Substitusikan k_2 ke persamaan (2.25) sehingga :

$$y_{i+1} = y_i + a_1 k_1 + a_2 k_2$$

$$= y_i + a_1 hf + a_2(h(f + h(p_2 f_x + q_{21} f f_y))$$

$$= y_i + a_1 hf + a_2 hf + a_2 h^2 (p_2 f_x + q_{21} f f_y)$$

$$= y_i + (a_1 + a_2)hf + a_2 h^2 (p_2 f_x + q_{21} f f_y) \tag{2.26}$$

Gunakan deret Taylor sebagai solusi sejati sampai orde ke-dua :

$$y_{x_i+1} = y_i + hy'_i + {h^2}/{2}\, y"_i \tag{2.27}$$

dengan mempertimbangkan :

$$y'_i = f(x_i, y_i) = f$$

$$y"_i = f'(x_i, y_i) = \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = f_x + f f_y$$

maka persamaan (2.27) menjadi :

$$y_{x_i+1} = y_i + hf + {h^2}/{2}\,(f_x + f f_y) \tag{2.28}$$

Ingat bahwa galat potongan atau galat perlangkah adalah selisih antara solusi eksak dengan solusi hampiran, sehingga :

$$E_p = y_{x_i+1} - y_{i+1}$$

$$= (y_i + hf + {h^2}/{2}\left(f_x + ff_y\right)) - (y_i + (a_1 + a_2)hf$$

$$+a_2h^2(p_2f_x + q_{21}ff_y))$$

$$= \left(hf + \frac{h^2}{2}\left(f_x + ff_y\right)\right) - \left((a_1 + a_2)hf + a_2h^2(p_2f_x + q_{21}ff_y)\right)$$

dengan menjadikan galat perlangkah $E_p = 0$, maka diperoleh :

$$hf = (a_1 + a_2)hf$$

dan $\quad {h^2}/{2}\left(f_x + ff_y\right) = a_2h^2(p_2f_x + q_{21}ff_y)$

atau $\quad (a_1 + a_2) = 1,\ a_2p_2 = a_2q_{21} = {1}/{2} \qquad (2.29)$

Sistem persamaan (2.29) terdiri atas tiga persamaan dengan empat parameter yang tidak diketahui, maka solusi persamaan tidak unik atau memiliki banyak solusi. Sehingga kita dapat memilih sebarang parameter untuk di berikan nilai. Andaikan $a_2 = t,\ t \in R$, maka :

$a_1 = 1 - t,\ p_2 = {1}/{2t}$, dan $q_{21} = {1}/{2t}$

Oleh karena kita dapat memberikan sebarang nilai, berarti Metode Runge-Kutta orde dua tidak terhingga banyaknya. Contoh metode Runge-Kutta Orde Dua adalah metode Heun yang dapat ditulis sebagai :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

dengan $\quad k_1 = hf(x_i, y_i)$

$$k_2 = hf(x_i + h, y_i + k_1)$$

Dalam hal ini nilai $a_2 = {}^{1}/_{2}$, $a_1 = {}^{1}/_{2}$, dan $p_2 = q_{21} = 1$. kemudian dapat digambarkan dalam Tabel Butcher sebagai berikut :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

2.3.3 Metode Runge-Kutta Orde Tiga

Metode Runge-Kutta orde tiga memiliki tingkat keakuratan di atas Metode Runge-Kutta orde dua dan cara menentukan Metode ini sama dengan Metode Runge-Kutta orde dua. Berikut adalah contoh Metode Runge-Kutta orde tiga yang juga dijadikan dalam Tabel Butcher:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ \hline & 3/4 & 0 & 3/4 \end{array}$$

(a)

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}$$

(b)

Jika digambarkan kedalam rumus, maka metode Runge-Kutta orde tiga akan menjadi :

(a) $y_{i+1} = {}^{1}/_{4}\,(k_1 + 3k_3)$

dengan $k_1 = hf(x_i, y_i)$

$$k_2 = hf(x_i + {}^{h}/_{3}, y_i + {}^{k_1}/_{3})$$

$$k_3 = hf(x_i + {}^{2h}/_{3}, y_i + {}^{2}/_{3}\, k_3)$$

(b) $y_{i+1} = {}^{1}/_{6}\,(k_1 + 4k_2 + k_3)$

dengan $k_1 = hf(x_i, y_i)$

$$k_2 = hf(x_i + {}^{h}/_{2}, y_i + {}^{k_1}/_{2})$$

$$k_3 = hf(x_i + h, y_i - k_1 + 2k_2)$$

2.3.4 Metode Runge-Kutta Orde Empat

Berikut ini adalah persamaan umum Runge-Kutta orde empat:

$$y_{i+1} = y_i + h(a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4) \tag{2.30}$$

dimana $k_1 = f(x_i, y_i)$

$$k_2 = f(y_i + q_{21}k_1)$$

$$k_3 = f(q_{31}k_1 + q_{32}k_2)$$

$$k_4 = f(q_{41}k_1 + q_{42}k_2 + q_{43}k_3)$$

Untuk mendapatkan nilai $a_2, a_3, a_4, q_{21}, q_{31}, q_{32}, q_{41}, q_{42}, q_{43}$, adalah dengan cara menguraikan k_1, k_2, k_3, dan k_4 dalam bentuk deret Taylor untuk fungsi dua variabel yang didefinisikan sebagai:

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left[(x - x_n)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_n)\frac{\partial}{\partial y}\right]^i f(x_n, y_n) \tag{2.31}$$

dengan menjabarkank_i kedalam ruas kanan pada persamaan (2.31) maka akan diperoleh:

$$k_1 = f_i \tag{2.32}$$

$$k_2 = f(y_i + q_{21}k_1)$$

$$= f + hq_{21}ff_y + {h^2}/{2}\, q_{21}^2 f^2 f_{yy} + {h^3}/{6}\, q_{21}^3 f^3 f_{yyy} + \cdots \qquad (2.33)$$

$$k_3 = f(y_i + q_{31}k_1 + q_{32}k_2)$$

$$= f + hAff_y + h^2\left(q_{21}q_{32}ff_y^2 + \frac{1}{2}A^2 f^2 f_{yy}\right)$$

$$+h^3\left({1}/{2}\, q_{21}^2 q_{32} f^2 f_y f_{yy} + q_{21}Aq_{32}f^2 f_y f_{yy} + {1}/{6}\, A^3 f^3 f_{yyy}\right) + \cdots \qquad (2.34)$$

$$k_4 = f + hBff_y + h^2\left(q_{21}q_{42}ff_y^2 + Aq_{43}ff_y^2 + \frac{1}{2}B^2 f^2 f_{yy}\right)$$

$$+h^3({1}/{2}\, q_{21}^2 q_{42} B f^2 f_y f_{yy} + q_{43}\, {A^2}/{2}\, f^2 f_y f_{yy} + B(q_{21}q_{42} + q_{43}A) f^2 f_y f_{yy}$$

$$+q_{43}q_{32}q_{21}ff_y^3 + {1}/{6}\, B^3 f^3 f_{yyy}) + \cdots \qquad (2.35)$$

Untuk memperoleh nilai parameter $a_1, a_2, a_3, a_4, q_{21}, q_{31}, q_{32}, q_{41}, q_{42}, q_{43}$, adalah dengan cara menstubtitusikan persamaan (2.32), (2.33), (2.34), dan (2.35) dimana $A = q_{31} + q_{32}$ dan $B = q_{41} + q_{42} + q_{43}$ kedalam persamaan (2.30). Kemudian gunakan penyelesaian pedekatan deret Taylor untuk mendapatkan parameter tersebut sehingga diperoleh:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$$

$$a_2 q_{21} + a_3 A + a_4 B = \frac{1}{2}$$

$$a_2 q_{21}^2 + a_3 A^2 + a_4 B^2 = \frac{1}{3}$$

$$a_2 q_{21}^3 + a_3 A^3 + a_4 B^3 = \frac{1}{4}$$

$$a_3 q_{32} q_{21} + a_4 q_{42} q_{21} + a_4 q_{43} A = \frac{1}{6}$$

$$a_3 q_{32} q_{21}^2 + a_4 q_{42} q_{21}^2 + a_4 q_{43} A^2 = \frac{1}{12}$$

$$a_3 q_{21} q_{32} A + a_4 B(q_{21} q_{42} + q_{43} A) = \frac{1}{8}$$

$$a_4 q_{43} q_{32} q_{21} = \frac{1}{24} \tag{2.36}$$

Persamaan (2.36) terdiri dari 8 persamaan dengan 10 parameter sehingga dapat diambil 3 parameter bebas misalnya:

$$q_{21} = \frac{1}{3}, A = \frac{2}{3}, B = 1 \tag{2.37}$$

Substitusikan 3 parameter $q_{21,}, A, B$ ke persamaan (2.37) dan diperoleh:

$$q_{21} = \frac{1}{3}, q_{31} = \frac{1}{3}, q_{41} = 1, q_{32} = 1, q_{42} = -1, q_{43} = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{8}, a_2 = \frac{3}{8}, a_3 = \frac{3}{8}, a_4 = \frac{1}{8} \tag{2.38}$$

Kemudian substitusikan (2.37) dan (2.38) pada (2.30) akan diperoleh rumus Runge-Kutta orde 4 Kutta.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \tag{2.39}$$

dengan $k_1 = hf(y_i)$

$$k_2 = hf(y_i + \frac{k_1}{3})$$

$$k_3 = hf(y_i + \frac{k_1}{3} + k_2)$$

$$k_4 = hf(y_i + k_1 - k_2 + k_3)$$

Berikut ini adalah Runge-kutta orde empat Kutta dalam bentuk Tabel Butcher :

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\
2/3 & 1/3 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
 & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8
\end{array}
$$

Selain berbentuk Kutta Metode Runge-Kutta orde empat juga memiliki bentuk lain. Hal ini terjadi karena Metode Runge-Kutta orde empat memiliki solusi yang tidak unik atau memiliki banyak solusi dikarenakan terdapat 10 parameter bebas.

