PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARABOLIK NONLINIER DENGAN MENGGUNAKAN METODE ITERASI VARIASI

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai salah satu syarat
untuk memperoleh gelar sarjana pada
Jurusan Matematika

oleh :

MHD HANAFI
10654004484

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2011

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL PARABOLIK NONLINIER DENGAN MENGGUNAKAN METODE ITERASI VARIASI

MHD HANAFI
10654004484

Tanggal sidang :01 Februari 2011
Periode Wisuda: Februari 2011

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas tentang penyelesaian persamaan diferensial parabolik nonlinier $u_t - u_{xx} = \Phi(u) + g(x,t)$ menggunakan metode iterasi variasi berdasarkan syarat batas $u(0,t) = u(1,t) = 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$. Metode Iterasi Variasi merupakan metode semi analitik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial nonlinier baik yang homogen maupun nonhomogen.Berdasarkan hasil kajian diperoleh bahwa metode iterasi variasi memberikan penyelesaian dengan akurasi yang cukup baik.

Kata kunci : metode iterasi variasi, metode semi analitik, persamaan diferensial parabolik nonlinier.

ON THE SOLUTION OF NONLINEAR PARABOLIC EQUATION
BY USING VARIATIONAL ITERATION METHOD

MHD HANAFI
10654004484

Date of Final Exam: February 01, 2011
Graduation ceremony priod: February , 2011

Mathematics Department
Faculty of Sciences and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
HR. Soebrantas Street No.155 Pekanbaru

ABSTRACT

This paper discusses the solving of a nonlinear parabolic differential equation $u_t - u_{xx} = \Phi(u) + g(x,t)$ *by using the variational iteration method based on the initial value problem* $u(0,t) = u(1,t) = 0$ *and boundary value problem* $u(x,0) = f(x)$. *The Variations Iteration Method is semi-analytical method used to solve a nonlinear differential equations either homogeneous and nonhomogeneous. Based on the results of study is obtained that variational iteration method result the solution with a good accurate.*

Keywords : *nonlinear parabolic differential equation, semi analytical method, variational iteration method.*

DAFTAR ISI

Halaman

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji bagi Allah SWT yang senantiasa melimpahkan rahmat dan taufik serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini tepat pada waktunya. Tugas Akhir ini merupakan salah satu syarat kelulusan tingkat sarjana.

Selanjutnya limpahan salawat serta salam kepada junjugan Nabi Besar Muhammad SAW pembawa petunjuk bagi seluruh umat manusia.

Pada penyusunan dan penyelesaian Tugas Akhir ini penulis tidak terlepas dari batuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu sudah sepantasnya penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta ayah dan ibu yang tidak pernah lelah dan tiada henti melimpahkan kasih sayang, perhatian, motivasi yang membuat penulis mampu untuk terus dan terus melangkah, pelajaran hidup, juga materi yang tak mungkin bisa terbalas. Jasa-jasamu kan selalu kukenang hingga akhir hayatku dan semoga Allah menjadikan jasa-jasamu sebagai amalan soleh, Amin..

Selanjutnya ucapan terimakasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir, M.A. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Yuslenita Muda, M.Sc. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Wartono, M.Sc. selaku pembimbing yang telah banyak membantu, mendukung, mengarahkan dan membimbing penulis dalam penulisan Tugas Akhir ini.
5. Ibu Fitri Aryani, M.Sc. selaku koordinator Tugas Akhir.
6. Bapak dan Ibu dosen jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim.
7. Kakak serta adik-adikku tersayang yang selalu memberiku semangat. Semoga kita tetap tumbuh menjadi anak-anak yang membanggakan. Dan

buat seluruh keluargaku yang telah memberikan perhatian, kasih sayang serta motivasi dan untukku.

8. Teman- teman dekatku yang selalu membantuku dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini yaitu : Hendri, Jeldi, Yunus, Laina dan Devi.
9. Teman-teman Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
10. Seluruh pihak yang telah memberikan andil dalam proses penulisan Tugas Akhir ini sampai selesai yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Dalam penyusunan dan penulisan Tugas akhir ini penulis telah berusaha semaksimal mungkin untuk menghindari kesalahan. Tapi seperti *tak ada gading yang tak retak*. Akhirnya penulis mengharapkan kepada pembaca Tugas Akhir ini agar memberikan saran dan kritik konstruktif. Semoga Tugas Akhir ini dapat memberikan konstribusi yang bermanfaat. Amin.

Pekanbaru, Februari 2011

Penulis

BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar belakang

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu atau beberapa fungsi yang diketahui. Persamaan diferensial disebut juga dengan *aequatio differntialitis* yang diperkenalkan oleh Leibniz pada tahun 1676

Persamaan diferensial seringkali muncul dalam model matematika yang mencoba menggambarkan keadaan kehidupan nyata. Banyak hukum-hukum alam dan hipotesa-hipotesa yang dapat diterjemahkan kedalam persamaan yang mengandung turunan yang melalui bahasa matematika. Sebagai contoh turunan–turunan dalam fisika muncul sebagai percepatan dan kecepatan, dalam geometri sebagai kemiringan (gradien), dalam biologi sebagai kecepatan perubahan gaya hidup, dan dalam keuangan sebagai kecepatan pertambahan investasi.

Persamaan differensial dibagi menjadi dua kelompok besar berdasarkan turunan fungsi terhadap variabel bebas yaitu persamaan differensial parsial dan persamaan diferensial biasa. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang mengandung turunan biasa yaitu turunan dengan satu peubah bebas sedangkan persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas.

Persamaan diferensial parsial nonlinier sangat sulit untuk ditentukan penyelesaian solusi eksaknya. Oleh karena itu penyelesaian semi analitik diusulkan para pakar (ahli) untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial seperti metode Dekomposisi Adomian, Homotopi Pertubasi dan metode Iterasi Variasi. Beberapa persamaan-persamaan yang diselesaikan dengan menggunakan metode Iterasi Variasi, misalnya: penyelesaian persamaan diferensial parabolik linier oleh Ghotbi, dkk (2009), penyelesaian persamaan semidiferensial orde n oleh Ghorbani dan Alavi (2008), penyelesaian persamaan umum Riccati oleh Batiha, dkk (2007) dan penyelesain permasalahan Stefan oleh Jafari, dkk (2008).

Berdasarkan uraian diatas penulis tertarik untuk mengkaji metode Iterasi Variasi yang berjudul "**Penyelesaian Persamaan Diferensial Parabolik Nonlinier Dengan Menggunakan Metode Iterasi Variasi** "

B. Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada proposal tugas akhir ini adalah bagaimana menentukan penyelesaian persamaan diferensial parabolik nonlinier $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(u) + g(x,t)$ berdasarkan syarat batas $u(0,t) = 0$ $u(1,t) = 0,\ t > 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$ dengan menggunakan metode iterasi variasi.

C. Batasan Masalah

Pada tugas akhir ini penulis hanya membatasi pada persamaan diferensial parabolik nonlinier dengan persamaan umumnya $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(u) + g(x,t)$ dengan variabel bebas masing-masing x dan t.

D. Tujuan

Tujuan penelitian ini adalah untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial parabolik nonlinier $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(u) + g(x,t)$ berdasarkan syarat batas $u(0,t) = u(1,t) = 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$ dengan menggunakan metode Iterasi Variasi.

E. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada tugas akhir ini terdiri dari beberapa bab yaitu:

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penulis ,dan sistematika penulisan.

Bab II Landasan Teori

Bab ini menjelaskan tentang landasan teori yang digunakan, seperti: persamaan diferensial, persamaan diferensial parsial, klasifikasi persamaan diferensial, persamaan diferensial parsial parabolik, dan metode Iterasi Variasi

Bab III Metodologi

Bab ini berisikan studi literatur yang digunakan penulis dan berisikan serta langkah-langkah yang digunakan untuk mencapai tujuan dari proposal tugas akhir ini.

Bab IV Pembahasan

Bab ini berisikan tentang Metode Itersai Variasi yang digunakan untuk membahas persamaan diferensial parabolik nonlinier dengan persamaan $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(u) + g(x,t)$ berdasarkan syarat batas $u(0,t) = u(1,t) = 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$ serta memperlihatkan galat.

