MENENTUKAN NILPOTENT ORDE 4 PADA MATRIKS SINGULAR MENGGUNAKAN TEOREMA CAYLEY HAMILTON

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh:

IRMA FIANI

10654004477

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2011

MENENTUKAN NILPOTENT ORDE 4 PADA MATRIKS SINGULAR MENGGUNAKAN TEOREMA CAYLEY HAMILTON

IRMA FIANI
NIM:10654004477

Tanggal Sidang: 31 Januari 2011
Periode Wisuda: Februari 2011

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas bagaimana membentuk nilpotent orde 4 pada matriks singular menggunakan teorema Cayley Hamilton. Nilpotent adalah matriks khusus yang apabila matriks tersebut dipangkatkan dengan bilangan bulat positif maka akan menghasilkan matriks nol. Teorema Cayley Hamilton yaitu Setiap matriks A adalah akar dari polinomial karakteristiknya.

$$C(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_1A + a_0I = 0.$$

Berdasarkan hasil penelitian, maka diperoleh nilpotent dari matriks singgular yaitu matriks nol.

Kata kunci*: Matriks nol, Nilpotent, Teorema Cayley Hamilton.*

DETERMINE NILPOTENT ORDER FOURTH OF SINGULAR MATRIX USING THE CAYLEY HAMILTON THEOREM

IRMA FIANI
NIM:10654004477

Date of Final Exam : January 31th 2011
Graduation Ceremony Periode : February 2011

Department of Mathematic
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
HR. Soebrantas Street No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

This final assignment discuss how to determine nilpotent order of singular matrix using the Cayley Hamilton theorem. Nilpotent is a special matrix when the matrix is raised to positive integer then it will produce zero matrix. Cayley Hamilton theorem that every matrix A is the root of the characteristic polynomial.

$$C(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_1A + a_0I = 0.$$

Based on the result, then provided that the matrix is singular that to produces zero matrix.

***Keywords**: Cayley Hamilton Theorem, Nilpotent, Zero Matrix.*

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Informasi dalam bidang sains dan matematika kadang-kadang ditampilkan dalam bentuk baris-baris dan kolom-kolom yang membentuk jajaran persegi atau persegi panjang yang disebut matriks. Matriks seringkali merupakan tabel-tabel data numerik yang diperoleh melalui pengamatan fisik, tetapi dapat juga muncul dalam berbagai konteks matematika yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier. Matriks juga dapat dilihat sebagai suatu objek matematis yang memiliki beragam teori yang penting, salah satunya adalah membahas tentang nilpotent suatu matriks.

Nilpotent adalah suatu matriks khusus yang dapat ditemukan pada matriks segitiga atas *stricly.* Suatu matriks segitiga atas $n \times n$ dapat ditemukan nilpotent orde n , artinya apabila matriks segitiga atas $n \times n$ dipangkatkan dengan n maka akan diperoleh matriks $n \times n$ dengan semua elemen-elemen nol. Dengan demikian diketahui bahwa setiap matriks nilpotent determinannya sama dengan nol. Hal ini tidak berarti bahwa setiap matriks yang determinanya nol adalah nilpotent.

Nilpotent suatu matriks dapat dilihat pada matriks segitiga atas *stricly*, sebaliknya muncul kesulitan untuk mendapatkan nilpotent pada matriks yang bukan matriks segitiga atas *stricly.* Kesulitan ini terjadi karena nilpotent pada matriks yang bukan segitiga atas *stricly* tidak memperlihatkan bentuk dan kriteria yang jelas. Sehingga untuk mengatasinya dicari nilpotent dengan cara mengkontruksinya dengan menggunakan Teorema Cayley Hamilton, nilpotent orde 3 pada matriks 3×3 telah diteliti oleh Nispu Ramadani pada tahun 2008. Oleh karena itu penulis tertarik melakukan penelitian dengan judul **”Menentukan Nilpotent Orde 4 pada Matriks Singular Menggunakan Teorema Cayley Hamilton”.**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang maka dapat dirumuskan bahwa yang menjadi masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan nilpotent orde 4 pada matriks singular dengan menggunakan metode Cayley Hamilton.

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan latar belakang penulis membatasi masalah yaitu matriks yang digunakan pada penelitian ini adalah matriks singular dengan kolom pertama mempunyai elemen $(1,0,0,0)$.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penelitian ini adalah menentukan nilpotent orde 4 pada matriks singular menggunakan teorema Cayley Hamilton.

1.5 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan dalam tugas akhir ini terdiri dari 5 bab yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini memuat latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulisan dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisi tentang materi penunjang yang memuat teori dasar yang terkait dengan penelitian yang akan dibahas seperti materi tentang transformasi baris elementer pada baris dan kolom, matriks segitiga atas, matriks segitiga atas *stricly*, determinan, ekspansi kofaktor, aturan crammer, nilai eigen dan polinomial karakteristik.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisi tentang langkah-langkah dalam menganalisa dan memperoleh hasil dalam penelitian.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini berisi tentang pembahasan dalam menentukan nilpotent orde 4 pada matriks singular menggunakan teorema Cayley Hamilton.

BAB V PENUTUP

Bab ini merupakan penutup yang berisi kesimpulan dan saran.

BAB II
LANDASAN TEORI

Landasan teori yang digunakan sebagai materi pendukung untuk menyelesaikan permasalahan yang dibahas dalam Bab IV adalah transformasi elementer pada baris dan kolom, matriks segitiga atas, matriks segitiga atas *Stricly*, determinan, ekspansi kofaktor, aturan cramer, nilai eigen dan polinomial karakteristik,.

2.1 Transformasi Elementer pada Baris dan Kolom

Defenisi 2.1 (Yusuf Yahya, dkk) Transformasi elementer pada baris atau kolom suatu matriks A adalah sebagai berikut:

a. Penukaran tempat baris ke i dan baris ke j (baris ke i dijadikan baris ke j dan baris ke j dijadikan baris ke i) ditulis $H_{ij}(A)$.
b. Penukaran tempat kolom ke i dan kolom ke j (kolom ke i dijadikan kolom ke j dan kolom ke j dijadikan kolom ke i) ditulis $K_{ij}(A)$.
c. Memperkalikan baris ke i dengan skalar $\lambda \neq 0$ ditulis $H_i{}^{\lambda}(A)$.
d. Memperkalikan kolom ke i dengan skalar $\lambda \neq 0$ ditulis $K_i{}^{\lambda}(A)$.
e. Menambahkan baris ke i dengan λ kali baris ke j, ditulis $H_{ij}{}^{\lambda}(A)$.
f. Menambahkan kolom ke i dengan λ kali kolom ke j, ditulis $K_{ij}{}^{\lambda}(A)$.

2.2 Matriks Segitiga Atas

Definisi 2.2 (Howard Anton, 2004) Matriks segitiga atas yaitu matriks yang seluruh entri dibawah diagonal utamanya sama dengan nol, yaitu jika $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$.

2.3 Matriks Segitiga Atas *Stricly*

Definisi 2.3 (PB Bhattacharya dkk) Matriks bujur sangkar A dikatakan segitiga atas *strictly*, jika $a_{ij} = 0$ untuk semua $i \leq j$.

Contoh Matriks Segitiga Atas *Stricly*

Contoh 2.1

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema 2.1 (Seymour, 2004) Jika A adalah matriks segitiga atas maka det A adalah hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama.