Jika dipilih tiga parameter bebas $q_{21} = {}^{1}/_{2}, A = {}^{1}/_{2}, B = 1$, maka akan terbentuk metode Runge-kutta Klasik sebagai berikut :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{2.40}$$

dengan $k_1 = hf(y_i)$

$$k_2 = hf(y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(y_i + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = hf(y_i + k_3)$$

Persamaan (2.40) dikenal sebagai Metode Kutta orde empat Klasik. Kemudian untuk $q_{21} = 1/2, A = 1/2, B = 1$, akan terbentuk rumusan yang berbeda dengan Runge-Kutta klasik dikarenakan nilai q dan a yang dihasilkan berbeda dengan bentuk klasik. Metode ini lebih dikenal dengan metode Gill yang memiliki rumus umum sebagai berikut :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + \left(2-\sqrt{2}\right)k_2 + \left(2+\sqrt{2}\right)k_3 + k_4\right) \qquad (2.41)$$

dengan $k_1 = hf(x_i, y_i)$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)k_1}{2} + \frac{\left(2-\sqrt{2}\right)k_2}{2})$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i - \frac{\sqrt{2}k_2}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)k_3)$$

Persamaan (2.40) dan (2.41) dapat digambarkan dalam tabel Butcher berikut :

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0
1	0	0	1	0
	1/6	1/3	1/3	1/6

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	$(\sqrt{2}-1)/2$	$(\sqrt{2}-1)/2$	0	0
1	0	$-\sqrt{2}/2$	$1+\sqrt{2}/2$	0
	1/6	$\left(2-\sqrt{2}\right)/3$	$\left(2+\sqrt{2}\right)/3$	1/6

2.4 Galat Pemotongan

Pada aproksimasi polinomial di titik $n+1$ data, terdapat perbedaan atau galat terhadap nilai sesungguhnya atau nilai eksak. Nilai perbedaan tersebut dapat dicari dengan menggunakan Galat pemotongan. Dengan menstubtitusikan sebuah derajat polinomial p + 1 kedalam rumus orde p dapat dibangun sebuah bentuk galat :

$$T(x,h) = Ch^{p+1}y^{(p+1)}(\varepsilon)$$

Aplikasi Algoritma dan proses perhitungan dari bentuk x_0 ke $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$ dalam pengertian yang luas dapat didefinisikan sebagai metode satu langkah, yang secara umum di tulis sebagai:

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n; h) \qquad\qquad n = 0,1,2, \dots$$

dengan Φ adalah fungsi naik yang terdapat unsur x_n, y_n dan menggunakan *h*. definisikan *y*(*x*) sebagai solusi eksak untuk persamaan differensial biasa, sehingga untuk setiap *x* akan berlaku:

$$T(x,h) = y(x) + h\Phi(x, y(x); h) - y(x+h)$$

atau

$$galat\ pemotongan = solusi\ eksak - solusi\ hampiran \qquad (2.42)$$

Jika *p* lebih besar dari bilangan integer *p'*, maka :

$$T(x,y) = O(h^{p'+1})$$

Contoh 2.3 :

Dengan menggunakan RK-4 (Kutta) tentukan penyelesaian masalah nilai awal berikut ini :

$$y' = y, \;\; y(0) = 1 \quad h = 0.01$$

pada selang [*0*,*1*].

Penyelesaian :

Terlebih dahulu akan ditentukan solusi eksak yaitu:

$$\frac{dy}{dx} = y$$

dengan menggunakan metode variabel terpisah maka akan didapatkan:

$$y = Ce^{x}$$

Untuk $y(0) = 1$ maka $C = 1$ sehingga diperoleh solusi eksak :

$$y(x) = e^{x}$$

Sedangkan solusi hampiran dengan menggunakan metode Runge-Kutta Orde 4 (Kutta) adalah sebagai berikut :

- untuk $h = 0.01$

$$k_1 = hy(0)$$
$$= 0.01$$
$$k_2 = y(0) + \frac{hk_1}{3}$$
$$= 1.00003$$
$$k_3 = y(0) + h(\frac{k_1}{3} + k_2)$$
$$= 1.01003$$
$$k_4 = y(0) + h(k_1 - k_2 + k_3)$$
$$= 1.00020$$
$$y(1) = y(0) + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$$
$$= 1.00880$$

- untuk $h = 0.02$

$$k_1 = hy(0)$$
$$= 0.02$$
$$k_2 = y(0) + \frac{hk_1}{3}$$
$$= 1.00013$$
$$k_3 = y(0) + h(\frac{k_1}{3} + k_2)$$
$$= 1.02013$$
$$k_4 = y(0) + h(k_1 - k_2 + k_3)$$

$= 1.00080$

$$y(1) = y(0) + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$$

$= 1.01770$

- untuk $h = 0.03$

$k_1 = hy(0)$

$= 0.03$

$$k_2 = y(0) + \frac{hk_1}{3}$$

$= 1.00030$

$$k_3 = y(0) + h(\frac{k_1}{3} + k_2)$$

$= 1.03030$

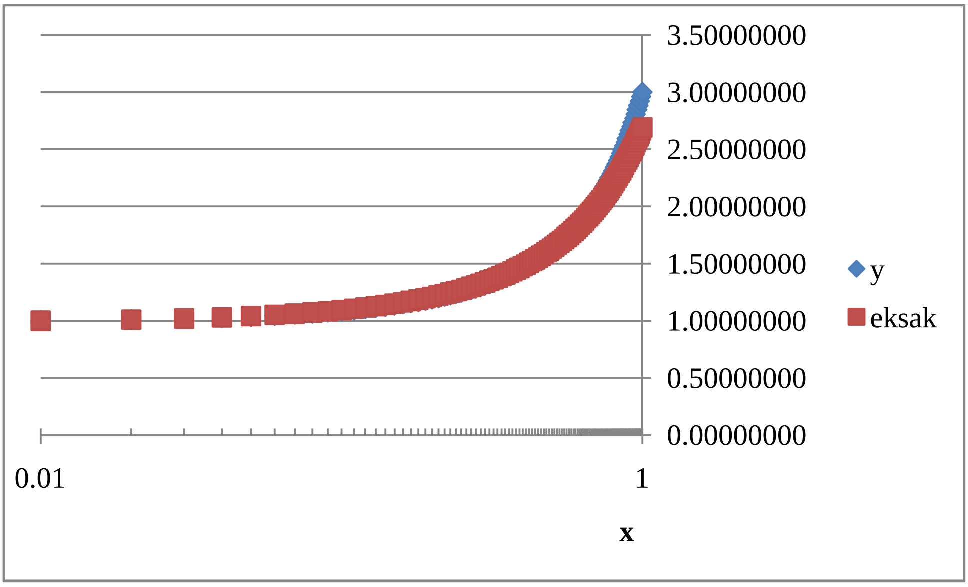
$k_4 = y(0) + h(k_1 - k_2 + k_3)$

$= 1.00180$

$$y(1) = y(0) + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$$

$= 1.02671$

Lakukan proses iterasi diatas secara terus-menerus sampai pada selang [0.1]. selanjutnya hasil iterasi tersebut dapat digambarkan pada grafik plotting berikut ini :



Gambar 2.1 Grafik plotting untuk kasus $y' = y$ pada selang [0.1] dan $h = 0.01$

2.5 Rata-rata Kontra Harmonik

Definisi (*Wikipedia*) **:** Rata-rata kontra harmonik dari bilangan positif didefinisikan sebagai rata-rata kuadrat Aritmatik yang dibagi dengan rata-rata Aritmatik itu sendiri.

$$C(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\dfrac{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}{n}}{\dfrac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}{n}} \tag{2.43}$$

disederhanakan menjadi:

$$C(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)} \tag{2.44}$$

Untuk dua variabel a dan b terdapat $0 < a \leq b$.

Ini memudahkan untuk melihat bahwa rata-rata kontra harmonik adalah bagian dari rata-rata harmonik. Selanjutnya rata-rata kontra harmonik juga merupakan rata-rata yang lebih tinggi dari rata-rata Aritmatik dan rata-rata Harmonik. Sedangkan rata-rata Aritmatik lebih tinggi bila dibandingkan dengan rata-rata Harmonik. Perhatikan bentuk berikut ini :

$$C(a,b) - A(a,b) = A(a,b) - H(a,b)$$

atau

$$C(a,b) = 2A(a,b) - H(a,b) \tag{2.45}$$

berdasarkan rumus rata-rata aritmatik $A(a,b)$ dan rata-rata harmonik $H(a,b)$ dua variabel yaitu:

$$A(a,b) = \frac{(a+b)}{2} \tag{2.46}$$

$$H(a,b) = \frac{1}{\frac{1}{2}.(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})} = \frac{2ab}{a+b} \tag{2.47}$$

maka persamaan rata-rata kontra harmonik $C(a,b)$ dapat ditulis sebagai:

$$C(a,b) = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{a+b} = \frac{a^2+b^2}{a+b} \tag{2.48}$$

Berikut ini adalah pembuktian dari persamaan (2.45) :

$$C(a,b) - A(a,b) = A(a,b) - H(a,b)$$

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} - \frac{(a+b)}{2} = \frac{(a+b)}{2} - \frac{2ab}{a+b}$$

$$\frac{2(a^2+b^2) - (a+b)^2}{2(a+b)} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)}$$

$$\frac{a^2 - 2ab + b^2}{2(a+b)} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2(a+b)}$$

$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \qquad \blacksquare$$

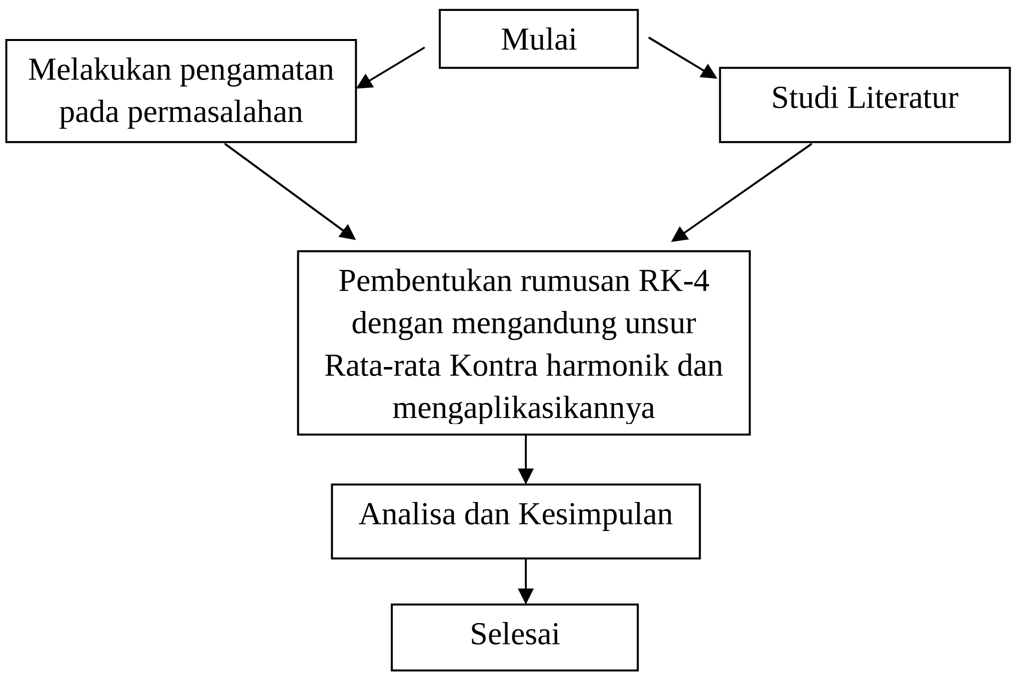
BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Penulisan skripsi ini hanya membahas secara teori modifikasi metode Runge-Kutta orde 4 Kutta. Oleh karena itu, penelitian dilakukan dengan menggunakan metode studi pustaka yang berguna untuk mengumpulkan data dan informasi yang dibutuhkan baik berasal dari buku-buku, jurnal, maupun sumber-sumber dari internet.

Penulisan di mulai dengan mengenalkan Metode Runge-Kutta secara umum sampai orde ke-n. kemudian bentuk umum ini akan dikhususkan sampai pada Orde 4. Selain itu juga akan dikenalkan rata-rata Kontra Harmonik. Setelah diperoleh bentuk umum Runge-Kutta Orde 4 dan rata-rata Kontra Harmonik maka langkah yang terakhir adalah memodifikasi kedua bentuk umum tersebut sehingga akan diperoleh rumusan baru.

Digambarkan dalam *Flowchart* dibawah ini :



Gambar 3.1 *Flowchart* Penyusunan Tugas Akhir

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1. Modifikasi Metode RK-4 Kutta dengan Menggunakan Rata-rata Kontra Harmonik

Beberapa modifikasi Metode Runge-Kutta telah banyak dihasilkan, seperti modifikasi bardasarkan rata-rata Aritmatik, Geometrik, Harmonik, bahkan rata-rata Kontra Harmonik seperti yang teleh diperkenalkan oleh ababneh terhadap Runge-Kutta Orde 3. Pada Skripsi ini penulis akan membuktikan Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde 4 Kutta berdasarkan Rata-rata Kontra Harmonik.