Bab V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dari seluruh uraian dan saran- saran untuk pembaca.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Kalkulus

Kalkulus adalah ilmu matematika mengenai gerak dan perubahan. Dimana terdapat gerakan atau pertumbuhan, serta gaya-gaya yang bekerja berubah-ubah dan menghasilkan percepatan. Kalkulus diferensial digunakan untuk menyelesaikan persoalan laju pertumbuhan sedangkan kalkulus integral berhubungan dengan menentukan sebuah fungsi dari informasi mengenai laju perubahan, yang dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$y' \text{ dan } y'' \text{adalah } \frac{dy}{dx} \quad \text{dan } \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C \text{ dimana } F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

Persamaan diatas digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial parabolik nonlinier dengan metode iterasi variasi, yang mana dalam ilmu kalkulus terdapat bagaimana cara mengintegralkan, dan menurunkan suatu persamaan.

2.2 Deret Taylor

Deret Taylor adalah representasi fungsi matematika sebagai jumlahan tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut di suatu titik. Deret taylor dari sebuah fungsi real atau fungsi kompleks $f(x)$ yang terdiferensialkan dalam sebuah pesekitaran suatu bilangan riil atau kompleks a adalah deret pangkat. Adapun bentuk umum dari deret taylor yaitu

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots \quad (2.1)$$

Yang dalam bentuk lebih ringkasan ditulis sebagai

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Dengan $n!$ melambangkan faktorial n dan $f^{(n)}(a)$ melambangkan nilai dari turunan ke- n dari f pada titik a. Turunan ke-nol dari fungsi f didefenisikan sebagai f itu sendiri dan $(x-a)^0$ dan 0! didefenisikan sebagai 1.

2.3 Persamaan diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang mengandung fungsi dan bentuk- bentuk turunannya.

Berdasarkan bentuk diferensial yang dikandungnya, persamaan diferensial dapat dikelompokkan sebagai berikut:

1. Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

Persamaan diferensial biasa yaitu persamaan yang berkaitan dengan turunan dari suatu fungsi atau memuat suku-suku dari fungsi dan turunan nya. dan fungsi tersebut bergantung pada satu peubah bebas.

Definisi 2.3.1 (Widiyati santoso, 1988) persamaan diferensial biasa orde- n adalah suatu persamaan yang mempunyai bentuk umum,

$$y^{(n)} = F(x, y, y', y'', y^{(3)}, \dots, y^{(n-1)})$$

dimana $y, y', \dots y^{(n)}$ semua dibentuk oleh nilai x.

2. Persamaan diferensial Parsial (PDP)

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan-persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan-turunan parsial. Persamaan diferensial haruslah melibatkan paling sedikit dua variabel bebas.

Definisi 2.3.2 (Ioannis P Stavroulakis, 2004) Diberikan $u = u(x_1, \dots x_n)$ merupakan fungsi dari variabel bebas n, $x_1, \dots x_n$. Persamaan diferensial parsial adalah suatu persaman yang terdiri dari variabel bebas $x_1, \dots x_n$, variabel terikat dan turunan persial sampai beberapa orde. Dapat dilihat dalam bentuk.

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x1}, \dots u_{xn}, u_{x1x1}, \dots, u_{xixj}, \dots) = 0$$

dengan F adalah fungsi yang diberikan dan $u_{xj} = \frac{\partial u}{\partial x_j}, u_{xi,xj} = \frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j}, i, j = 1, \ldots, n$ merupakan turunan parsial terhadap u .

2.4 Klasifikasi persamaan diferensial parsial

Persamaan diferensial parsial dibagi kedalam beberapa kelompok, yaitu:

a) Berdasarkan Orde

Persamaan diferensial orde n adalah suatu persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk

$$y^{(n)} = F(x, y, y'...y^{(n-i)}) \tag{2.2}$$

Orde suatu persamaan diferensial adalah orde tertinggi dalam persamaan, yang mana orde sama dengan tingkat sedangkan derajat suatu persamaan diferensial adalah pangkat dari turuan yang tertinggi.

Contoh 2.1

1. $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ persamaan diferensial parsial linier orde 1 (2.3)
2. $u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ persamaan diferensial parsial non linier orde 1 (2.4)
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ persamaan diferensial parsial linier orde 2 (2.5)

b) Berdasarkan Linier dan Nonlinier

Persamaan diferensial parsial dikatakan linier jika persamaan itu berderajat satu dalam peubah biasanya dan turunan parsialnya atau sebuah persamaan diferensial parsial disebut linier jika variabel terikat u dan derivatifnya muncul pada sebuah bentuk – bentuk linier (tidak muncul dalam bentuk perkalian, pangkat dan sebagainya)

Bentuk umumnya

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \qquad (2.6)$$

dimana $A,B,...$ G adalah fungsi-fungsi dalam x dan y ketika dikatakan bahwa $A,B\ldots G$ adalah fungsi, ada kemungkinan juga bahwa $A,B\ldots G$ juga fungsi konstan. Sebuah pesamaan diferensial variabel dua yang tidak memenuhi bentuk persamaan (2.6) disebut persamaan nonlinier.

Contoh 2.2

1. $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ persamaan diferensial linier
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = \sin(x)$ persamaan diferensial linier
3. $u\frac{\partial u}{\partial x} + (x-1)\frac{\partial u}{\partial y} + u = 1$ persamaan diferensial nonlinier

c) Berdasarkan homogen dan nonhomogennya

Menentukan homogenan atau tidaknya suatu persamaan dapat dilihat pada pada persamaan (2.6). persamaan ini dikatakan homogen jika $G = 0$ untuk semua x dan y pada domain persamaan, sebaliknya jika $G \neq 0$, persamaan (2.6) dikatakan nonhomogen.

Contoh 2.3

1. $\frac{\partial u}{\partial x} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ persamaan diferensial homogen
2. $(2x + 5y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12u + \frac{\partial u}{\partial x \partial y} = 0$ persamaan diferensial homogen
3. $\frac{\partial u}{\partial x \partial y} + 1 = \frac{\partial u}{\partial x}$ persamaan diferensial nonhomogen
4. $u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^3 = 1 + u^2$ persamaan diferensial nonhomogen

2.5 Jenis – jenis persaman diferensial parsial

Formulasi matematika dari kebanyaan permasalahan dalam ilmu pengetahuan dan teknologi dapat dipresentasikan dalam bentuk persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi tiga jenis yaitu persamaan diferensial parabolik, Persamaan diferensial hiperbolik dan persamaan diferensial eliptik berdasarkan nilai $D = B^2 - 4AC$ pada persamaan (2.6):

a) Persamaan differensial parabolik.

Persamaan diferensial parabolik adalah persamaan diferensial jika $D = 0$. Persamaan diferensial parabolik sering menggambarkan aliran kalor, fenomena difusi seperti aliran panas yang melalui permukaan bumi dan sebagainya.

b) Persamaan diferensial hiperbolik

Persamaan diferensial hiperbolik adalah jika $D > 0$.persamaan hiperbolik sering menggambarkan pergerakan gelombang, fenomena gertaran seperti dawai volin, dawai gitar dan permukaan drum.

c) Persamaan diferensial eliptik

Persamaan differensial eliptik adalah jika $D < 0$. Persamaan diferensial eliptik adalah persamaan yang menggambarkan kondisi tunak yang tidak bergantung kepada waktu, seperti fenomena seperti fenomena kelistrikan dan kemagnetan.

Contoh 2.4

1. $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ persamaan diferensial parabolik
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ persamaan diferensial hiperbolik
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ persamaan diferensial eliptik

2.6 Persamaan Diferensial Parsial Orde Satu

persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang berhubungan dengan dua atau lebih variabel bebas dan turunan parsialnya. Persamaan umum diferensial orde pertama yaitu

$$a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial t}+cu=d \qquad (2.11)$$

yang mana a ,b dan c fungsi dari x, t dan u sedangkan d adalah fungsi konstan. orde pada suatu persamaan ditentukan dari turunan tertinggi nya.