Bukti:

Diberikan matriks segitiga atas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan ekspansi kofaktor pada baris pertama maka

$$\begin{aligned} det\ (A) &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23.}0) - a_{12}(0.a_{33} - a_{23}.0) + a_{13}(0.0 - a_{22}.0) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} \end{aligned}$$

Jadi

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}\ \blacksquare$$

Teorema 2.2 (Howard Anton, 2004): Jika A dan B adalah masing-masing matriks segitiga atas maka *det* (AB) = *det* (A).*det* (B)

Bukti:

Ambil A dan B adalah masing-masing matriks 4×4 yaitu sebagai berikut:

Jika

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

dan

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{bmatrix}$$

Maka berdasarkan teorema (2.2) diperoleh

$$det(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

dan

$$det\ (B) \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{bmatrix} = b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}$$

Maka diperoleh

$$\begin{aligned} det\ (A).\ det\ (B) &= (a_{11}a_{22}a_{33}a_{44})(b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}) \\ &= (a_{11}b_{11})(a_{22}b_{22})(a_{33}b_{33})(a_{44}b_{44}). \end{aligned}$$

Sedangkan

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{24} + a_{13}b_{34} + a_{14}b_{44} \\ 0 & a_{22}b_{22} & a_{12}b_{23} + a_{23}b_{33} & a_{22}b_{24} + a_{23}b_{34} + a_{24}b_{44} \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} & a_{33}b_{34} + a_{34}b_{44} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}b_{44} \end{bmatrix}$$

Karena AB adalah matriks segitiga atas, maka berdasar teorema 2.2 diperoleh

$$det\ (AB) = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} & a_{11}b_{11} + a_{12}b_{24} + a_{13}b_{34} + a_{14}b_{44} \\ 0 & a_{22}b_{22} & a_{12}b_{23} + a_{23}b_{33} & a_{22}b_{24} + a_{23}b_{34} + a_{24}b_{44} \\ 0 & 0 & a_{33}b_{33} & a_{33}b_{34} + a_{34}b_{44} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44}b_{44} \end{vmatrix}$$

$$det\ (AB) = (a_{11}b_{11})(a_{22}b_{22})(a_{33}b_{33})(a_{44}b_{44}).$$

Maka berdasarkan bukti didapatlah

$$det\ (AB) = det\ (A).det\ (B)\ \blacksquare$$

2.4 Determinan

Definisi 2.4 (Yusuf Yahya, dkk) Determinant dari matriks bujur sangkar A berordo n adalah jumlah dari semua $n!$ hasil kali bertanda dari elemen-elemen matriks A tersebut. Determinan dari sebuah matriks biasa diberi notasi $\det(A)$ atau $|A|$ yang dirumuskan dengan $det\ (A) = \sum A_{1j}A_{2j} \ldots A_{nj}$.

2.5 Ekspansi Kofaktor

Definisi 2.5 (Howard Anton, 2004) Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar maka minor anggota a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefenisikan sebagai determinan submatriks yang masih tersisa setelah baris ke i dan kolom ke j dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan oleh C dan disebut kofaktor anggota a_{ij}.

Contoh 2.2: Jika diketahui matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Maka determinan A dapat dicari dengan penurunan orde sebuah determinan dengan langkah:

1. Pilihlah elemen $a_{ij} = 1$ atau jika tidak ada $a_{ij} \neq 0$
2. Dengan menggunakan a_{ij} sebagai pivot, lakukan operasi baris (kolom) elementer sehingga diperoleh nol disemua posisi selain posisi kolom (baris) yang mengandung a_{ij}.
3. Ekspansilah determinan dengan kolom (baris) yang mengandung a_{ij}.

dengan demikian

$$det\, A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$det\, A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} b_1 - 4b_2 \\ \\ b_3 - 7b_2 \\ b_4 - 3b_2 \end{array} \end{array} = 0$$

$$det\, A = \begin{bmatrix} -21 & 0 & -7 & -10 \\ 6 & 1 & 3 & 3 \\ -38 & 0 & -13 & -12 \\ -16 & 0 & -4 & -10 \end{bmatrix} = 0$$

Maka dengan mengekspansi determinannya menggunakan kolom kedua, abaikan seluruh suku yang mengandung 0. Dan tanda minor $M_{22} = (-1)^{2+2} = 1$

Sehingga

$$det\,(A) = \begin{vmatrix} -21 & -7 & -10 \\ -38 & -13 & -12 \\ -16 & -4 & -10 \end{vmatrix}$$

dengan menggunakan metode gaussian maka:

$$det(A) = (-2730 - 1344 - 1520 + 2080 + 1008 + 2660) = 154$$

Jadi

$$det\,(A) = 154.$$

Teorema 2.3 (Howard Anton, 2004) Jika A adalah matriks $n \times n$ maka berlaku $A\, Adj(A) = det(A)\, I$, dengan I adalah matriks identitas.

Bukti:

Diberikan matriks $A = (a_{ij})$ dengan $i, j = 1,2, \dots, n$

Maka $Adj(A) = (C_{ij})^T = (C_{ij})$ dengan $i, j = 1,2, \dots, n$

dengan $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

Oleh karena itu diperoleh

$$AAdj(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}^T$$

$$AAdj(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}C_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}C_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}C_{kn} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}C_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}C_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}C_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}C_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}C_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}C_{kn} \end{bmatrix}$$

Dari persamaan maka diperoleh

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{kj} = det\, A, \text{ jika } i = j$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{kj} = 0 \text{ jika } i \neq j$$

Dengan demikian diperoleh:

$$A\,Adj(A) = \begin{bmatrix} det\, A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & det\, A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & det\, A \end{bmatrix}$$

$$= det\, A \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$A\,Adj(A) = det\, AI$$

Menurut (James Gere, 1987) sifat-sifat determinan adalah sebagai berikut:

1. Jika dua baris atau kolom dari suatu determinan dipertukarkan, maka nilai nilai determinannya akan berganti tanda.
2. Determinan dari suatu matriks bujur sangkar sama dengan determinan dari transposnya.

3. Jika semua elemen dari salah satu baris atau kolom suatu determinan dikalikan dengan skalar λ, maka nilai determinannya akan berlipat λ juga. Jika semua elemen sebanyak j baris atau kolom suatu determinan dikalikan λ, maka nilai determinannya akan berlipat λ^j.
4. Jika matriks bujur sangkar berordo n dikalikan skalar λ, maka determinanya akan berlipat λ^n.
5. Jika dua matriks bujur sangkar yang berordo sama diperkalikan, maka determinan hasil kalinya sama dengan hasil determinan-deteminannya.
6. Jika hasil dua atau lebih matriks bujur sangkar adalah matriks nol,maka paling sedikit satu diantara matriks-matriks itu singular (determinannya sama dengan nol).
7. Jika matriks persegi panjang berordo $m \times n$ dikalikan dengan matriks persegi panjang berordo $n \times m$ dan jika $m > n$, maka hasil kali matriks adalah suatu matriks singular yang berordo m.
8. Determinan suatu matriks diagonal atau matriks segitiga adalah sama dengan hasil kali elemen-elemen diagonal utamanya.