Perhatikan kembali bentuk umum Runge-Kutta Orde 4 Kutta :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \tag{4.1}$$

Berdasarkan persamaan (4.1) dapat dibentuk rumusan baru yang mengandung unsur Aritmatik sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}(\frac{k_1}{2} + \frac{3k_2}{2} + \frac{3k_3}{2} + \frac{k_4}{2})$$

atau

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(\frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_2 + k_3}{2} + \frac{k_2 + k_3}{2} + \frac{k_3 + k_4}{2}\right) \tag{4.2}$$

Persamaan (4.2) dikenal sebagai Runge-Kutta Orde 4 berdasarkan Rata-rata Aritmatik. dimana bentuk $\frac{k_i+k_{i+1}}{2}$ adalah rata-rata Aritmatik untuk dua variabel. Jika rata-rata Aritmatik tersebut dikuadratkan dan dibagi dengan rata-rata Aritmatik itu sendiri maka akan terbentuk persamaan Runge-Kutta Orde 4 sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(\frac{\frac{k_1^2 + k_2^2}{2} + \frac{k_2^2 + k_3^2}{2} + \frac{k_2^2 + k_3^2}{2} + \frac{k_3^2 + k_4^2}{2}}{\frac{k_1 + k_2}{2} + \frac{k_2 + k_3}{2} + \frac{k_3 + k_4}{2}}\right)$$

dapat disederhanakan menjadi

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 + k_2} + 2\frac{k_2^2 + k_3^2}{k_2 + k_3} + \frac{k_3^2 + k_4^2}{k_3 + k_4}\right) \tag{4.3}$$

dengan $k_1 = f(y_i) = hf$

$$k_2 = f(y_i + hq_{21}k_1)$$

$$k_3 = f(y_i + hq_{31}k_1 + hq_{32}k_2)$$

$$k_4 = f(y_i + hq_{41}k_1 + hq_{42}k_2 + hq_{43}k_3) \tag{4.4}$$

Bentuk $\frac{k_i^2+k_{i+1}^2}{2}$ didefinisikan sebagai rata-rata Kontra Harmonik, sehingga persamaan (4.3) dikenal sebagai modifikasi metode Runge-Kutta Orde 4 Kutta berdasarkan rata-rata Kontra Harmonik.

Jabarkan k_1, k_2, k_3, dan k_4 kedalam bentuk deret Taylor Orde satu untuk fungsi dua variabel (2.31) sehingga akan diperoleh persamaan (2.32), (2.33), (2.34), dan (2.35).

Secara umum, persamaan (2.32) – (2.35) akan disubstitusikan untuk mendapatkan fungsi y_{i+1} dengan parameter $q_{21}, q_{31}, q_{32}, q_{41}, q_{42}$, dan q_{43}. Akan tetapi karena terdapat pembagian dua deret (rata-rata Kontra Harmonik), maka substitusi secara langsung tidak dapat dilakukan. Maka akan dilakukan perkalian silang sehingga permasalahan ini akan berkurang dan terdapat bentuk $(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)(k_3 + k_4)$, yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{pembilang}{penyebut} \tag{4.5}$$

selanjutnya bandingkan persamaan (4.5) dengan deret Taylor pada persamaan (2.90), sehingga diperoleh :

$$y_i + \frac{pembilang}{penyebut} = y_i + T$$

atau

$$pembilang = T \times penyebut \tag{4.6}$$

dengan $pembilang = h/4(k_1^2 + k_2^2)(k_2 + k_3)(k_3 + k_4) + 2(k_2^2 + k_3^2)$

$$(k_1 + k_2)(k_3 + k_4) + (k_3^2 + k_4^2)(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)$$

$penyebut \ = (k_1 + k_2)(k_2 + k_3)(k_3 + k_4)$

$$T = hf + \frac{h^2}{2} f f_y + \frac{h^3}{6}\left(f {f_y}^2 + f^2 f_y\right)$$

$$+ \frac{h^4}{24}\left(f^3 f_{yyy} + 4f^2 f_y f_{yy} + f f_y^3\right)$$

Kemudian substitusikan nilai k_1, k_2, k_3 dan k_4 yang telah diperoleh pada persamaan (2.32), (2.33), (2.34), dan (2.35) ke dalam persamaan (4.6) dan diperoleh :

$h^2 f^4 f_y$ $: 3q_{21} + 3A + B = 4$

$h^3 f^5 f_{yy}$ $: {}^3/_2\, q_{21}^2 + {}^3/_2\, A^2 + {}^1/_2\, B^2 = {}^4/_3$

$h^3 f^4 f_y^2$ $: {}^9/_2\, q_{21}^2 + {}^9/_2\, A^2 + B^2 + {}^3/_2\, AB + {}^5/_2\, q_{21}B + 4q_{21}A$

$+3q_{32}q_{21} + q_{42}q_{21} + q_{43}A - 4q_{21} - 4A - 2B = {}^4/_3$

$h^4 f^6 f_{yyy}$ $: {}^1/_2\, q_{21}^3 + {}^1/_2\, A^3 + {}^1/_6\, B^3 = {}^1/_3$

$h^4 f^5 f_y f_{yy}$ $: {}^9/_2\, q_{21}^3 + {}^9/_2\, A^3 + B^3 + 2q_{21}^2 A + 2q_{21}A^2 + {}^5/_4\, q_{21}B^2$

$+ {}^5/_4\, q_{21}^2 B + {}^1/_2\, q_{21}^2 q_{42} + {}^1/_2\, q_{43}B^2 + B(q_{42}q_{21} + q_{43}A)$

$+ {}^3/_4\, A^2 B + {}^3/_4\, AB^2 + {}^3/_2\, q_{21}^2 q_{32} + 3q_{21}q_{32}A - 2q_{21}^2$

$-2A^2 - B^2 - {}^4/_3\, q_{21} - {}^4/_3\, A - {}^2/_3\, B = 4/3$

$h^4 f^4 f_y^3$ $: 3q_{21}^2 A + 3q_{21}A^2 + {}^5/_2\, q_{21}^2 B + q_{21}B^2 + 4q_{21}^2 q_{32}$

$$+ {}^{5}\!/_{2}\, q_{21}^2 q_{42} + {}^{3}\!/_{2}\, q_{21} q_{32} + {}^{3}\!/_{2}\, q_{21} q_{42} + {}^{5}\!/_{2}\, q_{21} q_{43} A$$

$$+9 q_{21} q_{21} A + 2 q_{43} AB + q_{21} AB + q_{21} q_{32} q_{43} + 2 q_{21} q_{43} B$$

$$+ {}^{3}\!/_{2}\, q_{43} A^2 + A^2 B + {}^{1}\!/_{2}\, AB^2 + {}^{3}\!/_{2}\, q_{21}^3 + {}^{3}\!/_{2}\, A^3$$

$$-4 q_{21} q_{32} - 2 q_{21} q_{42} - 2 q_{43} A - 3 q_{21} A - AB - 2 q_{21} B$$

$$- {}^{4}\!/_{3}\, q_{21} - {}^{4}\!/_{3}\, A - {}^{2}\!/_{3}\, B - q_{21}^2 - A^2 = {}^{1}\!/_{3} \qquad (4.7)$$

Untuk memudahkan mendapatkan nilai parameternya, dilakukan penyederhanaan terlebih dahulu dengan mengambil nilai :

$$A = 2/3 \qquad \text{dan} \qquad B = 1$$

maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

$h^2 f^4 f_y \quad : 3 q_{21} = 1$

$h^3 f^5 f_{yy} \quad : {}^{3}\!/_{2}\, q_{21}^2 = {}^{1}\!/_{6}$

$h^3 f^4 f_y^2 \quad : {}^{7}\!/_{6}\, q_{21} - {}^{9}\!/_{2}\, q_{21}^2 + 3 q_{32} q_{21} + q_{42} q_{21} + {}^{2}\!/_{3}\, q_{43} = 2/3$

$h^4 f^6 f_{yyy} \quad : {}^{1}\!/_{2}\, q_{21}^3 = {}^{1}\!/_{54}$

$h^4 f^5 f_y f_{yy} \quad : {}^{9}\!/_{2}\, q_{21}^3 + {}^{7}\!/_{12}\, q_{21}^2 + {}^{29}\!/_{36}\, q_{21} + {}^{3}\!/_{2}\, q_{21}^2 q_{32}$

$\qquad +2 q_{21} q_{32} + {}^{1}\!/_{2}\, q_{21}^2 q_{42} + q_{21} q_{42} + {}^{7}\!/_{6}\, q_{43} = 29/18$

$h^4 f^4 f_y^3 \quad : {}^{3}\!/_{2}\, q_{21}^3 + {}^{7}\!/_{2}\, q_{21}^2 - {}^{7}\!/_{3}\, q_{21} + 4 q_{21}^2 q_{32} + {}^{7}\!/_{2}\, q_{21} q_{32}$

$\qquad + {}^{5}\!/_{2}\, q_{21}^2 q_{42} + q_{21} q_{42} + {}^{5}\!/_{3}\, q_{21} q_{42}$

$\qquad + {}^{2}\!/_{3}\, q_{43} + q_{21} q_{32} q_{43} = {}^{16}\!/_{9} \qquad (4.8)$

Kemudian substitusikan nilai $q_{21} = 1/3$ ke dalam persamaan (4.8) sehingga akan didapatkan persamaan baru berikut :

$$q_{32} + {}^{1}\!/_{3}\, q_{42} + {}^{2}\!/_{3}\, q_{43} = {}^{10}\!/_{9}$$

$$^{5}/_{6}\, q_{32} + {}^{7}/_{18}\, q_{42} + {}^{7}/_{6}\, q_{43} = {}^{10}/_{9}$$

$$^{29}/_{18}\, q_{32} + {}^{11}/_{18}\, q_{42} + {}^{11}/_{9}\, q_{43} + {}^{1}/_{3}\, q_{32}q_{43} = {}^{19}/_{9} \qquad (4.9)$$

dengan menyelesaikan sistem persamaan pada (4.9), maka didapatlah nilai-nilai $q_{21} = {}^{1}/_{3}\,, q_{31} = {}^{5}/_{18} - {}^{\sqrt{73}}/_{18}\,, q_{32} = {}^{7}/_{18} + {}^{\sqrt{73}}/_{18}\,, q_{41} = -{}^{5}/_{3} + {}^{\sqrt{73}}/_{3}\,, q_{42} = {}^{19}/_{6} - {}^{\sqrt{73}}/_{2}$ dan $q_{43} = {}^{-1}/_{2} + {}^{\sqrt{73}}/_{6}$.

Langkah terakhir adalah dengan mensubstitusikan semua nilai parameter yang telah didapat kedalam persamaan (4.4) dan diperoleh bentuk persamaan berikut ini :

$$k_1 = hf(y_i) = hf$$

$$k_2 = hf(y_i + {}^{1}/_{3}\, k_1)$$

$$k_3 = hf(y_i + ({}^{5}/_{18} + {}^{\sqrt{73}}/_{18})k_1 - ({}^{7}/_{18} + {}^{\sqrt{73}}/_{18})k_2)$$

$$k_4 = hf\left(y_i + \left(-{}^{5}/_{3} + {}^{\sqrt{73}}/_{3}\right)k_1 - \left({}^{19}/_{6} - {}^{\sqrt{73}}/_{2}\right)k_2 - ({}^{1}/_{2} - {}^{\sqrt{73}}/_{6})k_3\right) \qquad (4.10)$$

Persamaan (4.3) dan (4.10) dikenal sebagai Metode Runge- Kutta Orde Empat Kutta berdasarkan rata-rata Kontra Harmonik.