Contoh 2.5

Tentukan penyelesaian $u=u(x,y)$ dari persamaan diferensial orde satu

Berikut.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1$$

Penyelesaian :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1$$

dengan menggunakan teknik variabel terpisah,

$$\partial u=\partial x$$

dan integralkan kedua ruas,

$$u=x+\varphi(y)$$

2.7 Persamaan Diferensial Parsial Orde Dua

Bentuk umum dari persamaan diferensial parsial orde dua yaitu

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+c\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial t}+fu=g \qquad (2.12)$$

dengan a, b, c, d, e dan f fungsi dari x, t dan u. Persamaan (2.12) dikatakan linier jika fungsi a, b, c, d, e dan f tidak terikat pada variabel bebas u jika tidak maka persamaan (2.12) nonlinier dan persamaan (2.12) dikatakan dikatakan homogen jika $g=0$ jika tidak maka persamaan (2.12) dikatakan non homogen.

Contoh 2.6

Tentukan penyelesaian dari persamaan diferensial orde dua

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (2.13)$$

Penyelesaian :

Jika $u(x,y) = X(x)Y(y)$, maka persamaan (2.13) menjadi

$$X^{''}Y = 4XY^{'}$$

Pembagian dengan $4XY$, dan dipisahkan variabel-varibel tersebut, maka

$$\frac{X^{''}}{4X} = \frac{Y^{'}}{Y} \tag{2.14}$$

Karena ruas kiri pada persamaan diatas tidak bergantung pada y dan ruas kanan tidak bergantung kepada x maka diasumsikan bahwa kedua ruas sama dengan konstan. Untuk diberikan sebuah konstanta $k^2 > 0, k^2 < 0$ atau $k^2 = 0$. Selanjutnya penyelesaian yang diberikan akan berbeda tergantung kepada nilai k.

a. Kasus $k^2 > 0$, maka persamaan (2.14) menjadi

$$\frac{X^{''}}{4X} = \frac{Y^{'}}{Y} = k^2$$

Atau dapat ditulis

$$X'' - 4k^2 X = 0$$

dan

$$Y' - k^2 Y = 0$$

Penyelesaian untuk X diberikan oleh

$$X'' = 4k^2 X = 0$$

$$(D - 2k)(D + 2k)X = 0$$

$$X = c_1 \cosh 2\lambda x + c_2 \sinh 2\lambda x$$

sedangkan penyelesaian Y diberikan oleh

$$Y' - k^2 Y = 0$$

$$Y = c_3 e^{\lambda^2 y}$$

Jadi penyelesaian untuk $u = XY$ dari persamaan (2.13) adalah

$$\begin{aligned} u(x,y) &= X(x)Y(y) \\ &= (c_1 \cosh 2\lambda x + c_2 \sinh 2\lambda x)(c_3 e^{\lambda^2 y}) \\ &= C_1 e^{\lambda^2 y} \cosh 2\lambda x + C_2 e^{\lambda^2 y} \sinh 2\lambda x \end{aligned}$$

dengan $C_1 = c_1 c_3$ dan $C_2 = c_2 c_3$

b. Kasus $-k^2 < 0$, maka persamaan (2.14) menjadi

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y} = -k^2$$

Atau dapat juga ditulis

$$X'' + 4k^2 X = 0$$

dan

$$Y' + 4k^2 Y = 0$$

penyelesaian untuk X diberikan oleh

$$X(x) = c_1 \cos 2\lambda x + c_2 \sin 2\lambda x$$

sedangkan penyelesaian Y diberikan oleh

$$Y = c_3 e^{-\lambda^2 y}$$

Jadi penyelesaian dari persamaan (2.14) adalah

$$\begin{aligned} u(x,y) &= X(x)Y(y) \\ &= (c_1 \cos 2\lambda x + c_2 \sin 2\lambda x)(c_3 e^{-\lambda^2 y}) \\ &= C_1 e^{-\lambda^2 y} \cos 2\lambda x + C_2 e^{-\lambda^2 y} \sin 2\lambda x \end{aligned}$$

dengan $C_1 = c_1 c_3$ dan $C_2 = c_2 c_3$

c. Kasus $k^2 = 0$,

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y} = 0$$

atau dapat ditulis

$$X'' = 0 \qquad \text{dan} \quad Y' = 0$$

Penyelesaian untuk $X(x)$ dan $Y(y)$ masing-masing diberikan oleh

$$X(x) = c_1 x + c_2$$

dan

$$Y(y) = c_3$$

sehingga

$$\begin{aligned} u(x,y) &= X(x)Y(y) \\ &= (c_1 x + c_2)c_3 \\ &= C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

dengan $C_1 = c_1 c_3$ dan $C_2 = c_2 c_3$.

2.8 Persamaan Diferensial Parsial Parabolik

Persamaan parabolik merupakan persamaan yang bergantung pada waktu dan penyelesaiannya memerlukan kondisi awal dan syarat batas. Persamaan parabolik yang paling sederhana adalah persamaan perambatan panas, yaitu dengan memisalkan $u(x,y,z,t)$ merupakan temperatur dalam benda (3 dimensi) dan *H(t)* merupakan panas dalam kalori yang dimuat benda. Hubungan panas dan temperatur adalah panas merupakan massa dikali temperatur dan kapasitas panas benda. Pada benda dengan daerah D berlaku:

$$H(t) = \int\int\int_D c\rho u \, dxdydz$$

dengan c menyatakan kapasitas panas dan ρ merupakan rapat panas benda. Perubahan panas

$$\frac{dH}{dt} = \int\int\int_D c\rho u_t \, dxdydz$$

Sedangkan menurut hukum fourier panas mengalir dari panas daerah ke dingin sebanding dengan gradien tamperatur. Tetapi panas tidak dapat hilang dari daerah D kecuali keluar lewat batas, sesuai hukum kekekalan energi. Oleh karena itu perubahan energi panas di D sama dengan fluk panas yamg melintasi batas,

$$\frac{dH}{dt} = \iint_{\partial D} k(\bar{\pi}.\, \nabla u)dS$$

Dengan k faktor pembanding berupa konduktivitas panas. Selanjutnya dengan menggunakan teorema divergensi integral, kedua integral memberikan

$$\iiint_D c\rho u_t \, dxdydz = \iiint_D \nabla.(k\nabla u)dxdydz$$

$$\Leftrightarrow c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla.(k\nabla u)$$

Persamaan terakhir dikenal sebagai persamaan panas. Untuk $c\rho$ dan k konstan persamaan menjadi lebih sederhana

$$\frac{du}{dt} = C^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

dengan $C^2 = k/(c\rho)$ disebut difusi panas.

Sekarang tinjau persamaan panas dalam satu dimensi. Secara fisik diberikan batang yang panjangnya L dan mempunyai tamperatur yang tidak merata. Panas akan merambat mengikuti persamaan:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.15}$$

yang mana u menyatakan temperatur batang pada posisi x, sebagai jarak yang di ukur dari ujung kiri, dan waktu t. Oleh karena syarat batas sama dengan nol

contoh seperti pada getaran dawai, menyelesaikan persamaan (2.15) diperlukan syarat awal dan batas. yaitu

1. Temperatur kedua ujung batang dipertahankan konstan misal :

$$u(0,t) = 0 = u(L,t) \tag{2.16}$$

2. Pada awalnya distribusi temperatur diketahui

$$u(x.0) = f(x) \tag{2.17}$$

Disini diberikan dua syarat batas terkait dengan *x* dan satu syarat awal terkait dengan t yang berbeda pada persamaan geteran dawai. Hal ini dapat dijelaskan secara sederhana dengan melihat persamaan yang hendak diselesaikan, yaitu memuat turunan kedua terhadap *x* dan turunan pertama terhadap *t*. Oleh karena itu untuk menyelesaikannya diperlukan tiga kali integral, yang menghasilkan tiga konstanta integrasi. Konstanta ini dapat ditentukan dengan menggunakan syarat yang sesuai dengan variabel pengintegralannya. Dari persamaan (2.15) dipeoleh dengan menggunakan metode pemisah peubah, dengan memisalkan *u* sebagai perkalian antara fungsi dari peubah *x* dan fungsi dari peubah *t*, yaitu $u(x,t) = F(x)G(t)$ selajutnya kita ikuti langkah-langkah berikut,

1. Turunan *u* terhadap *x* dan juga terhadap *t*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(x)G'(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t)$$

Subtitusikan keduanya pada persamaan (2.18) menghasilkan

$$F(x)G'(t) = C^2 F''(x)G(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{G'(t)}{C^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = K \qquad \text{(konstanta)}$$

$$F''(x) - KF(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow G'(t) - C^2 KG(t) = 0$$

2 . Syarat batas (2.18)

$$u(0,t) = F(0)G(0) = 0$$
$$F(0) = 0$$
$$F(L) = 0$$
$$u(L,t) = F(L)G(t) = 0$$

3. Tak trivial (tidak nol) dari F terjadi pada $K = -p^2$ negatif

$$F''(x) + p^2 F(x) = 0 \Rightarrow F(x) = a\cos px + b\sin px$$

Yang mana $F(0) = 0$ menghasilkan $a = 0$ dan $F(L) = 0$ memberikan jawaban tak trivial jika $\sin pL = 0 \Leftrightarrow pL = n\pi$ untuk $n = 1,2,..$ sehingga diperoleh

$$F_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x$$

4. Pada persamaan

$$G'(t) + C^2 \frac{n^2\pi^2}{L^2} G(t) = 0$$

menghasilkan

$$G_n(t) = e^{-\lambda_n^2 t}$$

dengan $\lambda_n = \dfrac{Cn\pi}{L}$ sebagai nilai eigen.