2.6 Aturan Cramer

Teorema 2.4 (Howard Anton, 2004) Jika $Ax = b$ merupakan suatu sistem n persamaan linear dalam n peubah sedemikian sehingga$(A) \neq 0$, maka sistem tersebut mempunyai suatu penyelesaian yang unik, penyelesaian ini adalah

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det\ (A)}$$

$$x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)}$$

$$x_3 = \frac{det\ (A_{3)}}{det\ (A)}$$

dengan A_j adalah matriks yang diperoleh dengan mengantikan anggota-anggota pada kolom ke j dari A dengan anggota-anggota pada matriks

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Bukti: Jika$(A) \neq 0$, maka A bisa dibalik $x = A^{-1}b$ adalah penyelesaian unik dari $Ax = b$ oleh karena itu menurut teorema 2.4 diperoleh

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{det(A)} Adj(A)b$$

$$= \frac{1}{det\ (A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Jika matriks-matriks tersebut dikalikan maka akan diperoleh

$$x = \frac{1}{det\ (A)} \begin{bmatrix} b_1C_{11} & + & b_2C_{21} & + & \dots & + & b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} & + & b_2C_{22} & + & \dots & + & b_nC_{n2} \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ b_1C_{1n} & + & b_2C_{2n} & + & \dots & + & b_nC_{nn} \end{bmatrix}$$

oleh karena itu anggota ke j dari x adalah

$$x_j = \frac{b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots + b_nC_{nj}}{det(A)} \qquad (2.1)$$

dengan menganggap

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{3j-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Karena A_j berbeda dengan A hanya pada kolom ke j nya, maka kofaktor dari anggota-anggota $b_1, b_2, \dots, b_n$ dalam A_j adalah sama dengan kofaktor dari anggota anggota yang berpadanan dalam kolom ke j dari A. Dengan demikian perluasan kofaktor dari det (A_j) disepanjang kolom ke j adalah

$$det(A_j) = b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \cdots b_nC_{nj}$$

Dengan mensubtitusikan hasil kedalam persamaan (2.1) maka diperoleh

$$x_j = \frac{det(A_j)}{det\ (A)} \qquad \blacksquare$$

Contoh 2.3: Gunakanlah aturan cramer untuk menyelesaikan sistem persamaan linear berikut:

$$x_1 + 2x_3 = 6$$
$$-3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30$$
$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8$$

Penyelesaian:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian untuk memperoleh x_1, x_2, x_3 diperoleh dengan cara

$$x_1 = \frac{det\ (A_1)}{det\ (A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}$$

$$x_2 = \frac{det\ (A_2)}{det\ (A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}$$

$$x_3 = \frac{det(A_3)}{det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

2.7 Nilai Eigen dan Polinomial Karakteristik

Definisi 2.7 (Howard Anton, 1987) Jika A adalah matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$, maka vektor taknol x di dalam R^n dinamakan vektor eigen (*eigenvector*) dari *A* jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yakni

$$Ax = \lambda x \qquad (2.2)$$

untuk suatu scalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigenvalue*) dari *A* dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian λ.

Untuk menentukan nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$, maka dapat ditulis kembali persamaan (2.2) sebagai:

$$Ax = \lambda I x$$

$$(\lambda I - A)x = 0 \qquad (2.3)$$

Sistem persamaan linier homogen (2.3) mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika

$$det(\lambda I - A) = 0 \qquad (2.4)$$

Persamaan (2.4) merupakan suatu polinomial dalam variabel λ. Suku berderajat tertinggi dalam λ berasal dari hasil kali unsur-unsur diagonalnya sehingga polinomial ini berderajat n dengan koefisien λ^n dan dinotasikan dengan $C(\lambda)$.

$$C(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n = 0 \qquad (2.5)$$

Persamaan (2.4) disebut persamaan karakteristik dan

$C(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$ disebut polinomial karakteristik untuk matriks A.

Sehingga $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ merupakan penyelesaian dari persamaan (2.5), atau dapat juga ditulis menjadi

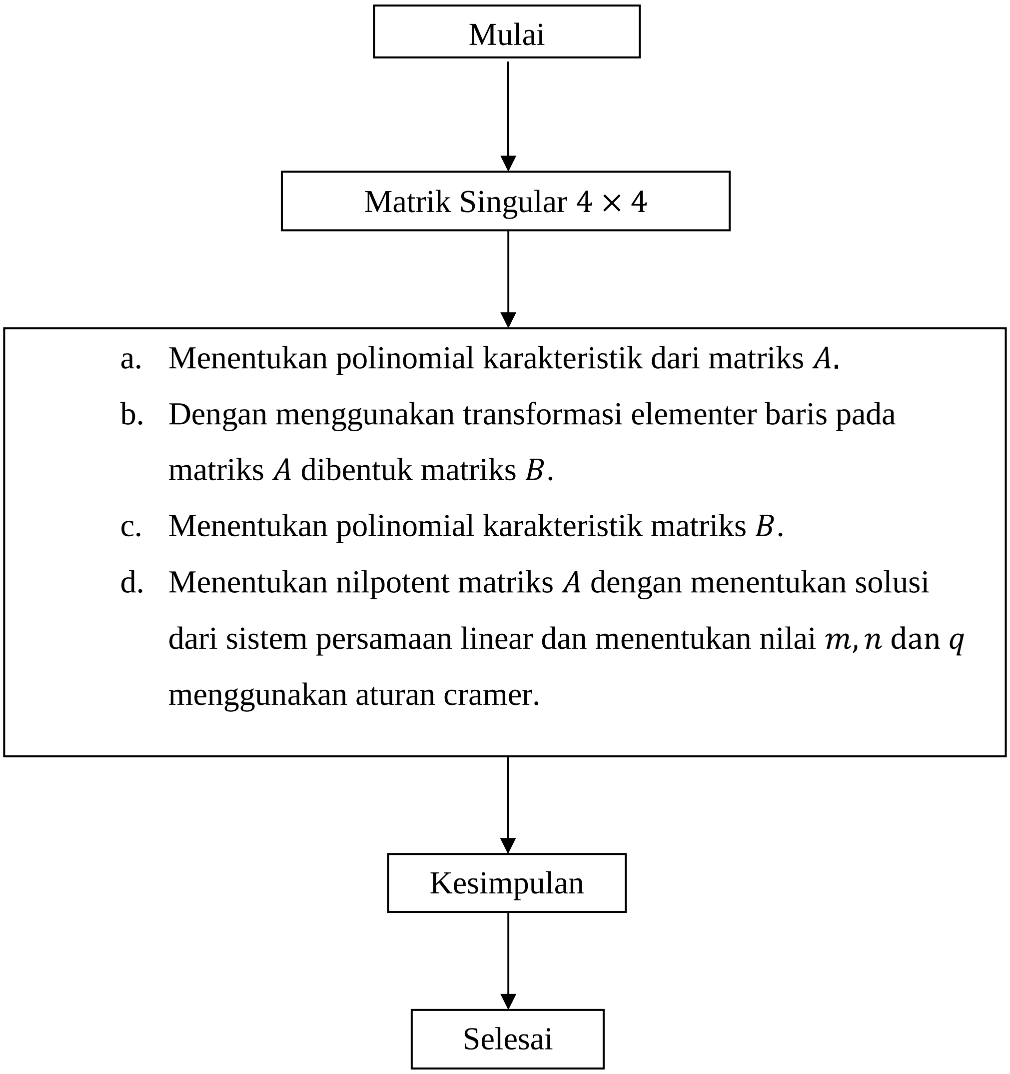
$$C(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \qquad (2.6)$$

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Metodologi penelitian yang penulis gunakan dalam skipsi ini adalah studi literatur yang mana dalam penelitian ini ada beberapa langkah dalam mengkontruksi nilpotent orde 4 pada matriks singular dengan menggunakan teorema Cayley Hamilton yaitu:

1. Ambil A adalah matriks singular 4×4.
2. Menentukan polinomial karakteristik dari matriks A.
3. Dengan menggunakan transformasi elementer baris pada matriks A dibentuk matriks B.
4. Menentukan polinomial karakteristik matriks B.
5. Menentukan nilpotent matriks A dengan menentukan solusi dari sistem persamaan linear dan menentukan nilai m, n dan q menggunakan aturan crammer.
6. Analisa dan kesimpulan.