Contoh 4.1:

Tentukan aproksimasi dari persamaan differensial berikut ini :

$y' = y$ dengan syarat awal $y(0) = 1$ dan h=0.1

Dan sebagai perbandingan diberikan solusi eksak $y = e^x$.

Penyelesaian :

Akan ditentukan terlebih dahulu nilai k_1, k_2, k_3 dan k_4 sebagai berikut :

$$k_1 = hy(0) = 0.1$$

$$k_2 = y(0) + {}^1\!/_3\, hk_1$$

$$= 1 + {}^{0.1}\!/_3\,(1)$$

$$= 1.00333$$

$$k_3 = y(0) + \left({}^5\!/_{18} - {}^{\sqrt{73}}\!/_{18}\right) hk_1 + \left({}^7\!/_{18} + {}^{\sqrt{73}}\!/_{18}\right) hk_2$$

$$= 1 + 0.086472$$

$$= 1.08647$$

$$k_4 = y(0) + \left(-{}^5\!/_3 + {}^{\sqrt{73}}\!/_3\right) hk_1 + \left({}^{19}\!/_6 - {}^{\sqrt{73}}\!/_2\right) hk_2$$

$$+ \left(-{}^1\!/_2 + {}^{\sqrt{73}}\!/_6\right) hk_3$$

$$= 1 + 0.00114$$

$$= 1.00114$$

Selanjutnya substitusikan nilai k yang diperoleh ke dalam persamaan umum Runge- Kutta orde empat Kutta berdasarkan rata-rata Kontra Harmonik, dan didapatkan :

$$y_{i+1} = y_i + {}^h\!/_4 \left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 + k_2} + 2\frac{k_2^2 + k_3^2}{k_2 + k_3} + \frac{k_3^2 + k_4^2}{k_3 + k_4}\right)$$

atau

$$y_1 = 1.10143$$

Sedangkan solusi eksaknya adalah $y = e^{0.1} = 1.10517$. sehingga dengan membandingkan solusi eksak dan solusi hampiran (RKCM Kutta) akan didapatkan nilai galat sebesar $E = 0.00374$.

4.2 Galat pada Metode Runge-Kutta Orde empat Kutta berdasarkan rata-rata Kontra Harmonik

Untuk mendapatkan galat pada Metode Runge-Kutta Orde empat Kutta berdasarkan Rata-rata Kontra Harmonik, langkah-langkahnya sama dengan menentukan penurunan rumus RKCM sebelumnya. Dengan mensubstitusikan nilai parameter yang didapat kedalam persamaan (4.6) dan menekspansinya sampai Orde 5 (h^5), maka akan diperoleh galat untuk metode RKCM sebagai berikut :

$$galat_{RKKCM} = h^5\left(\frac{17}{243}f^6 f_y f_{yyy} + \frac{11}{162}f^6 f_{yy}^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{73}}{81}\right)f^5 f_y^2 f_{yy} + \left(\frac{73}{243} - \frac{5\sqrt{73}}{243}\right)f^4 f_y^4\right) \quad (4.11)$$

4.3 Simulasi Numerik

Berikut ini adalah penyelesaian dari $y' = y$ dengan syarat awal $y(0) = 1$ dan $h = 0.01$ untuk solusi eksak $y = e^x$ pada selang $[0,1]$ dengan menggunakan metode modifikasi RK-4 Kutta.

→Metode modifikasi RK-4 Kutta

- untuk $h = 0.01$

  $k_1 = hy(0) = 0.01$

  $k_2 = y(0) + {}^1/_3\, hk_1$

  $= 1 + {}^{0.01}/_3\,(1)$

  $= 1.00003$

  $k_3 = y(0) + \left({}^5/_{18} - {}^{\sqrt{73}}/_{18}\right)hk_1 + \left({}^7/_{18} + {}^{\sqrt{73}}/_{18}\right)hk_2$

  $= 1 + 0.086472$

  $= 1.08647$

$$k_4 = y(0) + \left(-5/_3 + \sqrt{73}/_3\right)hk_1 + \left(19/_6 - \sqrt{73}/_2\right)hk_2$$

$$+\left(-1/_2 + \sqrt{73}/_6\right)hk_3$$

$$= 1 + 0.00114$$

$$= 1.00114$$

$$y(1) = y(0) + h/_4\left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 + k_2} + 2\frac{k_2^2 + k_3^2}{k_2 + k_3} + \frac{k_3^2 + k_4^2}{k_3 + k_4}\right)$$

$$= 1.010006$$

- untuk $h = 0.02$

$$k_1 = hy(0)$$

$$= 0.02$$

$$k_2 = y(0) + 1/_3\, hk_1$$

$$= 1 + 0.02/_3\,(1)$$

$$= 1.00013$$

$$k_3 = y(0) + \left(5/_{18} - \sqrt{73}/_{18}\right)hk_1 + \left(7/_{18} + \sqrt{73}/_{18}\right)hk_2$$

$$= 1 + 0.01719$$

$$= 1.01719$$

$$k_4 = y(0) + \left(-5/_3 + \sqrt{73}/_3\right)hk_1 + \left(19/_6 - \sqrt{73}/_2\right)hk_2$$

$$+\left(-1/_2 + \sqrt{73}/_6\right)hk_3$$

$$= 1 - 0.00283$$

$= 0.99716$

$y(1) = y(0) + {}^{h}/_{4}\,(\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 + k_2} + 2\,\frac{k_2^2 + k_3^2}{k_2 + k_3} + \frac{k_3^2 + k_4^2}{k_3 + k_4})$

$= 1.020028$

- untuk $h = 0.03$

$k_1 \;= hy(0)$

$= 0.03$

$k_2 \;= y(0) + {}^{1}/_{3}\,hk_1$

$= 1 + {}^{0.03}/_{3}\,(1)$

$= 1.00030$

$k_3 \;= y(0) + \left({}^{5}/_{18} - {}^{\sqrt{73}}/_{18}\right)hk_1 + \left({}^{7}/_{18} + {}^{\sqrt{73}}/_{18}\right)hk_2$

$= 1 + 0.02573$

$= 1.02573$

$k_4 \;= y(0) + \left({}^{-5}/_{3} + {}^{\sqrt{73}}/_{3}\right)hk_1 + \left({}^{19}/_{6} - {}^{\sqrt{73}}/_{2}\right)hk_2$

$+ \left({}^{-1}/_{2} + {}^{\sqrt{73}}/_{6}\right)hk_3$

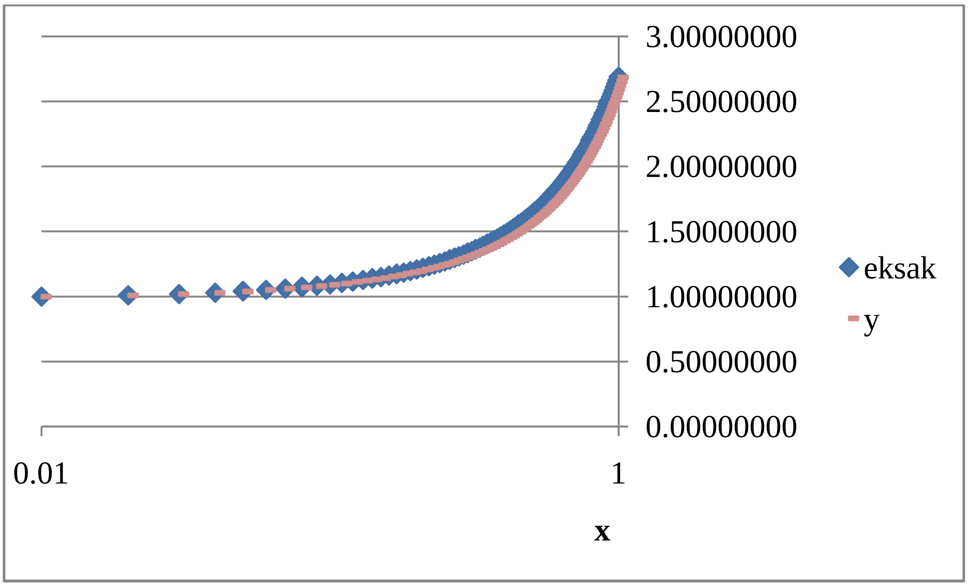
$= 1 - 0.00367$

$= 0.99632$

$y(1) = y(0) + {}^{h}/_{4}\,(\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 + k_2} + 2\,\frac{k_2^2 + k_3^2}{k_2 + k_3} + \frac{k_3^2 + k_4^2}{k_3 + k_4})$

$= 1.030072$

Lakukan proses iterasi diatas secara terus-menerus sampai pada selang $[0.1]$ dengan $h = 0.01$. selanjutnya hasil iterasi tersebut dapat ditunjukkan pada grafik plotting berikut ini :



Gambar 4.1 Grafik plotting untuk kasus $y' = y$ diselang [0,1] dan $h = 0.01$

Berdasarkan hasil perhitungan numerik dan dengan melihat grafik plotting hasil perhitungan, terlihat jelas bahwa untuk nilai hampiran dengan menggunakan metode modifikasi RKKCM ini lebih signifikan bila dibandingkan dengan metode RK-4 Kutta sebelum dimodifikasi.

BAB V

PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Metode Runge-Kutta Orde-4 Kutta memiliki bentuk umum sebagai berikut :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$$

setelah dilakukan modifikasi dengan menggunakan Rata-rata Kontra Harmonik didapatkan suatu bentuk baru yaitu :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4}\left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 + k_2} + 2\frac{k_2^2 + k_3^2}{k_2 + k_3} + \frac{k_3^2 + k_4^2}{k_3 + k_4}\right)$$

dengan

$$k_1 = hf(y_i)$$

$$k_2 = hf\left(y_i + \frac{k_1}{3}\right)$$

$$k_3 = hf(y_i + k_1\left(\frac{5}{18} - \frac{\sqrt{73}}{18}\right) + k_2\left(\frac{7}{18} + \frac{\sqrt{73}}{18}\right))$$

$$k_4 = hf(y_i + k_1\left(\frac{-5}{3} + \frac{\sqrt{73}}{3}\right) + k_2\left(\frac{19}{6} - \frac{\sqrt{73}}{2}\right) + k_3\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{73}}{6}\right))$$

dan Galat potongannya adalah :

$$galat_{RKKCM} = h^5\left(\frac{17}{243}f^6 f_y f_{yyy} + \frac{11}{162}f^6 f_{yy}^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{73}}{81}\right)f^5 f_y^2 f_{yy} + \left(\frac{73}{243} - \frac{5\sqrt{73}}{243}\right)f^4 f_y^4\right)$$

Berdasarkan simulasi numerik dengan menggunakan metode RKKCM diketahui bahwa hasil metode ini memiliki keakuratan yang lebih baik dibandingkan dengan Metode RK-4 Kutta sebelum di modifikasi.

5.2. Saran

Dalam penulisan Skripsi ini penulis hanya menggunakan Rata-rata Kontra Harmonik untuk memodifikasi Metode RK-4 Kutta. Oleh karena itu, penulis menyarankan agar pembaca dapat lebih lanjut menemukan rumusan baru dengan menggunakan rata-rata yang lain seperti (Harmonik, Centroidal, dan Geometri).