5. Fungsi Eigen

$$u_n(x,t) := G_n(t)F_n(x) = e^{-\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

6. Dari persamaan (H.1) sebagai kombinasi linier dari fungs eigen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_{nn}^{2}} \sin \frac{n\pi}{L} x \tag{2.19}$$

7. Syarat awal digunakan untuk menentukan A_n

$$u(x.0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x)$$

deret fourier sinus memberikan rumusan untuk menghitung A_n yaitu:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx \tag{2.20}$$

2.9 Metode Iterasi Variasi

Metode iterasi variasi adalah salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial dengan menggunakan pengali lagrange. dan perkiraaan awal dapat dipilih secara bebas dengan kostanta yang tidak diketahui. dengan persamaan awalnya:

$$L_t u + L_{xx} u + Nu = g(x,t) \tag{2.21}$$

$$L_t(.) = \frac{\partial}{\partial t}(.)$$

Bentuk umum dari persamaan (2.2.1) adalah

$$L(u) + N(u) = g(x,t)$$

dengan $L_t, L_x,$ adalah operator linier $t, x,$ dan N adalah operator nonlinier dan $g(x,t)$ adalah fungsi kontinu yang diberikan.

Selajutnya persamaan (2.2.1) dibentuk kedalam metode iterasi variasi yaitu:

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda \{ L_s u_n + (L_{xx} + N)\tilde{u}_n - g(x,t) \} \partial s \tag{2.22}$$

$u_0(x)$ adalah nilai awal yang diketahui

λ adalah fungsi pengali legrange

$\tilde{u}_n$ adalah variasi yang tebatas.dan $u_{n+1}, n \geq 0$

dimana untuk mencari nilai fungsi penggali legrange (λ) yaitu :

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

m adalah banyak orde

Setelah didapat nilai fungsi penggali lagrenge nya, lalu disubtitusikan kedalam persamaan (2.22) untuk mencari nilai u_1 dimana $u_0(x,t) = f(x)$

$$u_1(x,t) \quad = u_0(x,t) + \int_0^t -1\left\{\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} - \Phi(u) - g(x,t)\right\}\partial s\ .$$

$$u_1(x,t) \quad = f(x) + \int_0^t -1\left\{\frac{\partial f(x)}{\partial s} - \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - \Phi(u) - g(x,t)\right\}\partial s\ .$$

Selanjutnya akan dicari nilai

$$u_2(x,t) = u_1(x,t) + \int_0^t -1\left\{\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - \Phi(u) - g(x,t)\right\}\partial s\ .$$

$$u_3(x,t) = u_2(x,t) + \int_0^t -1\left\{\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} - \Phi(u) - g(x,t)\right\}\partial s$$

$$\vdots$$

$$u_n(x,t)$$

sehingga penyelesaian semi analitik persamaan (2.21) adalah $u_1, u_2, u_3, \ldots u_n$ solusi eksaknya diperoleh untuk $n \to \infty$, dan

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t).$$

Contoh 2.7

Tentukan penyelesaian dari persamaan parabolik linear berikut ini

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \tag{2.23}$$

dengan masalah nilai awal $u(x,0) = x^2$ (A.H.A Ali, 2009)

Penyelesaian

Persamaan (2.23) dapat dibentuk $u_t(x,t) - \frac{x^2}{2}u_{xx}(x,t) = 0$, setelah itu akan ditentukan nilai fungsi pengali lagrange (λ) yaitu

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

$$\lambda = \frac{(-1)^1}{(1-1)!}(s-t)^{1-1}$$

$$\lambda = -1$$

Selanjutnya persamaan (2.23) dibentuk kedalam metode iterasi variasi yaitu

$$u_{n+1}(x,y,z,t) = u_n(x,y,z,t) + \int_0^t \lambda\{L_s u_n + (L_{xx} + N)\tilde{u}_n - g\}ds,$$

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \int_0^t \left\{(u_n(x,s))_s - \frac{x^2}{2}(\tilde{u}_n(x,s))_{xx}\right\}ds,$$

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= u_0(x,t) - \int_0^t \left\{(u_0(x,s))_s - \frac{x^2}{2}(\tilde{u}_n(x,s))_{xx}\right\}ds \\ &= x^2 - \int_0^t \left\{0 - \frac{x^2}{2}(2)\right\}ds \\ &= x^2 + \int_0^t x^2 ds \\ &= x^2 + x^2 t \\ &= x^2(1+t) \end{aligned} \tag{2.24}$$

Setelah itu untuk menenentukan $u_2(x,t)$ didapat dengan menggantikan variabel t dengan s pada persaman (2.24), sehingga persamaan (2.24) menjadi $u_1(x,t) = x^2(1+s)$ dan nilai $u_2(x,t)$ didapat yaitu:

$$u_2(x,t) = u_1(x,t) - \int_0^t \left\{ (u_1(x,s))_s - \frac{x^2}{2}(u_1(x,s))_{xx} \right\} ds$$
$$= x^2(1+t) - \int_0^t \left\{ x^2 - \frac{x^2}{2} 2(1+s) \right\} ds$$
$$= x^2(1+t) + \int_0^t (x^2 s) ds$$
$$= x^2(1+t) + \frac{1}{2} x^2 t^2$$
$$= x^2(1 + t + \frac{t^2}{2}) \qquad (2.25)$$

Selanjutnya, untuk menentukan $u_3(x,t)$ dilakukan dengan menggantikan nilai variabel t dengan s pada persamaan (2.25) sehingga diperoleh $u_2(x,t) = x^2(1 + s + \frac{s^2}{2})$ dan $u_3(x,t)$ didapat yaitu :

$$u_3(x,t) = u_2(x,t) - \int_0^t \left\{ (u_2(x,s))_s - \frac{x^2}{2}(u_2(x,s))_{xx} \right\} ds$$
$$= x^2(1 + t + \frac{t^2}{2}) - \int_0^t \left\{ x^2 + x^2 s - \frac{x^2}{2}(2 + 2s + s^2) \right\} ds$$
$$= x^2(1 + t + \frac{t^2}{2}) + \int_0^t (\frac{x^2 s^2}{2}) ds$$
$$= x^2(1 + t + \frac{t^2}{2}) + \frac{x^2 t^3}{6}$$
$$= x^2(1 + t + \frac{t^2}{2\,!} + \frac{t^3}{3!}) \qquad (2.26)$$

Jadi solusi yang didapat dari persamaan $u_t(x,t) - \frac{x^2}{2} u_{xx}(x,t) = 0$ dengan nilai awal $u(x,0) = x^2$ adalah :

$$u_1(x,t) = x^2(1+t)$$
$$u_2(x,t) = x^2(1 + t + \frac{t^2}{2})$$
$$u_3(x,t) = x^2(1 + t + \frac{t^2}{2\,!} + \frac{t^3}{3!})$$
$$\vdots$$