Digambarkan dalam *flowchart* dibawah ini:



BAB IV
ANALISA DAN PEMBAHASAN

Pembahasan skripsi pada Bab IV ini akan membahas mengenai pengertian nilpotent pada suatu matriks dan akan diuraikan beberapa teorema beserta cara menkontruksi nilpotent orde 4 pada matriks singular dengan menggunakan teorema Cayley Hamilton.

4.1 Nilpotent

Definisi 4.1. (Seymour Lipschutz, 2004): Matriks bujur sangkar A disebut nilpotent jika $A^n = 0$ untuk suatu bilangan bulat positif n, dengan nol adalah matriks nol.

Contoh nilpotent:

1.Diberikan matriks 4×4 yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.Diberikan matriks 3×3 yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema 4.1 Cayley Hamilton. (Seymour dan Marc Lipson, 2004): Setiap matriks A adalah akar dari polinomial karakteristiknya.

Bukti:

Misalkan A adalah matriks $n \times n$, Jika A mempunyai polinomial karakteristik,

$$C(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

Maka berlaku

$$C(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_1A + a_0I = 0.$$

Berdasarkan matriks A diperoleh polinomial karakteristik

$$C(\lambda) = det(\lambda I - A) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n.$$

Misalkan

$$E(\lambda) = Adj(\lambda I - A) = E_0 + E_1\lambda + E_2\lambda^2 + \cdots + E_{n-1}\lambda^{n-1}$$

berdasarkan teorema (2.2) berlaku

$$(\lambda I - A)Adj(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A)I \qquad (4.1)$$

Berdasarkan ruas kiri persamaan (1) diperoleh

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)Adj(\lambda I - A) &= (\lambda I - A)E_0 + E_1\lambda + E_2\lambda^2 + \cdots + E_{n-1}\lambda^{n-1} \\ &= -AE_0 + \lambda(E_0 - AE_1) + \lambda^2(E_1 - AE_2) + \\ &\quad (E_1 - AE_3) + \cdots + \lambda^{n-1}(E_{n-2} - AE_{n-1}) + \\ &\quad E_{n-1}\lambda^n.\end{aligned}$$

sedangkan dari ruas kanan persamaan (4.1) diperoleh

$$det(\lambda I - A)I = a_0I + a_1\lambda I + a_2\lambda^2 I + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1}I + \lambda^n I.$$

maka dengan demikian dapat dibentuk persamaan baru yaitu:

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)(E_0 + E_1\lambda + E_2\lambda^2 + \cdots + E_{n-1}\lambda^{n-1}) &= a_0I + a_1\lambda I + a_2\lambda^2 I + \cdots \\ &\quad + a_{n-1}\lambda^{n-1}I + \lambda^n I\end{aligned}$$

atau

$$-AE_0 + \lambda(E_0 - AE_1) + \lambda^2(E_1 - AE_2) + (E_1 - AE_3) + \cdots$$

$$+\lambda^{n-1}(E_{n-2} - AE_{n-1}) + E_{n-1}\lambda^n = a_0 I + a_1\lambda I$$
$$+a_2\lambda^2 I + \cdots a_{n-1}\lambda^{n-1} I + \lambda^n I \quad (4.2)$$

Berdasarkan persamaan (4.2) diperoleh

$$-AE_0 = a_0 I, E_0 - AE_1 = a_1 I, E_1 - AE_2 = a_2 I,$$
$$E_{n-2} - AE_{n-1} = a_{n-1} I \,, E_{n-1} = I \quad (4.3)$$

Berdasarkan persamaan (4.3) diperoleh

$$\begin{aligned} -AE_0 &= a_0 I \\ AE_0 - A^2E_1 &= a_1 \\ A^2E_1 - A^3E_2 &= a_2A^2 \\ \vdots \qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\ A^{n-1}E_{n-2} - A^nE_{n-1} &= a_{n-1}A^{n-1} \\ A^nE_{n-1} &= A^n \end{aligned}$$

Sehingga jika dijumlahkan akan diperoleh

$$0 = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + A^n = C(A)$$

Maka

$$C(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + A^n = 0 \qquad \blacksquare$$

4.2 Mengkontruksi Nilpotent Orde 4 pada Matriks Singular

Berdasarkan landasan teori dapat dilihat bahwa untuk menemukan nilpotent pada matriks cukup sederhana yaitu dapat dilihat pada matriks Segitiga Atas *Stricly*. Namun muncul kesulitan untuk mendapatkan nilpotent pada matriks yang bukan matriks Segitiga Atas *Stricly*, ini terjadi karena pada matriks yang bukan matriks segitiga atas stricly tidak memperlihatkan bentuk dan kriteria yang jelas, maka untuk mengatasinya dicarilah nilpotent dengan menggunakan Teorema Cayley Hamilton.

Adapun langkah-langkah mengkontruksi nilpotent diuraikan sebagai berikut:

1. Ambil A adalah matriks singular 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & s & t & u \\ 0 & a & b & c \\ 0 & d & e & f \\ 0 & g & h & i \end{bmatrix}, \text{ untuk } a, b, c, d, e, f, g, h, i, s, t, u \in N \qquad (4.4)$$

dengan $aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi = 0$,

Berdasarkan teorema (2.1) maka pada persamaan (4.4) berlaku

$$det\, A^4 = (det\, A)(det\, A)(det\, A)(det\, A) = 0.$$

2. Dengan menggunakan matriks A dan berdasarkan teorema (2.4) akan ditentukan polinomial karakteristik dari matriks A sebagai berikut:

$$det \begin{bmatrix} 1-\lambda & s & t & u \\ 0 & a-\lambda & b & c \\ 0 & d & e-\lambda & f \\ 0 & g & h & i-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda) det \begin{bmatrix} a-\lambda & b & c \\ d & e-\lambda & f \\ g & h & i-\lambda \end{bmatrix}$$

$$-s\, det \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e-\lambda & f \\ 0 & h & i-\lambda \end{bmatrix}$$

$$+\, t\, det \begin{bmatrix} 0 & a-\lambda & c \\ 0 & d & f \\ 0 & g & i-\lambda \end{bmatrix}$$

$$-u\, det \begin{bmatrix} 0 & a-\lambda & b \\ 0 & d & e-\lambda \\ 0 & g & h \end{bmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\{(a-\lambda)(e-\lambda)(i-\lambda)$$
$$+(bfg) + (cdh)\} - \{gc(e-\lambda)\}$$
$$-\{hf(a-\lambda)\} - \{(i-\lambda)bd\}$$

$$= \lambda^4 + \lambda^3(-e-a-i-1)$$
$$+\lambda^2(ei + ai + ea - gc - hf -$$
$$bd + e + i + a) - \lambda(eai + bfg$$
$$+cdh - gce - afh - ibd + ei$$
$$+ai + ea - gc - hf - bd) + eai$$
$$+bfh + cdh - gce - afh - ibd$$

$$= \lambda^4 + \lambda^3(-e - a - i - 1)$$
$$+\lambda^2(ei + ai + ea - gc - hf - bd$$
$$+e + i + a) - \lambda(ei + ai + ea$$
$$-gc - hf - bd) \quad (4.5)$$