DAFTAR PUSTAKA

Ababneh, Osama Yusuf dkk ”On Cases of Fourth-Order Runge-Kutta Methods”, *European Journal of Scientifiec Research.* Vol 31.pp 605-615.2009.

Ababneh, Osama Yusuf dkk ”New Third Order Runge-Kutta Based on Contraharmonic mean for Stiff Problems”, *Applied Mathematical Sciences.* Vol. 3 no. 8, 365-376. 2009.

Agbeboh, G. U dkk ”Implementation Of a New 4th Order Runge Kutta Formula for Solving Initial Value Problems (I.V.Ps)”, *International Journal of Physical Sciences.* Vol.2 (4) .pp 089-098. 2007.

Bronson, Richardson dkk *”Persamaan Diferensial”*, edisi ketiga.halaman 1,14,21,29. Erlangga. Jakarta.2002.

Djojodihardjo, Harijono. *”Metode Numerik”*, halaman 263-276. PT Gramedia Pustaka Utama. Jakarta. 2000.

Imran, M ”Perbandingan Modifikasi Metode RK-4 Berdasarkan Variasi Rata-rata”, *Jurnal Natur Indonesia*. Vol 14 (1). 2002.

Lapidus, Leon dkk *”Numerical Solution of Ordinary Differential Equations”* .halaman 39-42. Academic Press. New York and London.1971.

Mathews, Jhon,*”Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering”*, Second edition. Prentice Hall International. 1992.

Munir, Rinaldi. *”Metode Numerik”*, edisi 2, halaman 361-415. Informatika, Bandung. 2008.

Sd Conte dan Boor, *”Dasar-dasar Analisis Numerik Suatu Pendekatan Algoritma”*, edisi 3. Erlangga. Jakarta. 1993.

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran **Halaman**

A RK-4 Kontra Harmonik A-1

B Galat modifikasi RK-4 Kutta B-1

C Simulasi Numerik C-1

DAFTAR LAMBANG

f'	:	Turunan pertama
∞	:	Tak Hingga
x_0	:	Nilai Awal
$\int$	:	Integral
$f(x)$	:	Fungsi dengan variabel bebas x
!	:	Faktorial
$\sum$	:	Sigma / jumlah

DAFTAR GAMBAR

Halaman

1. Gambar 2.1 .... II-23
2. Gambar 3.1 .... III-1
3. Gambar 4.1 .... IV-10

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Supinah, anak ke-9 dari sepuluh bersaudara ini lahir di Bengkalis pada 01 Januari 1988. Anak dari pasangan H. Ahmad Zuhdi dan Hj. Muslimah ini memulai pendidikan dasarnya di SDN 079 Kelapasari tahun 1994-2000, dan melanjutkan sekolah di MTsN Bengkalis tahun 2000-2003 dan MAN Bengkalis tahun 2003-2006. Kemudian melanjutkan pendidikan S-1 di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau pada Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi pada tahun 2006. Mahasiswa yang memiliki hobi *ngemil* ini sehari-harinya tinggal dijalan Inpres Perum Bumi Sari Asri B1/14 Pekanbaru dan dapat dihubungi ke-no +6285320177575 atau E-mail najwa01011988@hotmail.com.

LAMPIRAN A

RK-4 Kontra Harmonik

```
> restart;
```

```
> a:=B+3*q21-4+3*A;
```

$$a := B + 3\,q21 - 4 + 3\,A$$

```
> b:=1/2*B^2+3/2*q21^2-4/3+3/2*A^2;
```

$$b := \frac{1}{2}\,B^2 + \frac{3}{2}\,q21^2 - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\,A^2$$

```
> c:=((5/2*q21*f^4*f[y]^2*B+3/2*A*f^4*f[y]^\
2*B+1/2*f^5*B^2*f[yy]+3/2*f^5*q21^2*f[yy]+9/2*f^4*q21
^2*f[y]^2+9/2*f^4*A^2*f[y]^\
2-4*f^4*f[y]^2*A-2*f^4*f[y]^2*B+f^4*B^2*f[y]^2-
4/3*f^5*f[yy]+3/2*f^5*A^2*f[yy]+4\
*q21*f^4*f[y]^2*A+3*f^4*q32*q21*f[y]^2+f^4*q42*q21*f[
y]^2-4*f^4*f[y]^2*q21+f^4*q\
43*A*f[y]^2-4/3*f^4*f[y]^2)-
(1/2*f^5*B^2*f[yy]+3/2*f^5*q21^2*f[yy]-
4/3*f^5*f[yy]+3/2*f^5*A^2*f[yy]))/(f^4*f[y]^2);c:=exp
and(c);
```

$$c := \frac{1}{f^4\,f_y^2}\Big(\frac{5}{2}\,q21\,f^4\,f_y^2\,B + \frac{3}{2}\,A\,f^4\,f_y^2\,B + \frac{9}{2}\,f^4\,q21^2\,f_y^2 + \frac{9}{2}\,f^4\,A^2\,f_y^2 - 4\,f^4\,f_y^2\,A - 2\,f^4\,f_y^2\,B + f^4\,B^2\,f_y^2 + 4\,q21\,f^4\,f_y^2\,A + 3\,f^4\,q32\,q21\,f_y^2 + f^4\,q42\,q21\,f_y^2 - 4\,f^4\,f_y^2\,q21 + f^4\,q43\,A\,f_y^2 - \frac{4}{3}\,f^4\,f_y^2\Big)$$

$$c := \frac{5}{2}\,q21\,B + \frac{3}{2}\,A\,B + \frac{9}{2}\,q21^2 + \frac{9}{2}\,A^2 - 4\,A - 2\,B + B^2 + 4\,q21\,A + 3\,q32\,q21 + q42\,q21 - 4\,q21 + q43\,A - \frac{4}{3}$$

```
> d:=(-4/3*f^4*f[y]^3*q21-1/3*f^4*f[y]^3-f^4*f[y\
]^3*q21^2-2/3*f^4*f[y]^3*B+3/2*A^3*f^4*f[y]^3-
4/3*f^4*f[y]^3*\
A+3/2*q21^3*f^4*f[y]^3-f^4*f[y]^3*A^2+4*\
q21^2*f^4*f[y]^3*q32+5/2*q21^2*f^4*f[y]^3*q42+3/2*f^4
*A^2\
```

```
*f[y]^3*q43+3*q21^2*f^4*f[y]^3*A+5/2*q21^2*f^4*f[y]^3
*B+A^2*f^4*f[y]^3*B+3*q21*f\
^4*f[y]^3*A^2+q21*f^4*f[y]^3*B^2+1/2*A*f^4*f[y]^3*B^2
+f^4*q43*f[y]^3*q32*q21+5/2*q21*f^4*f[y]^3*q43*A+9*f^
4*A*f[y]^3*q32*q21+3/2*f^4*A*f[y]^3*q42*q21+3/2*f^4*q
32*q21*f[y]^3*B+q21*f^4*f[y]^3*A*B+2*f^4*B*\
f[y]^3*q42*q21+2*f^4*B*f[y]^3*q43*A-
4*f^4*f[y]^3*q32*q21-2*f^4*f[y]^3*q42*q21-
2*f^4*f[y]^3*q43*A-3*f^4*f[y]^3*q21*A-2*f^\
4*f[y]^3*q21*B-
f^4*f[y]^3*A*B)/(f^4*f[y]^3);d:=expand(d);
```

$$
\begin{aligned}
d := \frac{1}{f^4 f_y^3} \Big(& A^2 f^4 f_y^3 B - \frac{2}{3} f^4 f_y^3 B - f^4 f_y^3 A^2 - f^4 f_y^3 q21^2 \\
& + q21\, f^4 f_y^3 B^2 - f^4 f_y^3 A B + 4\, q21^2 f^4 f_y^3 q32 + \frac{5}{2} q21^2 f^4 \\
& f_y^3 q42 + \frac{3}{2} f^4 A^2 f_y^3 q43 + 3\, q21^2 f^4 f_y^3 A + \frac{5}{2} q21^2 f^4 f_y^3 B \\
& + 3\, q21\, f^4 f_y^3 A^2 + \frac{1}{2} A f^4 f_y^3 B^2 - 4 f^4 f_y^3 q32\, q21 - 2 f^4 \\
& f_y^3 q42\, q21 - 2 f^4 f_y^3 q43\, A - 3 f^4 f_y^3 q21\, A - 2 f^4 f_y^3 q21\, B \\
& + f^4 q43\, f_y^3 q32\, q21 - \frac{1}{3} f^4 f_y^3 + q21\, f^4 f_y^3 A B - \frac{4}{3} f^4 \\
& f_y^3 q21 + \frac{3}{2} A^3 f^4 f_y^3 - \frac{4}{3} f^4 f_y^3 A + \frac{3}{2} q21^3 f^4 f_y^3 \\
& + \frac{5}{2} q21\, f^4 f_y^3 q43\, A + 9 f^4 A f_y^3 q32\, q21 + \frac{3}{2} f^4 A \\
& f_y^3 q42\, q21 + \frac{3}{2} f^4 q32\, q21\, f_y^3 B + 2 f^4 B f_y^3 q42\, q21 + 2 f^4 B \\
& f_y^3 q43\, A \Big)
\end{aligned}
$$