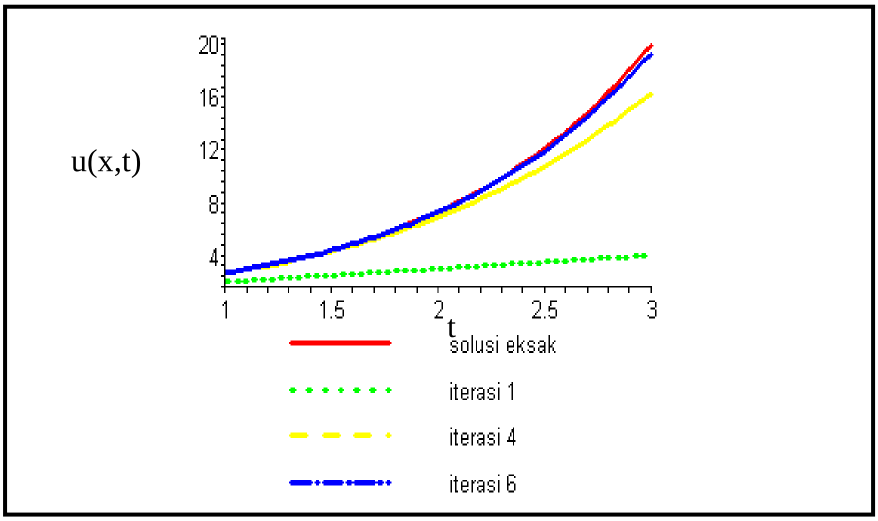
$$u_n(x,t) = x^2(1+t+\frac{t^2}{2\,!}+\frac{t^3}{3!}+...\frac{t^n}{n!})$$

dan solusi exsaknya yaitu:

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty}(1+t+\frac{t^2}{2\,!}+\frac{t^3}{3!}+...\frac{t^n}{n!})x^2 = e^t x^2$$

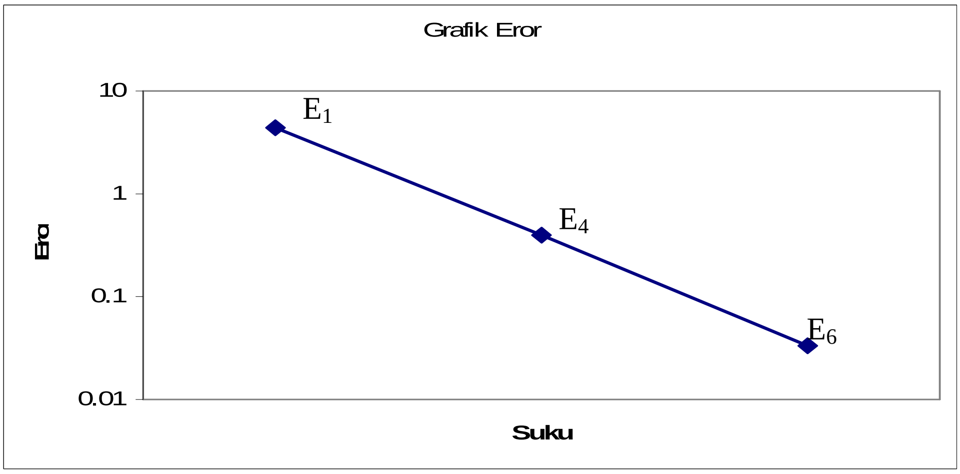
Akurasi penyelesaian pada persamaan (2.23) bergantung pada banyaknya iterasi yang dicari.

Grafik 2.1 menunjukan bahwa akurasi penyelesaian $u(x,t)$ yang diperoleh dengan menggunakan metode iterasi variasi untuk beberapa iterasi terhadap penyelesaian eksak persamaan diferensial parabolik non linier di $x=1$ dan $t=1$ sampai 3



Grafik 2.1 persamaan $u_t(x,t) - \frac{x^2}{2}u_{xx}(x,t) = 0$ dengan nilai awal $u(x,0) = x^2$ pada $t = 1..3$

Berdasarkan pada gambar 2.1 dapat dilihat bahwa, kurva yang dibentuk oleh $u_6(x,t)$ lebih mendekati dibandingkan kurva- kurva lainnya. Hal ini menunjukan iterasi lebih banyak akan mendekati kurva penyelesain eksaknya. Sedangkan untuk memperlihatkan *error* yang dihasilkan oleh beberapa kurva terhadap solusi eksak, dilihat pada gambar 2.2 dibawah ini



Grafik error 2.2 Kecepatan metode iterasi variasi menghampiri persamaan diferensial parabolik nonlinier $u_t(x,t) - \frac{x^2}{2} u_{xx}(x,t) = 0$ dengan $u(x,0) = x^2$ di $u(0.1,2)$ untuk beberapa iterasi.

Contoh 2.5

Tentukan penyelesaikan dari persamaan parabolik nonhomogen berikut ini:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - e^{(-x)}(\cos t - \sin t) = 0 \qquad (2.27)$$

dengan masalah nilai awal $u(x,0) = x$ (Abdoul.R, 2009)

Penyelesaian

Persamaan (2.27) dapat dibentuk $u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) - e^{(-x)}(\cos t - \sin t) = 0$ setelah itu akan dicari nilai fungsi pengali lagrange (λ) yaitu

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

$$\lambda = \frac{(-1)^1}{(1-1)!}(s-t)^{1-1}$$

$$\lambda = -1$$

Selanjutnya persamaan (2.27) dibentuk kedalam metode iterasi variasi yaitu

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,y,z,t) + \int_0^t \lambda\{L_s u_n + (L_{xx} + N)\tilde{u}_n - g\} ds,$$

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) - \int_0^t \{(u_n(x,s))_s - (\tilde{u}_n(x,s))_{xx} - e^{(-x)}(\cos t - \sin t)\} ds,$$

$$u_1(x,t) = u_0(x,t) - \int_0^t \left\{ (u_0(x,s))_s - (u_0(x,s))_{xx} - e^{(-x)}(\cos s - \sin s) \right\} ds$$

$$= x - \int_0^t \left\{ 0 - 0 - e^{(-x)}(\cos s - \sin s) \right\} ds$$

$$= x - \int_0^t e^{(-x)}(\cos s + \sin s) ds$$

$$= x + e^{(-x)}(\sin t + \cos t - 1)$$

$$= x + e^{(-x)}(\cos t + \sin t - 1) \tag{2.28}$$

Setelah itu untuk mencari nilai $u_2(x,t)$ didapat dengan menggantikan variabel t dengan s pada persaman (2.28) ,sehingga persamaan (2.28) menjadi $u_1(x,t) = x + e^{(-x)}(\cos s + \sin s - 1)$ dan nilai $u_2(x,t)$ didapat yaitu:

$$u_2(x,t) = u_1(x,t) - \int_0^t \left\{ (u_1(x,s))_s - (u_1(x,s))_{xx} - e^{(-x)}(\cos s - \sin s) \right\} ds$$

$$u_2(x,t) = x + e^{(-x)}(\cos t + \sin t - 1) - \int_0^t \left\{ e^{(-x)}(\cos s - \sin s) - e^{(-x)} \right.$$

$$\left. (\sin s + \cos s - 1) - e^{(-x)}(\cos s - \sin s) \right\} ds$$

$$= x + e^{(-x)}(\cos t + \sin t - 1) + \int_0^t e^{(-x)}(\sin s + \cos s - 1) ds$$

$$= x + e^{(-x)}(\cos t + \sin t - 1) + e^{(-x)}(\sin t - \cos t - t + 1)$$

$$= x + e^{(-x)}(2\sin t - t) \tag{2.29}$$

Selanjutnya begitu juga dalam mencari nilai $u_3(x,t)$ dilakukan dengan menggantikan nilai variabel t dengan s pada persamaan (2.29) sehingga diperoleh $u_2(x,t) = x + e^{(-x)}(2\sin t - t)$ dan nilai $u_3(x,t)$ didapat yaitu :

$$u_3(x,t) = u_2(x,t) - \int_0^t \left\{ (u_2(x,s))_s - (u_2(x,s))_{xx} - e^{(-x)}(\cos s - \sin s) \right\} ds \}ds$$

$$u_3(x,t) = x + e^{(-x)}(2\sin t - t) - \int_0^t \left\{ 2e^{(-x)}\cos s - e^{(-x)} - (2e^{(-x)}\sin s - e^{(-x)}s) - \right.$$

$$\left. e^{(-x)}(\cos s - \sin s) \right\} ds$$

$$u_3(x,t) = x + e^{(-x)}(2\sin t - t) + \int_0^t e^{(-x)}(\cos s - \sin s - s)\}ds$$

$$u_3(x,t) = x + e^{(-x)}(2\sin t - t) - e^{(-x)}(\cos t + \sin t + \frac{1}{2}t^2 - t)$$