Berdasarkan persamaan (4.5) maka menurut Teorema Cayley Hamilton berlaku:

$$A^4 + A^3(-e - a - 4 - 1) + A^2(ei + ai + ea - gc - hf - bd + e + i + a) + A(-ei - ai - ea + gc + hf + bd) = 0 \quad (4.6)$$

Berdasarkan persamaan (4.6) maka dapat dibentuk nilpotent orde 4 dengan menentukan sistem persamaan linear yaitu:

$$-e - a - i - 1 = 0$$
$$ei + ai + ea - gc - hf - bd + e + i + a = 0$$
$$-ei - ai - ea + gc + hf + bd = 0$$

Karena sistem persamaan linear tidak mempunyai solusi maka *a, b, c, d, e, f* , *g, h* , *i* tidak dapat ditentukan.

3. Maka dengan menggunakan operasi baris elementer pada matriks A dalam persamaan (4.4) maka diperoleh matrik B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & s & t & u \\ 0 & a & b & c \\ 0 & d & e & f \\ 0 & g & h & i \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & s & t & u \\ 0 & a & b & c \\ 0 & d & e & f \\ 0 & g & h & i \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ b_2 + mb_1 \\ b_3 + nb_1 \\ b_4 + qb_1 \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & s & t & u \\ m & a + ms & b + mt & c + mu \\ n & d + ns & e + nt & f + nu \\ q & g + qs & h + qt & i + qu \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

4. Dengan menggunakan matriks B pada persamaan (4.7) dapat dibentuk polinomial karakteristik dari B sebagai berikut.

$$det\begin{bmatrix} \lambda-1 & s & t & u \\ m & \lambda-(a+ms) & b+mt & c+mu \\ n & d+ns & \lambda-(e+nt) & f+nu \\ q & g+qs & h+qt & \lambda-(i+qu) \end{bmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-(a+ms) & b+mt & c+mu \\ d+ns & \lambda-(e+nt) & f+nu \\ g+qs & h+qt & \lambda-(i+qu) \end{vmatrix}$$

$$-s\begin{vmatrix} m & b+mt & c+mu \\ n & \lambda-(e+nt) & f+nu \\ q & h+qt & \lambda-(i+qu) \end{vmatrix}$$

$$+t\begin{vmatrix} m & \lambda-(a+ms) & c+mu \\ n & d+ns & f+nu \\ q & g+qs & \lambda-(i+qu) \end{vmatrix}$$

$$-u\begin{vmatrix} m & \lambda-(a+ms) & b+mt \\ n & d+ns & \lambda-(e+nt) \\ q & g+qs & h+qt \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \lambda^4 + (-i - qu - e - nt - 1 - a \\ &\quad -ms)\lambda^3 + (e + a + i + nta + que \\ &\quad -hnu - dmt - qtf + ems - nsb \\ &\quad +int + ims + qua - gum - qsc \\ &\quad -db + ea - gc - hf + ie + ia)\lambda^2 \\ &\quad -(-hfa - gce - idb + hdc \\ &\quad +gbf + iea + qsbf + gbnu \\ &\quad +gmtf + qtdc + hdum + hnsc \\ &\quad -db + ea - gc - hf - gcnt + ie \\ &\quad +ia - hfms - gume - qsce \\ &\quad -qsce - hnua - qtfa - qudb \\ &\quad +quea - idmt - insb + iems \\ &\quad inta)\lambda \qquad (4.8) \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan(4.8) maka menurut Teorema Cayley Hamilton berlaku.

$$\begin{aligned} &A^4 + (-i - qu - e - nt - 1 - a - ms)A^3 + (e + a + i + nta + que \\ &-hnu - dmt - qtf + ems - nsb + int + ims + qua - gum - qsc - \\ &+ea - gc - hf + ie + ia)A^2 + (-qsbf - gbnu - gmtf - qtdc \\ &-hdum - hnsc + db - ea + gc + hf + gcnt - ie - ia + hfms \end{aligned}$$

$$+gume + qsce + hnua + qtfa + qudb - quea + idmt + insb$$
$$-iems - inta)A = 0$$

5. Berdasarkan persamaan (4.9) dapat dibentuk nilpotent A dengan menentukan solusi dari sistem persamaan linear atas variabel m,n,q yaitu:

   Berdasarkan persamaan A^3 diperoleh persamaan

   $$-i - qu - e - nt - 1 - a - ms = 0$$

   Sehingga:

   $$-ms - nt - qu = a + e + i + 1 \tag{4.10}$$

   Berdasarkan persamaan A^2 diperoleh persamaan

   $$e + a + i + nta + que - hnu - dmt - qtf + ems - nsb + int + ims$$
   $$+qua - gum - qsc - db + ea - gc - hf + ie + ia = 0$$

   Sehingga:

   $$(-dt + es + is - gu)m + (ta - hu - sb + it)n$$
   $$+(ue - tf + ua - sc)q = -e - a - i + db - ea$$
   $$+gc + hf - ie - ia \tag{4.11}$$

   Berdasarkan A diperoleh persamaan

   $$-qsbf - gbnu - gmtf - qtdc - hdum - hnsc + db - ea + gc + hf$$
   $$+gcnt - ie - ia + hfms + gume + qsce + hnua + qtfa$$
   $$+qudb - quea + idmt + insb - iems - inta = 0$$

   Sehingga:

   $$(-gtf - hdu + hfs + gue + idt - ies)m + (-gbu - hsc + gct$$
   $$+hua + isb - ita)n + (-sbf - tdc + sce + tfa + udb - uea)q$$
   $$= -db + ea - gc - hf + ie + ia \tag{4.12}$$

   Berdasarkan ketiga persamaan diatas maka dicari nilai m,n, dan q dengan menggunakan Aturan Cramer sebagai berikut:

$$m = \frac{\begin{vmatrix} a+e+i+1 & -t & -u \\ -e-a-i+db-ea+gc+hf-ie-ia & ta-hu-sb+it & ue-tf+ua-sc \\ -db+ea-gc-hf+ie+ia & -gbu-hsc+gct+hua+isb-ita & -sbf-tdc+sce+tfa+udb-uea \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -s & -t & -u \\ -dt+es+is-gu & ta-hu-sb+it & ue-tf+ua-sc \\ -gtf-hdu+hfs+gue+idt-ies & -gbu-hsc+gct+hua+isb-ita & -sbf-tdc+sce+tfa+udb-uea \end{vmatrix}} \tag{4.13}$$

$$n = \frac{\begin{vmatrix} -s & a+e+i+1 & -u \\ -dt+es+is-gu & -e-a-i+db-ea+gc+hf-ie-ia & ue-tf+ua-sc \\ -gtf-hdu+hfs+gue+idt-ies & -db+ea-gc-hf+ie+ia & -sbf-tdc+sce+tfa+udb-uea \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -s & -t & -u \\ -dt+es+is-gu & ta-hu-sb+it & ue-tf+ua-sc \\ -gtf-hdu+hfs+gue+idt-ies & -gbu-hsc+gct+hua+isb-ita & -sbf-tdc+sce+tfa+udb-uea \end{vmatrix}} \tag{4.14}$$

$$q = \frac{\begin{vmatrix} -s & -t & a+e+i+1 \\ -dt+es+is-gu & ta-hu-sb+it & -e-a-i+db-ea+gc+hf-ie-ia \\ -gtf-hdu+hfs+gue+idt-ies & -gbu-hsc+gct+hua+isb-ita & -db+ea-gc-hf+ie+ia \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -s & -t & -u \\ -dt+es+is-gu & ta-hu-sb+it & ue-tf+ua-sc \\ -gtf-hdu+hfs+gue+idt-ies & -gbu-hsc+gct+hua+isb-ita & -sbf-tdc+sce+tfa+udb-uea \end{vmatrix}} \tag{4.15}$$