$$d := -\frac{4}{3}\,q21 - \frac{2}{3}\,B - \frac{4}{3}\,A + \frac{3}{2}\,q21^3 - q21^2 - \frac{1}{3} - 2\,q21\,B$$
$$- A\,B - 3\,q21\,A - 4\,q32\,q21 - 2\,q42\,q21 - 2\,q43\,A + A^2\,B$$
$$+ q21\,B^2 + 4\,q21^2\,q32 + \frac{5}{2}\,q21^2\,q42 + \frac{3}{2}\,A^2\,q43$$
$$+ 3\,q21^2\,A + \frac{5}{2}\,q21^2\,B + 3\,q21\,A^2 + \frac{1}{2}\,A\,B^2 - A^2 + \frac{3}{2}\,A^3$$
$$+ q43\,q32\,q21 + q21\,A\,B + \frac{5}{2}\,q21\,q43\,A + 9\,A\,q32\,q21$$
$$+ \frac{3}{2}\,A\,q42\,q21 + \frac{3}{2}\,q32\,q21\,B + 2\,B\,q42\,q21 + 2\,B\,q43\,A$$

```
> e:=((-4/3*f^4*f[y]^3*q21-1/3*f^4*f[y]^3-f^4*f[y\
]^3*q21^2-2/3*f^4*f[y]^3*B-
4/3*f^5*f[y]*f[yy]+3/2*A^3*f^4*f[y]^3-
4/3*f^4*f[y]^3*\
A+3/2*q21^3*f^4*f[y]^3-f^4*f[y]^3*A^2+4*\
q21^2*f^4*f[y]^3*q32+5/2*q21^2*f^4*f[y]^3*q42+9/2*f^5
*A^3*f[y]*f[yy]+3/2*f^4*A^2\
*f[y]^3*q43+3*q21^2*f^4*f[y]^3*A+5/2*q21^2*f^4*f[y]^3
*B+A^2*f^4*f[y]^3*B+3*q21*f\
^4*f[y]^3*A^2+9/2*q21^3*f^5*f[y]*f[yy]+q21*f^4*f[y]^3
*B^2+1/2*A*f^4*f[y]^3*B^2+f\
^5*B^3*f[y]*f[yy]+3*f^5*A*q32*q21*f[y]*f[yy]+3/2*f^5*
q32*q21^2*f[y]*f[yy]+f^5*B*\
f[y]*f[yy]*q42*q21+f^5*B*f[y]*f[yy]*q43*A+1/2*f^5*q42
*q21^2*f[y]*f[yy]+1/2*f^5*q\
43*f[y]*A^2*f[yy]+f^4*q43*f[y]^3*q32*q21+2*q21*f^5*f[
y]*A^2*f[yy]+5/4*q21*f^5*f[\
y]*B^2*f[yy]+5/2*q21*f^4*f[y]^3*q43*A+9*f^4*A*f[y]^3*
q32*q21+3/4*f^5*A*f[y]*B^2*\
f[yy]+3/2*f^4*A*f[y]^3*q42*q21+2*q21^2*f^5*f[yy]*A*f[
y]+5/4*q21^2*f^5*f[yy]*B*f[\
y]+3/4*f^5*A^2*f[yy]*B*f[y]+3/2*f^4*q32*q21*f[y]^3*B+
q21*f^4*f[y]^3*A*B+2*f^4*B*\
f[y]^3*q42*q21+2*f^4*B*f[y]^3*q43*A-
2*f^5*f[y]*A^2*f[yy]-4*f^4*f[y]^3*q32*q21-f^\
5*f[y]*B^2*f[yy]-2*f^4*f[y]^3*q42*q21-
2*f^4*f[y]^3*q43*A-3*f^4*f[y]^3*q21*A-2*f^\
4*f[y]^3*q21*B-f^4*f[y]^3*A*B-4/3*f^5*f[yy]*A*f[y]-
2/3*f^5*f[yy]*B*f[y]-2*f^5*f[\
y]*q21^2*f[yy]-4/3*f^5*f[yy]*q21*f[y])-(-
4/3*f^4*f[y]^3*q21-1/3*f^4*f[y]^3-f^4*f[y\
```

```
]^3*q21^2-2/3*f^4*f[y]^3*B+3/2*A^3*f^4*f[y]^3-
4/3*f^4*f[y]^3*\
A+3/2*q21^3*f^4*f[y]^3-f^4*f[y]^3*A^2+4*\
q21^2*f^4*f[y]^3*q32+5/2*q21^2*f^4*f[y]^3*q42+3/2*f^4
*A^2\
*f[y]^3*q43+3*q21^2*f^4*f[y]^3*A+5/2*q21^2*f^4*f[y]^3
*B+A^2*f^4*f[y]^3*B+3*q21*f\
^4*f[y]^3*A^2+q21*f^4*f[y]^3*B^2+1/2*A*f^4*f[y]^3*B^2
+f^4*q43*f[y]^3*q32*q21+5/2*q21*f^4*f[y]^3*q43*A+9*f^
4*A*f[y]^3*q32*q21+3/2*f^4*A*f[y]^3*q42*q21+3/2*f^4*q
32*q21*f[y]^3*B+q21*f^4*f[y]^3*A*B+2*f^4*B*\
f[y]^3*q42*q21+2*f^4*B*f[y]^3*q43*A-
4*f^4*f[y]^3*q32*q21-2*f^4*f[y]^3*q42*q21-
2*f^4*f[y]^3*q43*A-3*f^4*f[y]^3*q21*A-2*f^\
4*f[y]^3*q21*B-
f^4*f[y]^3*A*B))/(f^5*f[y]*f[yy]);e:=expand(e);
```

$$
\begin{aligned}
e := \frac{1}{f^5 f_y f_{yy}} \Big(& f^5 B^3 f_y f_{yy} + f^5 B f_y f_{yy}\, q43\ A - f^5 f_y B^2 f_{yy} \\
& + \frac{9}{2} f^5 A^3 f_y f_{yy} + \frac{9}{2} q21^3 f^5 f_y f_{yy} - 2 f^5 f_y A^2 f_{yy} \\
& - \frac{4}{3} f^5 f_{yy} A f_y - \frac{2}{3} f^5 f_{yy} B f_y - 2 f^5 f_y\, q21^2 f_{yy} \\
& - \frac{4}{3} f^5 f_{yy}\, q21\, f_y + f^5 B f_y f_{yy}\, q42\ q21 - \frac{4}{3} f^5 f_y f_{yy} \\
& + 3 f^5 A\ q32\ q21\ f_y f_{yy} + \frac{3}{2} f^5\, q32\ q21^2 f_y f_{yy} \\
& + \frac{1}{2} f^5\, q42\ q21^2 f_y f_{yy} + \frac{1}{2} f^5\, q43\, f_y A^2 f_{yy} \\
& + 2\, q21\, f^5 f_y A^2 f_{yy} + \frac{5}{4} q21\, f^5 f_y B^2 f_{yy} + \frac{3}{4} f^5 A f_y B^2 f_{yy} \\
& + 2\, q21^2 f^5 f_{yy} A f_y + \frac{5}{4} q21^2 f^5 f_{yy} B f_y + \frac{3}{4} f^5 A^2 f_{yy} B f_y \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e := & B^3 + B\ q43\ A - B^2 + \frac{9}{2} A^3 + \frac{9}{2} q21^3 - 2 A^2 - \frac{4}{3} A - \frac{2}{3} B \\
& - 2\, q21^2 - \frac{4}{3} q21 + B\, q42\ q21 - \frac{4}{3} + 3 A\, q32\ q21 \\
& + \frac{3}{2} q21^2\, q32 + \frac{1}{2} q21^2\, q42 + \frac{1}{2} A^2\, q43 + 2\, q21\ A^2 \\
& + \frac{5}{4} q21\ B^2 + \frac{3}{4} A\, B^2 + 2\, q21^2 A + \frac{5}{4} q21^2 B + \frac{3}{4} A^2 B
\end{aligned}
$$

```
> g:=(1/6*f^6*B^3*f[yyy]-
1/3*f^6*f[yyy]+1/2*f^6*A^3*f[yyy]+1/2*q21^3*f^6*f[yyy
])/(f^6*f[yyy]);g:=expand(g);
```

$$g := \frac{\frac{1}{6} f^6 B^3 f_{yyy} - \frac{1}{3} f^6 f_{yyy} + \frac{1}{2} f^6 A^3 f_{yyy} + \frac{1}{2} q21^3 f^6 f_{yyy}}{f^6 f_{yyy}}$$

$$g := \frac{1}{6} B^3 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} A^3 + \frac{1}{2} q21^3$$

```
> q32:=7/18+sqrt(73)/18;q42:=19/6-sqrt(73)/2;q43:=-
1/2+sqrt(73)/6;A:=2/3;B:=1;q21:=1/3;a:=B+3*q21-
4+3*A;b:=1/2*B^2+3/2*q21^2-
4/3+3/2*A^2;c:=5/2*q21*B+3/2*A*B+9/2*q21^2+9/2*A^2-
4*A-2*B+B^2+4*q21*A+3*q32*q21+q42*q21-4*q21+q43*A-
4/3;d:=-4/3*q21-2/3*B-4/3*A+3/2*q21^3-q21^2-1/3-
2*q21*B-A*B-3*q21*A-4*q32*q21-2*q42*q21-
2*q43*A+A^2*B+q21*B^2+4*q21^2*q32+5/2*q21^2*q42+3/2*A
^2*q43+3*q21^2*A+5/2*q21^2*B+3*q21*A^2+1/2*A*B^2-
A^2+3/2*A^3+q43*q32*q21+q21*A*B+5/2*q21*q43*A+9*A*q32
*q21+3/2*A*q42*q21+3/2*q32*q21*B+2*B*q42*q21+2*B*q43*
A;e:=B^3+B*q43*A-B^2+9/2*A^3+9/2*q21^3-2*A^2-4/3*A-
2/3*B-2*q21^2-4/3*q21+B*q42*q21-
4/3+3*A*q32*q21+3/2*q21^2*q32+1/2*q21^2*q42+1/2*A^2*q
43+2*q21*A^2+5/4*q21*B^2+3/4*A*B^2+2*q21^2*A+5/4*q21^
2*B+3/4*A^2*B;g:=1/6*B^3-
1/3+1/2*A^3+1/2*q21^3;d:=expand(d);
```

$$q32 := \frac{7}{18} + \frac{1}{18}\sqrt{73}$$

$$q42 := \frac{19}{6} - \frac{1}{2}\sqrt{73}$$

$$q43 := -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{73}$$

$$A := \frac{2}{3}$$

$$B := 1$$

$$q21 := \frac{1}{3}$$

$$a := 0$$

$$b := 0$$

$$c := 0$$

$$d := \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{73}\right)\left(\frac{7}{18} + \frac{1}{18}\sqrt{73}\right) - \frac{1}{81}\sqrt{73} - \frac{13}{81}$$

$$e := 0$$

$$g := 0$$

$$d := 0$$

```
>
eq1:=q32+1/3*q42+2/3*q43=10/9;eq2:=29/18*q32+11/18*q4
2+11/9*q43+1/3*q32*q43=19/9;eq3:=5/6*q32+7/18*q42+8/9
*q43=10/9;
```

$$eq1 := \frac{10}{9} = \frac{10}{9}$$

$$eq2 := \frac{158}{81} - \frac{1}{81}\sqrt{73} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{73}\right)\left(\frac{7}{18} + \frac{1}{18}\sqrt{73}\right) = \frac{19}{9}$$

$$eq3 := \frac{10}{9} = \frac{10}{9}$$

```
> k:=1/3*RootOf(-7*_Z+3*_Z^2-2,label=_L2);
```

$$k := \frac{1}{3}\,RootOf\left(-7\_Z + 3\_Z^2 - 2, label = \_L2\right)$$

```
> l:=20/3-3*(RootOf(-7*_Z+3*_Z^2-2,label=_L2));
```

$$l := \frac{20}{3} - 3\,RootOf\left(-7\_Z + 3\_Z^2 - 2, label = \_L2\right)$$

```
> m:=-5/3+RootOf(-7*_Z+3*_Z^2-2,label=_L2);
```

$$m := -\frac{5}{3} + RootOf\left(-7\_Z + 3\_Z^2 - 2, label = \_L2\right)$$

```
> evalf(k);
```

$$0.863555763$$

```
> evalf(l);
```

$$-1.10533520$$

```
> evalf(m);
```

$$0.92400062$$

```
> allvalues(k);
```

$$\frac{7}{18} + \frac{1}{18}\sqrt{73}, \frac{7}{18} - \frac{1}{18}\sqrt{73}$$

```
> allvalues(l);
```

$$\frac{19}{6} - \frac{1}{2}\sqrt{73}, \frac{19}{6} + \frac{1}{2}\sqrt{73}$$

```
> allvalues(m);
```