$$u_3(x,t) = x + e^{(-x)}(\sin t - \cos t - \frac{1}{2}t^2) \qquad (2.30)$$

Jadi hampiran yang didapat dari persamaan (2.27)

dengan nilai awal $u(x,0) = x$ adalah

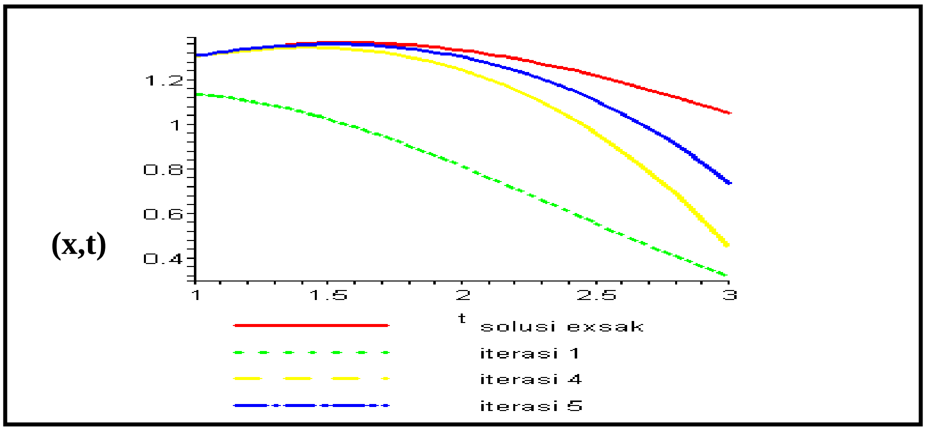
$$u_1(x,t) = x + e^{(-x)}(\cos t + \sin t - 1)$$
$$u_2(x,t) = x + e^{(-x)}(2\sin t - t)$$
$$u_3(x,t) = x + e^{(-x)}(\sin t - \cos t - \frac{1}{2}t^2)$$
$$\vdots$$

dan solusi exsak nya yaitu:

$$u(x,t) = x + e^{(-x)}\sin t$$

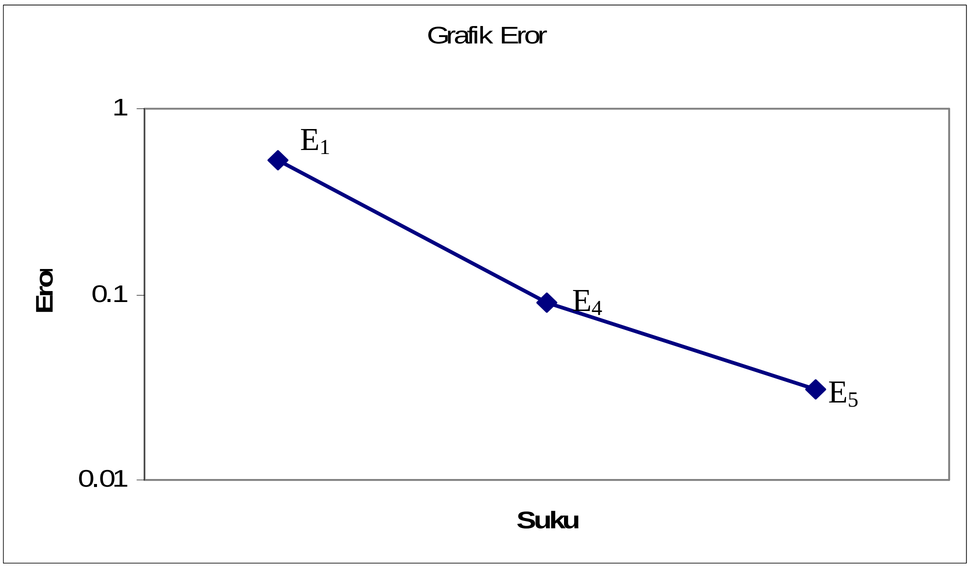
Akurasi penyelesaian pada persamaan (2.27) bergantung pada banyaknya iterasi yang dicari.

Grafik 2.3 menunjukan bahwa akurasi penyelesaian $u(x,t)$ yang diperoleh dengan menggunakan metode iterasi variasi untuk beberapa iterasi terhadap penyelesaian eksak persamaan diferensial parabolik non linier di $x = 1$ dan $t = 1$ sampai 3



Grafik 2.3 pada persamaan (2.27) dengan nilai awal $u(x,0) = x$ pada $t = 1 \ldots 3$

Berdasarkan pada grafik 2.3 dapat dilihat bahwa, kurva yang dibentuk oleh $u_5(x,t)$ lebih mendekati dibandingkan kurva- kurva lainnya. Hal ini menunjukan iterasi lebih banyak akan mendekati kurva penyelesain eksaknya. Sedangkan untuk memperlihatkan *error* yang dihasilkan oleh beberapa kurva terhadap solusi eksak, dilihat pada gambar dibawah ini



Grafik 2.4 kecepatan metode iterasi variasi menghampiri persamaan diferensial parabolik nonlinier $u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) - e^{(-x)}(\cos t - \sin t) = 0$ dengan $u(x,0) = x$ di $u(0.1,2)$ untuk beberapa iterasi.

BAB III

METODOLOGI

Metode yang digunakan penulis pada skripsi ini adalah studi literatur, dengan langkah-lankah sebagai berikut:

1. Menentukan persamaan diferensial parabolik nonlinier dengan persamaan umumnya $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Phi(u) + g(x,t)$ berdasarkan syarat batas $u(0,t) = 0$ $u(1,t) = 0,\ t > 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$.

2. Mengubah persasamaan diferensial parabolik nonlinier kedalam bentuk Metode Iterasi Variasi yaitu:

$$u_{n+1}(x,t) = u_n(x,t) + \int_0^t \lambda\{L_s u_n + (L_x + N)\tilde{u}_n - g(x,t)\}\partial s$$

3. Menentukan nilai m dan mencari nilai fungsi pengali Lagrange (λ) yaitu: $\lambda(s) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$

4. Mencari nilai $u_1, u_2, u_3 \ldots u_n$ sehingga akan ditemukan hampiran dari solusi eksak pada suatu persamaan diferensial parabolik nonlinier dalam bentuk $u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t)$.

BAB IV
PEMBAHASAN

4.1 Persamaan Diferensial Parsial Homogen

Pertimbangan kembali persamaan diferensial parsial parabolik berikut ini

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(u) + g(x,t) \tag{4.1}$$

dengan syarat batas $u(0,t) = u(1,t) = 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$. Persamaan pada (4.1) dapat ditulis dalam bentuk operator $L_t u + L_{xx} u + \Phi(u) = g(x,t)$ atau

$$L_t u = g(x,t) - L_{xx} u - \Phi(u) \tag{4.2}$$

Komponen $\Phi(u)$ pada persaman (4.1) berbentuk nonlinier Nu dan $L_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ adalah operator diferensial. Persamaan (4.2) dikatakan homogen apabila $g(x,t) = 0$. Untuk menyelesaikan persamaan (4.2) dilakukan dengan mengubah persamaan ini kedalam metode iterasi variasi yaitu:

$$u_{n+1} = u_n(x,t) + \int \lambda \left\{ L_s u_n + (L_{xx} + N)\tilde{u}_n - g(x,t) \right\} \partial s \tag{4.3}$$

Selanjutnya akan ditentukan fungsi pengali legrange (λ) yaitu:

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

Kemudian setelah pengali legrange didapat akan ditentukan $u_1(x,t)$ $u_2(x,t), u_3(x,t)\ldots$ dimana $u_0(x,t) = f(x)$

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= u_0(x,t) + \int_0^t -1 \left\{ \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} - \Phi(u) - g(x,t) \right\} \partial s\ . \\ &= f(x) + \int_0^t -1 \left\{ \frac{\partial f(x)}{\partial s} - \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - \Phi(u) - g(x,t) \right\} \partial s\ . \end{aligned}$$

$$u_2(x,t) = u_1(x,t) + \int_0^t -1\left\{\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - \Phi(u) - g(x,t)\right\}\partial s\ .$$

$$u_3(x,t) = u_2(x,t) + \int_0^t -1\left\{\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} - \Phi(u) - g(x,t)\right\}\partial s$$

$$\vdots$$

$$u_n(x,t)$$

Sehingga didapat nilai $u_1, u_2, ...u_n$ dan solusi dari persaman (4.3) yaitu:

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t).$$

Contoh 4.1

Tentukan penyelesaian persamaan differensial parsial parabolik nonlinier berikut ini:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \tag{4.4}$$

Dengan nilai awal $u(x,0) = e^x$ (Mustafa 2004)

Penyelesaian

Penyelesaian persamaan parabolik nonlinier pada persamaan (4.4) dilakukan dengan menentukan nilai $u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t), ...u_n(x,t)$.Namun sebelum itu akan ditentukan nilai fungsi pengali legrange (λ), yaitu

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(1-1)!}(s-t)^{1-1}$$

$$\lambda = -1$$

Oleh karena $u_0(x,t) = e^x$. Selanjutnya $u_1(x,t)$ diperoleh dengan menggunakan

$$u_1 = u_0(x,t) + \int_0^t \lambda(s)\{L_s u_0 + (L_{xx} + N)\tilde{u}_0 - g(x,t)\}\partial s$$

$$= e^x + \int_0^t -1\left\{\frac{\partial u_0}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - u_0^{\ 2} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2\right\}\partial s$$

$$= e^x + \int_0^t -1\{0 - e^x - e^{2x} + e^{2x}\}\partial s$$

$$= e^x + \int_0^t (e^x)\partial s$$

$$= e^x(1+t)$$

Setelah di peroleh $u_1(x,t)$, selanjutnya untuk menentukan $u_2(x,t)$ lihat kembali n $u_1(x,t)$ kemudian ganti t dengan s pada persamaan $u_1(x,t)$ sehingga bentuk $u_1(x,t) = e^x(1+s)$ dan $u_2(x,t)$ didapat :

$$u_2 = u_1(x,t) + \int_0^t \lambda(s)\{L_s u_1 + (L_x + N)\tilde{u}_1 - g(x,t)\}\partial s$$

$$u_2 = e^x(1+t) + \int_0^t -1\left\{\frac{\partial u_1}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - u_1^{\ 2} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2\right\}\partial s$$

$$= e^x(1+t) + \int_0^t -1\{e^x - e^x(1+s) - (e^x + e^x s)^2 + (e^x + e^x s)^2\}\partial s$$

$$= e^x(1+t) + \int_0^t (e^x s)\partial s$$

$$= e^x(1+t+\frac{t^2}{2})$$

Untuk $u_3(x,t)$, dengan cara yang sama ganti t dengan s pada persamaan $u_2(x,t)$, sehingga diperoleh $u_2 = e^x(1+s+\frac{s^2}{2})$ dan $u_3(x,t)$ didapat:

$$u_3(x,t) = u_2(x,t) + \int_0^t \lambda(s)\{L_s u_2 + (L_{xx} + N)\tilde{u}_2 - g(x,t)\}\partial s$$

$$= e^x(1+t+\frac{t^2}{2}) + \int_0^t -1\left\{\frac{\partial u_2}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - u_2^{\ 2} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2\right\}\partial s$$

$$= e^x(1+t+\frac{t^2}{2}) + \int_0^t -1\left\{e^x + e^x s - (e^x + e^x s + e^x\frac{s^2}{2}) - \right.$$

$$\left.(e^x + e^x s + e^x\frac{s^2}{2})^2 + (e^x + e^x s + e^x\frac{s^2}{2})^2\right\}\partial s$$

$$= e^x(1+t+\frac{t^2}{2}) + \int_0^t (e^x\frac{s^2}{2})\partial s$$

$$u_3(x,t) = e^x(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6})$$

dan $u_4(x,t)$ diberikan oleh

$$u_4(x,t) = e^x(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}) + \int_0^t -1\left\{\frac{\partial u_3}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} - u_3^{\ 2} + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2\right\}\partial s$$

$$=e^x(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6})+\int_0^t -1\left\{e^x+e^x s+\frac{e^x s^2}{2}-(e^x+e^x s+e^x\frac{s^2}{2}+\frac{s^3}{6})^2\right.$$

$$\left.-(e^x+e^x s+e^x\frac{s^2}{2}+e^x\frac{s^3}{6})+(e^x+e^x s+e^x\frac{s^2}{2}+e^x\frac{s^3}{6})^2\right\}\partial s$$

$$=e^x(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6})+\int_0^t (e^x\frac{s^3}{6})\partial s$$

$$u_4(x,t)=e^x(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\frac{t^4}{24})$$

Langkah-langkah yang sama dilakukan dan diperoleh

$$u_5(x,t)=e^x\left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{t^5}{5!}\right)$$

$$\vdots$$

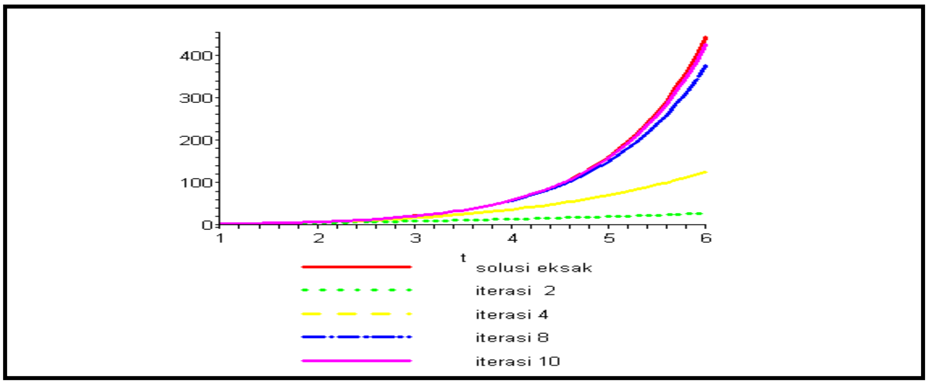
penyelesaian eksak persamaan 4.4 adalah:

$$u(x,t)=e^x\left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\ldots\right)$$

$$u(x,t)=e^x e^t$$

Akurasi penyelesaian dari persamaan (4.1) bergantung kepada banyak iterasi yang digunakan.

Grafik (4.1) menunjukkan bahwa akurasi penyelesaian $u(x,t)$ yang diperoleh dengan menggunakan metode iterasi variasi untuk beberapa iterasi terhadap penyelesaian eksak persamaan diferenesial parabolik nonlinier di $t=1..6$



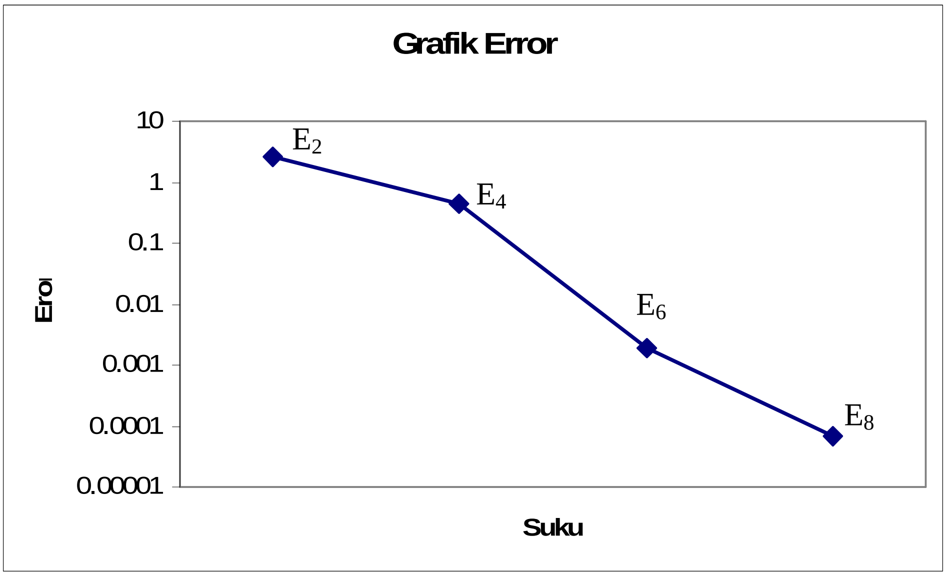
Grafik 4.1 Hampiran penyelesaian persamaan (4.4) dengan $u(x,0)=x^2$ pada $1\le t\le 6$ untuk beberapa iterasi.

Berikut ini akan ditunjukan tabel galat dari masing-masing iterasi.