6. Dengan mensubtitusikan persamaan (4.13), (4.14), dan (4.15) kedalam persamaan (4.7) maka diperoleh matriks B adalah nilpotent orde 4.
7. Untuk membentuk nilpotent dengan element-elemen bilangan bulat dapat diuraikan sebagai berikut:

   Dari matriks yang ditetapkan pada persamaan (4.4) dipilih

   $$a = d = s = g$$

   $$b = h = t = e$$

   $$c = i = u = f$$

   Sehingga pada persamaan (4.4) menjadi

   $$A' = \begin{bmatrix} 1 & s & t & u \\ 0 & a & b & c \\ 0 & a & b & c \\ 0 & a & b & c \end{bmatrix}$$

   Dengan membentuk transformasi elementer dan ditetapkan

   $$A' = \begin{bmatrix} 1 & s & t & u \\ 0 & a & b & c \\ 0 & a & b & c \\ 0 & a & b & c \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ b_2 + mb_1 \\ b_3 + nb_1 \\ b_4 + qb_1 \end{array}$$

Maka diperoleh

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & s & t & u \\ m & a+ms & b+mt & c+mu \\ n & a+ns & b+nt & c+nu \\ q & a+qs & b+qt & c+qu \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, persamaan (4.4) akan menjadi

$$\lambda^4 + (-ms - nt - qu - a - b - c - 1)\lambda^3 + \ (a+b+c)\lambda^2$$

Berdasarkan teorema Cayley Hamilton agar diperoleh $A^4 = 0$, maka diambil

$$-ms - nt - qu - a - b - c - 1 = 0$$

$$a + b + c = 0 \tag{4.16}$$

Karena s, t, u bilangan bulat, maka diperoleh $m, n,$ dan q bilangan bulat, dengan demikian diperoleh matriks B adalah nilpotent orde 4 dengan elemen-elemen bilangan bulat.

4.3 Contoh Mengkontruksi Nilpotent Orde 4 pada Matriks Singular yang Berentri Bilangan Bulat Positif.

Adapun dalam pembahasan ini akan diberikan beberapa contoh dalam mengkontruksi nilpotent orde 4 pada matriks singular. Adapun contoh yang diberikan adalah matriks singular dengan element-element bilangan bulat.

Contoh 4.4 : Diketahui matriks singular yaitu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

matriks $A^4 \neq 0$ maka untuk menentukan nilpotent matriks A dapat diselesaikan dengan menggunakan teorema Cayley Hamilton.

Penyelesaian:

Untuk menentukan nilpotent orde 4 maka berdasarkan persamaan (4.13)

$$m = \frac{\begin{vmatrix} a+e+i+1 & -t & -u \\ -e-a-i+db-ea+gc+hf-ie-ia & ta-hu-sb+it & ue-tf+ua-sc \\ -db+ea-gc-hf+ie+ia & -gbu-hsc+gct+hua+isb-ita & -sbf-tdc+sce+tfa+udb-uea \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -s & -t & -u \\ -dt+es+is-gu & ta-hu-sb+it & ue-tf+ua-sc \\ -gtf-hdu+hfs+gue+idt-ies & -gbu-hsc+gct+hua+isb-ita & -sbf-tdc+sce+tfa+udb-uea \end{vmatrix}}$$

dengan $s = 2, t = 3, u = 1$

$$a = 1, b = 2, c = 3$$
$$d = 1, e = 0, f = 1$$
$$g = 2, h = 4, i = 6$$

maka diperoleh

$$m = -\frac{1030}{632}$$

dan berdasarkan persamaan (4.14)

$$n = \frac{\begin{vmatrix} -s & a+e+i+1 & -u \\ -dt+es+is-gu & -e-a-i+db-ea+gc+hf-ie-ia & ue-tf+ua-sc \\ -gtf-hdu+hfs+gue+idt-ies & -db+ea-gc-hf+ie+ia & -sbf-tdc+sce+tfa+udb-uea \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -s & -t & -u \\ -dt+es+is-gu & ta-hu-sb+it & ue-tf+ua-sc \\ -gtf-hdu+hfs+gue+idt-ies & -gbu-hsc+gct+hua+isb-ita & -sbf-tdc+sce+tfa+udb-uea \end{vmatrix}}$$

dengan $s = 2, t = 3, u = 1$

$$a = 1, b = 2, c = 3$$
$$d = 1, e = 0, f = 1$$
$$g = 2, h = 4, i = 6$$

maka diperoleh

$$n = -\frac{470}{632}$$

dan berdasarkan persamaan (4.15)

$$q = \frac{\begin{vmatrix} -s & -t & a+e+i+1 \\ -dt+es+is-gu & ta-hu-sb+it & -e-a-i+db-ea+gc+hf-ie-ia \\ -gtf-hdu+hfs+gue+idt-ies & -gbu-hsc+gct+hua+isb-ita & -db+ea-gc-hf+ie+ia \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -s & -t & -u \\ -dt+es+is-gu & ta-hu-sb+it & ue-tf+ua-sc \\ -gtf-hdu+hfs+gue+idt-ies & -gbu-hsc+gct+hua+isb-ita & -sbf-tdc+sce+tfa+udb-uea \end{vmatrix}}$$

dengan $s = 2, t = 3, u = 1$

$$a = 1, b = 2, c = 3$$
$$d = 1, e = 0, f = 1$$
$$g = 2, h = 4, i = 6$$

maka diperoleh

$$q = -\frac{1586}{632}$$

dengan mensubtitusikan

$$m = -\frac{1030}{632}, n = -\frac{470}{632}, q = -\frac{1586}{632}$$

kedalam persamaan (4.7) maka diperolehlah nilpotent

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ \frac{-1030}{632} & 1 + \left(-\frac{1030}{632}.2\right) & 2 + \left(-\frac{1030}{632}.3\right) & 3 + \left(-\frac{1030}{632}\right) \\ \frac{-470}{632} & 1 + \left(-\frac{470}{632}.2\right) & 0 + \left(-\frac{470}{632}.3\right) & 1 + \left(-\frac{470}{632}\right) \\ \frac{-1586}{632} & 2 + \left(-\frac{1586}{632}.2\right) & 4 + \left(-\frac{1586}{632}.3\right) & 6 + \left(-\frac{1586}{632}\right) \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ \frac{-515}{316} & \frac{-375}{158} & \frac{-913}{316} & \frac{433}{316} \\ \frac{-235}{316} & \frac{-77}{158} & \frac{-705}{316} & \frac{81}{316} \\ \frac{-793}{316} & \frac{-477}{158} & \frac{-1115}{316} & \frac{1103}{316} \end{bmatrix}$$

setelah diperoleh matriks B, maka dengan menggunakan Maple yang tertera pada Lampiran C, jika B dipangkatkan 4 maka diperoleh matriks nilpotennya yaitu:

$$B^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 4.5 : Diketahui matriks singular yaitu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

matriks $A^4 \neq 0$ maka untuk menentukan nilpotent matriks A dapat diselesaikan dengan menggunakan teorema Cayley Hamilton.