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{73}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{73}$$

```
> q31:=2/3-q32;q41:=1-q42-q43;
```

$$q31 := \frac{5}{18} - \frac{1}{18}\sqrt{73}$$

$$q41 := -\frac{5}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{73}$$

LAMPIRAN B

Galat modifikasi RK-4 Kutta

```
>restart;

> galat:=(-1/3*f^4*f[y]^4*q21-1/6*f^4*f[y]^4*B-
1/3*f^6*f[yy]^2*B^2-\
1/3*f^4*f[y]^4*A^2+3/2*f^6*A^4*f[y]*f[yyy]+q21^2*f^6*
f[yy]^2*A^2+5/8*q21^2*f^6*f\
[yy]^2*B^2+3/8*f^6*A^2*f[yy]^2*B^2+9/2*f^4*q32^2*q21^
2*f[y]^4+3*q21^3*f^4*f[y]^4\
*q32+5/2*q21^3*f^4*f[y]^4*q42+2/3*q21*f^6*f[y]*A^3*f[
yyy]+17/2*q21^2*f^5*f[y]^2*\
A*q32*f[yy]+4*q21^3*f^5*f[y]^2*q32*f[yy]+5/12*q21*f^6
*f[y]*B^3*f[yyy]+7/2*q21^2*\
f^5*f[y]^2*B*f[yy]*q42+5/2*q21*f^5*f[y]^2*B*f[yy]*q43
*A+5/2*q21^3*f^5*f[y]^2*q42\
*f[yy]+5/4*q21*f^5*f[y]^2*q43*A^2*f[yy]+5/2*q21^2*f^4
*f[y]^4*q43*q32+27/2*f^5*A^\
2*f[y]^2*q32*q21*f[yy]+1/4*f^6*A*f[y]*B^3*f[yyy]+3/2*
f^5*A*f[y]^2*B*f[yy]*q42*q2\
1+5/2*f^5*A^2*f[y]^2*B*f[yy]*q43+3/4*f^5*A*f[y]^2*q42
*q21^2*f[yy]+3/2*f^5*A^3*f[\
y]^2*q43*f[yy]+3*f^4*A*f[y]^4*q43*q32*q21+9/8*f^6*A^4
*f[yy]^2+9/8*f^6*q21^4*f[yy\
]^2+5/4*q21^2*f^5*f[yy]*q43*A*f[y]^2+3/4*f^5*A^2*f[yy
]*q42*q21*f[y]^2+3/4*f^5*q3\
2*q21*f[y]^2*B^2*f[yy]+3/2*f^4*q32*q21^2*f[y]^4*q42+3
*q21^2*f^5*f[y]^2*A^2*f[yy]\
+7/4*q21^2*f^5*f[y]^2*B^2*f[yy]+5/2*q21^2*f^4*f[y]^4*
q43*A+3*q21*f^5*f[y]^2*A^3*\
f[yy]+6*q21^2*f^4*f[y]^4*A*q32+1/2*q21*f^5*f[y]^2*A*B
^2*f[yy]+q21^2*f^4*f[y]^4*A\
*q42+q21*f^4*f[y]^4*A^2*q43+3/4*q21^3*f^4*f[y]^4*A+3/
4*q21^3*f^4*f[y]^4*B+1/2*q2\
1^2*f^4*f[y]^4*A^2+9/4*q21^4*f^5*f[y]^2*f[yy]+9/4*A^4
*f^5*f[y]^2*f[yy]+A^3*f^4*f\
[y]^4*q43+3/4*q21*f^4*f[y]^4*A^3+2/3*q21^3*f^6*f[yyy]
*A*f[y]+5/12*q21^3*f^6*f[yy\
y]*B*f[y]+1/4*f^6*A^3*f[yyy]*B*f[y]+3/2*f^5*A*q32*q21
*f[y]^2*f[yy]*B+3/4*f^5*q32\
*q21^2*f[y]^2*f[yy]*B+3*q21^3*f^5*f[y]^2*f[yy]*A+5/2*
q21^3*f^5*f[y]^2*f[yy]*B+1/\
2*q21*f^5*f[y]^2*A^2*f[yy]*B+q21^2*f^4*f[y]^4*q32*B+1
/2*f^5*q21^2*f[yy]*A*f[y]^2\
```

```
*B+1/4*q21^2*f^4*f[y]^4*A*B+3/2*q21^4*f^6*f[y]*f[yyy]
-1/3*f^4*f[y]^4*A+1/4*f^6*B\
^4*f[yy]^2+9/2*A^2*f^4*f[y]^4*q32*q21+3/4*A^2*f^5*f[y
]^2*B^2*f[yy]+A^2*f^4*f[y]^\
4*q42*q21+1/2*q21*f^4*f[y]^4*A^2*B+A^3*f^5*f[y]^2*f[y
y]*B+2*A*f^4*f[y]^4*q32*q21\
*B+1/3*f^6*B^4*f[y]*f[yyy]+f^4*q42^2*q21^2*f[y]^4+f^4
*q43^2*A^2*f[y]^4+1/4*q21^2\
*f^4*f[y]^4*B^2+3*f^5*B^2*f[y]^2*f[yy]*q42*q21+3*f^5*
B^2*f[y]^2*f[yy]*q43*A+2*f^\
4*B*f[y]^4*q43*q32*q21+2*f^4*q42*q21*f[y]^4*q43*A+q21
*f^5*f[y]^2*B^3*f[yy]+2*q21\
^2*f^4*f[y]^4*B*q42+2*q21*f^4*f[y]^4*B*q43*A+1/2*A*f^
5*f[y]^2*B^3*f[yy]+A*f^4*f[\
y]^4*B*q42*q21+A^2*f^4*f[y]^4*B*q43+1/2*q32*q21*f^4*f
[y]^4*B^2+1/4*q21*f^4*f[y]^\
4*A*B^2-1/3*q21^2*f^4*f[y]^4-2/3*f^6*f[yy]^2*A^2-
2/3*f^6*f[y]*A^3*f[yyy]-1/3*f^6\
*f[y]*B^3*f[yyy]-3*f^4*f[y]^4*q21^2*q32-
2*f^4*f[y]^4*q21^2*q42-f^5*f[y]^2*A^3*f[\
yy]-f^4*f[y]^4*A^2*q43-f^5*f[y]^2*A^2*f[yy]-
4/3*f^4*f[y]^4*q32*q21-1/3*f^5*f[y]^\
2*B^2*f[yy]-2/3*f^4*f[y]^4*q42*q21-
2/3*f^4*f[y]^4*q43*A-4/3*f^5*f[y]^2*f[yy]*A-2\
/3*f^5*f[y]^2*f[yy]*B-1/3*f^6*f[yyy]*A*f[y]-
1/6*f^6*f[yyy]*B*f[y]-1/2*f^4*f[y]^4\
*q21^2*A-1/2*f^4*f[y]^4*q21^2*B-1/3*f^4*f[y]^4*A*B-
f^4*f[y]^4*q21*A-2/3*f^4*f[y]\
^4*q21*B-4*f^5*f[y]^2*A*q32*q21*f[yy]-
2*f^5*f[y]^2*q32*q21^2*f[yy]-2*f^5*f[y]^2*\
B*f[yy]*q42*q21-2*f^5*f[y]^2*B*f[yy]*q43*A-
f^5*f[y]^2*q42*q21^2*f[yy]-f^5*f[y]^2\
*q43*A^2*f[yy]-2*f^4*f[y]^4*q43*q32*q21-
3/2*f^5*f[y]^2*q21*A^2*f[yy]-f^5*f[y]^2*\
q21*B^2*f[yy]-2*f^4*f[y]^4*q21*q43*A-
2*f^4*f[y]^4*A*q32*q21-1/2*f^5*f[y]^2*A*B^2\
*f[yy]-f^4*f[y]^4*A*q42*q21-
4/3*f^5*f[yy]*q32*q21*f[y]^2-2/3*f^5*f[yy]*q42*q21*f\
[y]^2-2/3*f^5*f[yy]*q43*A*f[y]^2-
3/2*f^5*f[y]^2*q21^2*f[yy]*A-f^5*f[y]^2*q21^2*f\
[yy]*B-1/2*f^5*f[y]^2*A^2*f[yy]*B-
f^4*f[y]^4*q32*q21*B-1/2*f^4*f[y]^4*q21*A^2-2/\
3*f^6*f[y]*q21^3*f[yyy]-f^5*f[y]^2*q21^3*f[yy]-
f^5*f[y]^2*q21^2*f[yy]-1/3*f^6*f[\
yyy]*q21*f[y]-4/3*f^5*f[y]^2*f[yy]*q21-
1/2*f^4*f[y]^4*q21*A*B-f^5*f[yy]*q21*f[y]\
```

```
^2*A-2/3*f^5*f[yy]*q21*f[y]^2*B-
1/3*f^5*f[yy]*A*f[y]^2*B-2/3*f^6*f[yy]^2*q21^2)*\
h^5;galat:=expand(galat);galat:=collect(galat,h);
```

$$galat := \left(\frac{1}{9} f^4 \left(\frac{19}{6} - \frac{1}{2}\sqrt{73}\right)^2 f_y^4 + \frac{4}{9} f^4 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{73}\right)^2 f_y^4 + \frac{17}{243} f^6 f_y f_{yyy} + \frac{7}{18} f^4 f_y^4 \left(\frac{7}{18} + \frac{1}{18}\sqrt{73}\right) - \frac{131}{54} f^5 f_y^2 f_{yy} - \frac{106}{81} f^4 f_y^4 + \frac{11}{162} f^6 f_{yy}^2 + \frac{1}{2} f^4 \left(\frac{7}{18} + \frac{1}{18}\sqrt{73}\right)^2 f_y^4 + \frac{5}{54} f^4 f_y^4 \left(\frac{19}{6} - \frac{1}{2}\sqrt{73}\right) + \frac{5}{27} f^4 f_y^4 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{73}\right) + \frac{13}{6} f^5 f_y^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{73}\right) f_{yy} + \frac{53}{54} f^5 f_y^2 \left(\frac{19}{6} - \frac{1}{2}\sqrt{73}\right) f_{yy} + \frac{17}{9} f^5 f_y^2 \left(\frac{7}{18} + \frac{1}{18}\sqrt{73}\right) f_{yy} + \frac{17}{18} f^4 f_y^4 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{73}\right)\left(\frac{7}{18} + \frac{1}{18}\sqrt{73}\right) + \frac{1}{6} f^4 \left(\frac{7}{18} + \frac{1}{18}\sqrt{73}\right) f_y^4 \left(\frac{19}{6} - \frac{1}{2}\sqrt{73}\right) + \frac{4}{9} f^4 \left(\frac{19}{6} - \frac{1}{2}\sqrt{73}\right) f_y^4 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{73}\right)\right) h^5$$

$$galat := \frac{17}{243} h^5 f^6 f_y f_{yyy} + \frac{1}{3} h^5 f^5 f_y^2 f_{yy} + \frac{73}{243} h^5 f^4 f_y^4 + \frac{11}{162} h^5 f^6 f_{yy}^2 - \frac{5}{243} h^5 f^4 f_y^4 \sqrt{73} - \frac{2}{81} h^5 f^5 f_y^2 f_{yy} \sqrt{73}$$

$$galat := \left(\frac{17}{243} f^6 f_y f_{yyy} + \frac{1}{3} f^5 f_y^2 f_{yy} + \frac{73}{243} f^4 f_y^4 + \frac{11}{162} f^6 f_{yy}^2 - \frac{5}{243} f^4 f_y^4 \sqrt{73} - \frac{2}{81} f^5 f_y^2 f_{yy} \sqrt{73}\right) h^5$$

LAMPIRAN C

Simulasi Numerik

Berikut ini adalah perbandingan Galat untuk Metode RK-4 Kutta sebelum dan setelah di modifikasi dengan menggunakan Rata-rata Kontra Harmonik, untuk kasus $y' = y, y(0) = 1$ dan $h = 0.01$ pada selang [0.1].