Penyelesaian:

Untuk menentukan nilpotent orde 4 maka berdasarkan persamaan (4.13)

$$m = \frac{\begin{vmatrix} a+e+i+1 & -t & -u \\ -e-a-i+db-ea+gc+hf-ie-ia & ta-hu-sb+it & ue-tf+ua-sc \\ -db+ea-gc-hf+ie+ia & -gbu-hsc+gct+hua+isb-ita & -sbf-tdc+sce+tfa+udb-uea \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -s & -t & -u \\ -dt+es+is-gu & ta-hu-sb+it & ue-tf+ua-sc \\ -gtf-hdu+hfs+gue+idt-ies & -gbu-hsc+gct+hua+isb-ita & -sbf-tdc+sce+tfa+udb-uea \end{vmatrix}}$$

dengan $s = 4, t = 2, u = 1$

$a = 2, b = 7, c = 8$

$d = 3, e = 2, f = 4$

$g = 2, h = 7, i = 8$

maka diperoleh

$$m = -\frac{8490}{4221}$$

dan berdasarkan persamaan (4.14)

$$n = \frac{\begin{vmatrix} -s & a+e+i+1 & -u \\ -dt+es+is-gu & -e-a-i+db-ea+gc+hf-ie-ia & ue-tf+ua-sc \\ -gtf-hdu+hfs+gue+idt-ies & -db+ea-gc-hf+ie+ia & -sbf-tdc+sce+tfa+udb-uea \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -s & -t & -u \\ -dt+es+is-gu & ta-hu-sb+it & ue-tf+ua-sc \\ -gtf-hdu+hfs+gue+idt-ies & -gbu-hsc+gct+hua+isb-ita & -sbf-tdc+sce+tfa+udb-uea \end{vmatrix}}$$

dengan $s = 4, t = 2, u = 1$

$a = 2, b = 7, c = 8$

$d = 3, e = 2, f = 4$

$g = 2, h = 7, i = 8$

maka diperoleh

$$n = -\frac{7183}{4221}$$

dan berdasarkan persamaan (4.15)

$$q = \frac{\begin{vmatrix} -s & -t & a+e+i+1 \\ -dt+es+is-gu & ta-hu-sb+it & -e-a-i+db-ea+gc+hf-ie-ia \\ -gtf-hdu+hfs+gue+idt-ies & -gbu-hsc+gct+hua+isb-ita & -db+ea-gc-hf+ie+ia \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -s & -t & -u \\ -dt+es+is-gu & ta-hu-sb+it & ue-tf+ua-sc \\ -gtf-hdu+hfs+gue+idt-ies & -gbu-hsc+gct+hua+isb-ita & -sbf-tdc+sce+tfa+udb-uea \end{vmatrix}}$$

dengan $s = 4, t = 2, u = 1$

$a = 2, b = 7, c = 8$

$d = 3, e = 2, f = 4$

$$g = 2, h = 7, i = 8$$

maka diperoleh

$$q = -\frac{6547}{4221}$$

dengan mensubtitusikan

$$m = -\frac{8490}{4221}, n = -\frac{7183}{4221}, q = -\frac{6547}{4221}$$

Ke dalam persamaan (4.7) maka diperolehlah nilpotent

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ -\frac{8490}{4221} & 2 + \left(-\frac{8490}{4221}.4\right) & 7 + \left(-\frac{8490}{4221}.2\right) & 8 - \frac{8490}{4221} \\ -\frac{7183}{4221} & 3 + \left(-\frac{7183}{4221}.4\right) & 2 + \left(-\frac{7183}{4221}.2\right) & 4 - \frac{7183}{4221} \\ -\frac{6547}{4221} & 2 + \left(-\frac{6547}{4221}.4\right) & 7 + \left(-\frac{6547}{4221}.2\right) & 8 - \frac{6547}{4221} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ -\frac{2830}{1470} & -\frac{8506}{1470} & \frac{4189}{1470} & \frac{8426}{1470} \\ -\frac{7183}{4221} & -\frac{1690}{4221} & -\frac{5924}{4221} & \frac{9701}{4221} \\ -\frac{6547}{4221} & -\frac{17746}{4221} & \frac{16453}{4221} & \frac{27221}{4221} \end{bmatrix}$$

setelah diperoleh matriks B, maka dengan menggunakan Maple yang tertera pada Lampiran D, jika B dipangkatkan 4 maka diperoleh matriks nilpotennya yaitu:

$$B^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.4 Contoh Mengkontruksi Nilpotent Orde 4 pada Matriks Singular yang Berentri Bilangan Bulat.

Adapun untuk menentukan nilpotent orde 4 yang entri-entrinya bernilai negatif maka dapat diselesaikan dengan langkah 7 dengan ketentuan:

$$-ms - nt - qu - a - b - c - 1 = 0$$
$$a + b + c = 0$$

Contoh 4.6 Diketahui sebuah matriks

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

matriks $(A')^4 \neq 0$ maka untuk menentukan nilpotent matriks A' dapat diselesaikan dengan menggunakan teorema Cayley Hamilton.

Penyelesaian:

Berdasarkan matriks A pada persamaan (4.4) dipenuhi:

$$a = d = s = g = 4$$
$$b = h = t = e = 2$$
$$c = i = u = f = -6$$

Dengan demikian akan diperoleh nilpotent dengan elemennya bilangan bulat. Berdasarkan persamaan (4.16), nilpotent dapat dibentuk dengan menetapkan

$$-ms - nt - qu - a - b - c - 1 = 0$$
$$a + b + c = 0$$

Jika diambil $n, m = 1$ maka diperoleh $q = 7/6$

Sehingga berdasarkan persamaan (4.7) diperoleh nilpotent

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 \\ 1 & 4 & 8 & -12 \\ 1 & 4 & 8 & -12 \\ 7/6 & 13/3 & 26/3 & -13 \end{bmatrix}$$

setelah diperoleh matriks B', maka dengan menggunakan Maple yang tertera pada Lampiran E, jika B' dipangkatkan 4 maka diperoleh matriks nilpotentnya yaitu:

$$(B')^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh 4.7 Diketahui sebuah matriks

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & -9 \\ 0 & 5 & 4 & -9 \\ 0 & 5 & 4 & -9 \\ 0 & 5 & 4 & -9 \end{bmatrix}$$

matriks $A^4 \neq 0$ maka untuk menentukan nilpotent matriks A dapat diselesaikan dengan menggunakan teorema Cayley Hamilton.