x	Eksak	RK-4 Kutta		modifikasi RK-4 Kutta	
		y	Galat	y	Galat
0.00	1.00000000	1.00000000	0.00000000E+00	1.00000000	0.00000000E+00
0.01	1.01005017	1.00880050	1.24966583E-03	1.01000611	4.40578649E-05
0.02	1.02020134	1.01770402	2.49731989E-03	1.02002834	1.73004440E-04
0.03	1.03045453	1.02671360	3.74093169E-03	1.03007237	3.82162610E-04
0.04	1.04081077	1.03583232	4.97844993E-03	1.04014371	6.67064277E-04
0.05	1.05127110	1.04506329	6.20780211E-03	1.05024766	1.02343954E-03
0.06	1.06183655	1.05440965	7.42689415E-03	1.06038934	1.44720618E-03
0.07	1.07250818	1.06387457	8.63360998E-03	1.07057372	1.93445949E-03
0.08	1.08328707	1.07346126	9.82581114E-03	1.08080561	2.48146238E-03
0.09	1.09417428	1.08317295	1.10013364E-02	1.09108965	3.08463588E-03
0.10	1.10517092	1.09301292	1.21580014E-02	1.10143037	3.74054989E-03
0.11	1.11627807	1.10298447	1.32935982E-02	1.11183216	4.44591431E-03
0.12	1.12749685	1.11309096	1.44058948E-02	1.12229928	5.19757053E-03
0.13	1.13882838	1.12333575	1.54926350E-02	1.13283590	5.99248313E-03
0.14	1.15027380	1.13372226	1.65515379E-02	1.14344607	6.82773203E-03
0.15	1.16183424	1.14425395	1.75802974E-02	1.15413374	7.70050491E-03
0.16	1.17351087	1.15493429	1.85765819E-02	1.16490278	8.60808990E-03
0.17	1.18530485	1.16576682	1.95380340E-02	1.17575698	9.54786872E-03
0.18	1.19721736	1.17675509	2.04622699E-02	1.18670005	1.05173099E-02
0.19	1.20924960	1.18790272	2.13468793E-02	1.19773563	1.15139627E-02
0.20	1.22140276	1.19921333	2.21894248E-02	1.20886731	1.25354508E-02
0.21	1.23367806	1.21069062	2.29874416E-02	1.22009859	1.35794665E-02
0.22	1.24607673	1.22233829	2.37384371E-02	1.23143296	1.46437657E-02

0.23	1.25860001	1.23416012	2.44398906E-02	1.24287385	1.57261622E-02
0.24	1.27124915	1.24615990	2.50892527E-02	1.25442463	1.68245231E-02
0.25	1.28402542	1.25834147	2.56839453E-02	1.26608865	1.79367640E-02
0.26	1.29693009	1.27070873	2.62213609E-02	1.27786924	1.90608446E-02
0.27	1.30996445	1.28326559	2.66988624E-02	1.28976969	2.01947643E-02
0.28	1.32312981	1.29601603	2.71137825E-02	1.30179325	2.13365589E-02
0.29	1.33642749	1.30896406	2.74634237E-02	1.31394319	2.24842962E-02
0.30	1.34985881	1.32211375	2.77450576E-02	1.32622273	2.36360727E-02
0.31	1.36342511	1.33546919	2.79559248E-02	1.33863510	2.47900105E-02
0.32	1.37712776	1.34903453	2.80932342E-02	1.35118351	2.59442540E-02
0.33	1.39096813	1.36281397	2.81541631E-02	1.36387116	2.70969669E-02
0.34	1.40494759	1.37681173	2.81358563E-02	1.37670126	2.82463298E-02
0.35	1.41906755	1.39103212	2.80354262E-02	1.38967701	2.93905373E-02
0.36	1.43332941	1.40547946	2.78499522E-02	1.40280162	3.05277956E-02
0.37	1.44773461	1.42015813	2.75764803E-02	1.41607829	3.16563206E-02
0.38	1.46228459	1.43507257	2.72120229E-02	1.42951025	3.27743353E-02
0.39	1.47698079	1.45022724	2.67535585E-02	1.44310073	3.38800683E-02
0.40	1.49182470	1.46562667	2.61980310E-02	1.45685295	3.49717515E-02
0.41	1.50681779	1.48127544	2.55423497E-02	1.47077017	3.60476188E-02
0.42	1.52196156	1.49717817	2.47833888E-02	1.48485565	3.71059042E-02
0.43	1.53725752	1.51333954	2.39179871E-02	1.49911268	3.81448405E-02
0.44	1.55270722	1.52976427	2.29429476E-02	1.51354456	3.91626575E-02
0.45	1.56831219	1.54645715	2.18550371E-02	1.52815460	4.01575814E-02
0.46	1.58407398	1.56342300	2.06509859E-02	1.54294615	4.11278328E-02
0.47	1.59999419	1.58066671	1.93274878E-02	1.55792257	4.20716262E-02
0.48	1.61607440	1.59819320	1.78811990E-02	1.57308723	4.29871684E-02
0.49	1.63231622	1.61600748	1.63087385E-02	1.58844356	4.38726581E-02
0.50	1.64872127	1.63411458	1.46066874E-02	1.60399499	4.47262844E-02
0.51	1.66529119	1.65251961	1.27715885E-02	1.61974497	4.55462261E-02
0.52	1.68202765	1.67122770	1.07999462E-02	1.63569700	4.63306513E-02
0.53	1.69893231	1.69024408	8.68822615E-03	1.65185459	4.70777159E-02
0.54	1.71600686	1.70957401	6.43285458E-03	1.66822130	4.77855636E-02

0.55	1.73325302	1.72922280	4.03021839E-03	1.68480069	4.84523246E-02
0.56	1.75067250	1.74919584	1.47666456E-03	1.70159638	4.90761155E-02
0.57	1.76826705	1.76949855	-1.23150005E-03	1.71861201	4.96550385E-02
0.58	1.78603843	1.79013644	-4.09800912E-03	1.73585125	5.01871805E-02
0.59	1.80398842	1.81111505	-7.12663710E-03	1.75331780	5.06706130E-02
0.60	1.82211880	1.83244000	-1.03211996E-02	1.77101541	5.11033916E-02
0.61	1.84043140	1.85411695	-1.36855537E-02	1.78894784	5.14835552E-02
0.62	1.85892804	1.87615164	-1.72235983E-02	1.80711892	5.18091255E-02
0.63	1.87761058	1.89854985	-2.09392742E-02	1.82553247	5.20781069E-02
0.64	1.89648088	1.92131744	-2.48365650E-02	1.84419239	5.22884860E-02
0.65	1.91554083	1.94446033	-2.89194965E-02	1.86310260	5.24382307E-02
0.66	1.93479233	1.96798447	-3.31921380E-02	1.88226704	5.25252903E-02
0.67	1.95423732	1.99189592	-3.76586019E-02	1.90168973	5.25475950E-02
0.68	1.97387773	2.01620078	-4.23230443E-02	1.92137468	5.25030553E-02
0.69	1.99371553	2.04090520	-4.71896653E-02	1.94132597	5.23895617E-02
0.70	2.01375271	2.06601542	-5.22627092E-02	1.96154772	5.22049845E-02
0.71	2.03399126	2.09153772	-5.75464649E-02	1.98204409	5.19471730E-02
0.72	2.05443321	2.11747848	-6.30452662E-02	2.00281925	5.16139557E-02
0.73	2.07508061	2.14384410	-6.87634919E-02	2.02387747	5.12031393E-02
0.74	2.09593551	2.17064108	-7.47055664E-02	2.04522301	5.07125089E-02
0.75	2.11700002	2.19787598	-8.08759599E-02	2.06686019	5.01398271E-02
0.76	2.13827622	2.22555541	-8.72791886E-02	2.08879339	4.94828341E-02
0.77	2.15976625	2.25368607	-9.39198148E-02	2.11102701	4.87392470E-02
0.78	2.18147227	2.28227471	-1.00802448E-01	2.13356551	4.79067593E-02
0.79	2.20339643	2.31132817	-1.07931743E-01	2.15641339	4.69830412E-02
0.80	2.22554093	2.34085333	-1.15312405E-01	2.17957519	4.59657383E-02
0.81	2.24790799	2.37085717	-1.22949183E-01	2.20305551	4.48524719E-02
0.82	2.27049984	2.40134671	-1.30846876E-01	2.22685900	4.36408384E-02
0.83	2.29331874	2.43232907	-1.39010330E-01	2.25099033	4.23284087E-02
0.84	2.31636698	2.46381142	-1.47444441E-01	2.27545425	4.09127282E-02
0.85	2.33964685	2.49580100	-1.56154151E-01	2.30025554	3.93913158E-02
0.86	2.36316069	2.52830515	-1.65144452E-01	2.32539903	3.77616643E-02

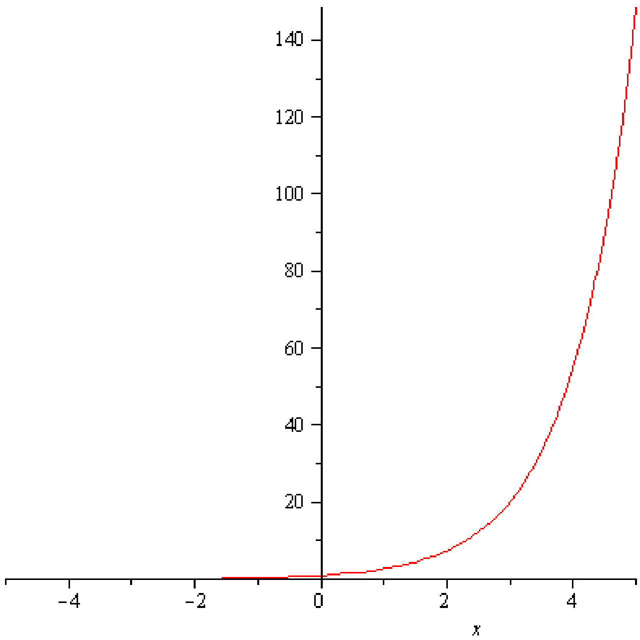
0.87	2.38691085	2.56133124	-1.74420386E-01	2.35088961	3.60212393E-02
0.88	2.41089971	2.59488675	-1.83987043E-01	2.37673223	3.41674790E-02
0.89	2.43512965	2.62897922	-1.93849564E-01	2.40293186	3.21977939E-02
0.90	2.45960311	2.66361625	-2.04013139E-01	2.42949354	3.01095663E-02
0.91	2.48432253	2.69880554	-2.14483007E-01	2.45642238	2.79001498E-02
0.92	2.50929039	2.73455485	-2.25264460E-01	2.48372352	2.55668689E-02
0.93	2.53450918	2.77087202	-2.36362839E-01	2.51140216	2.31070186E-02
0.94	2.55998142	2.80776495	-2.47783536E-01	2.53946355	2.05178638E-02
0.95	2.58570966	2.84524165	-2.59531994E-01	2.56791302	1.77966392E-02
0.96	2.61169647	2.88331018	-2.71613709E-01	2.59675592	1.49405485E-02
0.97	2.63794446	2.92197869	-2.84034226E-01	2.62599770	1.19467640E-02
0.98	2.66445624	2.96125539	-2.96799145E-01	2.65564382	8.81242634E-03
0.99	2.69123447	3.00114859	-3.09914114E-01	2.68569983	5.53464372E-03
1.00	2.71828183	3.04166667	-3.23384838E-01	2.71617134	2.11049171E-03

> $restart;$

> $f(x) := \exp(x);$

$$f := x \rightarrow e^{x}$$

> $plot(f(x), x = -5..5);$



> $f(x) := \exp(-x);$

$$f := x \rightarrow e^{-x}$$

> $plot(f(x), x = -5..5);$