Penyelesaian:

Berdasarkan matriks A pada persamaan (4.4) dipenuhi:

$$a = d = s = g = 5$$

$$b = h = t = e = 4$$

$$c = i = u = f = -9$$

Dengan demikian akan diperoleh nilpoten dengan elemennya bilangan bulat. Berdasarkan persamaan (4.16), nilpotent dapat dibentuk dengan menetapkan

$$-ms - nt - qu - a - b - c - 1 = 0$$

$$a + b + c = 0$$

Jika diambil $m = 2, n = 1$ maka diperoleh $q = 15/9$

Sehingga berdasarkan persamaan (4.7) diperoleh nilpotent

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & -9 \\ 2 & 15 & 12 & -27 \\ 1 & 10 & 8 & -18 \\ 15/9 & 120/9 & 96/9 & -216/9 \end{bmatrix}$$

setelah diperoleh matriks B', maka dengan menggunakan Maple yang tertera pada Lampiran F, jika B' dipangkatkan 4 maka diperoleh matriks nilpotentnya yaitu:

$$(B')^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tidak semua matriks singular nilpotent, maka untuk memperlihatkan matriks singular yang tidak nilpotent diberikan contoh berikut:

Contoh 4.8 Diketahui sebuah matriks singular

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & 6 & -10 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Untuk menentukan nilpotent orde 4 maka berdasarkan persamaan (4.13)

$$m = \frac{\begin{vmatrix} a+e+i+1 & -t & -u \\ -e-a-i+db-ea+gc+hf-ie-ia & ta-hu-sb+it & ue-tf+ua-sc \\ -db+ea-gc-hf+ie+ia & -gbu-hsc+gct+hua+isb-ita & -sbf-tdc+sce+tfa+udb-uea \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -s & -t & -u \\ -dt+es+is-gu & ta-hu-sb+it & ue-tf+ua-sc \\ -gtf-hdu+hfs+gue+idt-ies & -gbu-hsc+gct+hua+isb-ita & -sbf-tdc+sce+tfa+udb-uea \end{vmatrix}}$$

dengan $s = 2, t = 3, u = 4$

$a = -4, b = 3, c = 5$

$d = 1, e = 2, f = 3$

$g = -8, h = 6, i = 10$

diperoleh

$$m = \frac{78582}{21105}$$

Dan berdasarkan persamaan (4.14)

$$n = \frac{\begin{vmatrix} -s & a+e+i+1 & -u \\ -dt+es+is-gu & -e-a-i+db-ea+gc+hf-ie-ia & ue-tf+ua-sc \\ -gtf-hdu+hfs+gue+idt-ies & -db+ea-gc-hf+ie+ia & -sbf-tdc+sce+tfa+udb-uea \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -s & -t & -u \\ -dt+es+is-gu & ta-hu-sb+it & ue-tf+ua-sc \\ -gtf-hdu+hfs+gue+idt-ies & -gbu-hsc+gct+hua+isb-ita & -sbf-tdc+sce+tfa+udb-uea \end{vmatrix}}$$

dengan $s = 2, t = 3, u = 4$

$a = -4, b = 3, c = 5$

$d = 1, e = 2, f = 3$

$g = -8, h = 6, i = 10$

diperoleh

$$n = \frac{-12549}{21105}$$

Dan berdasarkan persamaan (4.15)

$$q = \frac{\begin{vmatrix} -s & -t & a+e+i+1 \\ -dt+es+is-gu & ta-hu-sb+it & -e-a-i+db-ea+gc+hf-ie-ia \\ -gtf-hdu+hfs+gue+idt-ies & -gbu-hsc+gct+hua+isb-ita & -db+ea-gc-hf+ie+ia \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -s & -t & -u \\ -dt+es+is-gu & ta-hu-sb+it & ue-tf+ua-sc \\ -gtf-hdu+hfs+gue+idt-ies & -gbu-hsc+gct+hua+isb-ita & -sbf-tdc+sce+tfa+udb-uea \end{vmatrix}}$$

dengan $s = 2, t = 3, u = 4$

$a = -4, b = 3, c = 5$

$d = 1, e = 2, f = 3$

$g = -8, h = 6, i = 10$

diperoleh

$$q = \frac{43257}{21105}$$

Dengan mensubtitusikan $m = \frac{78582}{21105}$, $n = \frac{-12549}{21105}$, $q = \frac{43257}{21105}$

ke dalam persamaan (4.7) maka diperolehlah nilpotent

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{78582}{21105} & -4 + \frac{78582}{21105}.2 & 3 + \frac{78582}{21105}.3 & -5 + \frac{78582}{21105}.4 \\ \frac{-12549}{21105} & 1 + \frac{-12549}{21105}.2 & 2 + \frac{-12549}{21105}.3 & 3 + \frac{-12549}{21105}.4 \\ \frac{43257}{21105} & -8 + \frac{43257}{21105}.2 & 6 + \frac{43257}{21105}.3 & -10 + \frac{43257}{21105}.4 \end{bmatrix}$$

$$B^4 = \begin{bmatrix} -\frac{44329456284}{103161709} & -\frac{39271138650}{103161709} & -\frac{118118497794}{103161709} & -\frac{82549024968}{103161709} \\ -\frac{40245964234566}{34559172515} & -\frac{4831410067842}{6911834503} & -\frac{134519511550526}{34559172515} & -\frac{72448279434562}{34559172515} \\ -\frac{1926977956438}{725742622815} & \frac{15431574790936}{145148524563} & -\frac{104952759881266}{241914207605} & -\frac{64463971183736}{725742622815} \\ -\frac{2395124068192}{241914207605} & \frac{31765983277002}{48382841521} & -\frac{388326080793902}{241914207605} & \frac{30492064252796}{241914207605} \end{bmatrix}$$

Jadi berdasarkan contoh (4.4), (4,5), (4.6), (4.7), (4.8) dapat dilihat bahwa matriks singular yang tidak nilpotent dapat ditentukan nilpotentnya menggunakan teorema Cayley Hamilton, namun tidak semua matriks singular dapat ditentukan nilpotentnya.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan bab IV telah dibahas tentang menentukan nilpotent orde 4 pada matriks singular dengan menggunakan teorema Cayley Hamilton maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Nilpotent suatu matriks singular yang dapat dikontruksi menggunakan teorema Cayley Hamilton adalah matriks yang berbentuk khusus dengan kolom pertama $(1,0,0,0)$.
2. Tidak semua matriks singular dapat ditentukan nilpotentnya.
3. Dengan mengkontruksi matriks singular menggunakan teorema Cayley Hamilton dihasilkan matriks nol.

5.2 Saran

Pembahasan skripsi ini hanya menentukan nilpotent orde 4 pada matriks singular dengan menggunakan teorema Cayley Hamilton. Untuk itu maka bagi pembaca yang ingin melanjutkan skripsi ini disarankan membahas orde yang lebih tinggi atau menggunakan teorema lain.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. *Dasar-Dasar Aljabar Linier*. Jakarta: Erlangga, 2004.

Gere, James, William Weaver. *Aljabar Matriks untuk para Insinyur*. Jakarta: Erlangga, 1987.

Lipschutz, Seymour. *Aljabar Linear Belajar Super Cepat*. Jakarta: Erlangga, 2004.

Lipschutz, Seymour. *Aljabar Linear*. Jakarta: Erlangga, 2004.

P.B Bahattacharya, dkk. *Firt Course In Linear Algebra*. New Age Internasional Publisher.

Wibisono, Yusuf, *Manual Matematika Ekonomi*, Yogyakarta: Gajah Mada University Press 1999.

Yahya, Yusuf, dkk. *Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*. Bogor: Ghalia Indonesia, 2005.

DAFTAR LAMBANG

λ : Lambda

$\sum$: Sigma

A^T : Transpos matriks A

A^{-1} : Invers matriks A

$det\ A$: Determinan matriks A