Tabel 4.1 Perbanding galat dengan nilai $x = 0.1$

t	E_2	E_4	E_8	E_{10}
0.1	0.000188894	0.000000093	0.	0.
1	0.241238728	0.010994787	0.000003379	0.000000029
2	2.640315322	0.429973487	0.001939034	0.000067845

Berdasarkan pada gambar 4.1, dapat dilihat bahwa, kurva yang dibentuk oleh $u_{10}(x,t)$ lebih mendekati dibandingkan kurva- kurva lainnya. Hal ini menunjukan iterasi lebih banyak akan mendekati kurva penyelesain eksaknya. Sedangkan untuk memperlihatkan *error* yang dihasilkan oleh beberapa kurva terhadap solusi eksak, dilihat pada gambar 4.2



Grafik 4.2 kecepatan metode iterasi variasi menghampiri persamaan diferensial parabolik nonlinier pada persamaan (4.4) dengan $u(x,0) = x^2$ di $u(0.1,2)$ untuk beberapa iterasi.

Contoh 4.2

Tuntukan penyelesaian eksak dari persamaan parabolik non linier berikut ini

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x}-u(1-u)=0 \qquad (4.5)$$

dengan nilai awal $u(x,0)=e^{-x}$ (Hossein Jafari 2008)

Penyelesaian

Penyelesaian persamaan parabolik nonlinier pada persamaan (4.5) dilakukan dengan menentukan nilai $u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t), ... u_n(x,t)$ .Tapi sebelum itu akan dicari nilai fungsi pengali legrange (λ) yaitu

$$\lambda=\frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$
$$\lambda=\frac{(-1)^m}{(1-1)!}(s-t)^{1-1}$$
$$\lambda=-1$$

Selanjutnya akan tentukan $u_1(x,t)$,

$$u_1(x,t)=u_0(x,t)+\int_0^t \lambda(s)\{L_s u_0+(L_{xx}+N)\tilde{u}_0-g(x,t)\}\partial s$$
$$=e^{-x}+\int_0^t -1\left\{\frac{\partial u_0}{\partial s}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial (u_o)^2}{\partial x}\right)-u_0(1-u_0)\right\}\partial s$$
$$=e^{-x}+\int_0^t -1\left\{0+\frac{1}{2}\left(-2e^{-2x}\right)-e^{-x}(1-e^{-x})\right\}\partial s$$
$$=e^{-x}+\int_0^t (e^{-2x}+e^{-x}-e^{-2x})\partial s$$
$$=e^{-x}+\int_0^t (e^{-x})\partial s$$
$$u_1(x,t)=e^{-x}(1+t)$$

Setelah diperoleh $u_1(x,t)$, kemudian untuk menentukan $u_2(x,t)$, perhatikan kembali $u_1(x,t)$, dan dengan mengubah t oleh s pada $u_1(x,t)$, maka $u_1(x,t)=e^{-x}(1+s)$ dan $u_2(x,t)$ diperoleh

$$u_2(x,t) = u_1(x,t) + \int_0^t \lambda(s)\left\{L_s u_1 + (L_{xx} + N)\tilde{u}_1 - g(x,t)\right\}\partial s$$

$$= u_1(x,t) + \int_0^t -1\left\{\frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial (u_1)^2}{\partial x}\right) - u_1(1-u_1)\right\}\partial s$$

$$= e^{-x}(1+t) + \int_0^t -1\left\{e^{-x} - e^{-2x}(1+s)^2 - (e^{-x} + te^{-x}) + (e^{-2x} + 2te^{-2x} + t^2 e^{-2x}\right\}$$

$$= e^{-x}(1+t) + \int_0^t (se^{-x})\partial s$$

$$= e^{-x}(1+t+\frac{t^2}{2})$$

Selanjutnya untuk mencari $u_3(x,t)$, dilakukan dengan cara yang sama pada $u_2(x,t)$ dengan $u_2(x,t) = e^{-x}(1+s+\frac{s^2}{2})$, sehingga didapat $u_3(x,t)$:

$$u_3(x,t) = u_2(x,t) + \int_0^t \lambda(s)\left\{L_s u_2 + (L_{xx} + N)\tilde{u}_2 - g(x,t)\right\}\partial s$$

$$= u_2(x,t) + \int_0^t -1\left\{\frac{\partial u_2}{\partial s} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial (u_2)^2}{\partial x}\right) - u_2(1-u_2)\right\}\partial s$$

$$= e^{-x}(1+t+\frac{t}{2}) + \int_0^t -1\left\{e^{-x}(1+s) - \frac{1}{4}e^{-2x}\left(2+2s+s^2\right)^2 - \right.$$

$$\left. e^{-x}(1+t+\frac{t}{2})\left(1 - e^{-x}(1+t+\frac{t}{2})\right)\right\}$$

$$= e^{-x}\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right) + \int_0^t \left(\frac{s^2}{2}e^{-x}\right)\partial s$$

$$= e^{-x}\left(1+t+\frac{t^2}{2}\right) + \frac{t^3}{6}e^{-x}$$

$$u_3(x,t) = e^{-x}\left(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}\right)$$

Langkah yang sama dilakukan untuk $u_4(x,t)$,

$$u_4(x,t) = u_3(x,t) + \int_0^t \lambda(s)\{L_s u_3 + (L_{xx} + N)\tilde{u}_3 - g(x,t)\}\partial s$$

$$= u_3(x,t) + \int_0^t -1\left\{\frac{\partial u_3}{\partial s} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial (u_3)^2}{\partial x}\right) - u_3(1-u_3)\right\}\partial s$$

$$= e^{-x}(1 + t + \frac{t}{2} + \frac{t^3}{6}) + \int_0^t -1\left\{\frac{1}{6}e^{-x}(6 + 6s + 3s^2) - \frac{1}{36}e^{-2x}\left(6 + 6s + 3s^2 + s^3\right)^2\right\}$$

$$= e^{-x}\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}\right) + \int_0^t \left(\frac{s^3}{6}e^{-x}\right)\partial s$$

$$= e^{-x}\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}\right) + \frac{t^4}{24}e^{-x}$$

$$u_4(x,t) = e^{-x}\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24}\right)$$

$\vdots$

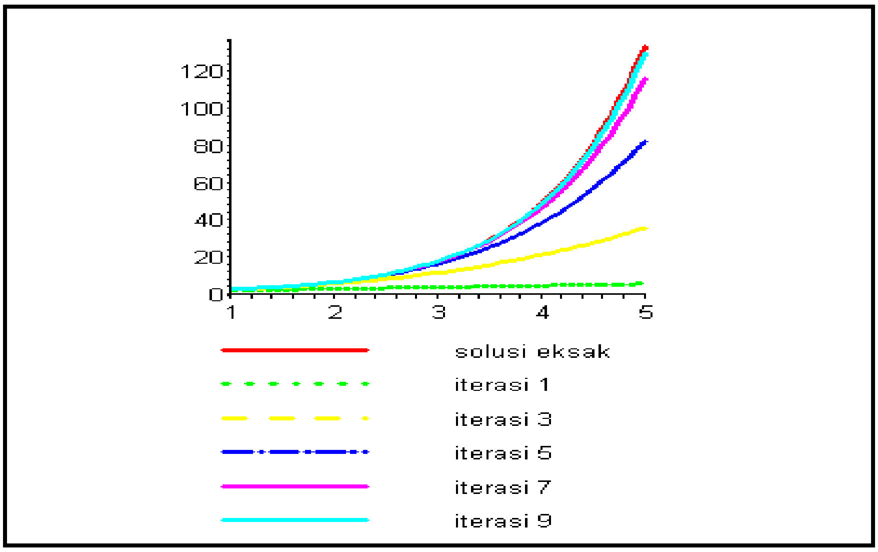
Selanjutnya untuk mencari $u_5(x,t), u_6(x,t),....$ sama halnya mencari $u_4(x,t)$ sehingga nantinya akan didapat penyelesaian hampiran dari solusi eksaknya., dan nilai solusi eksaknya yaitu

$$u(x,t) = e^{-x}\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + ...\right)$$

$$u(x,t) = e^{-x}e^{t}$$

Akurasi penyelesaian dari persamaan (4.5) bergantung kepada banyak iterasi yang dicari

Grafik (4.3) menunjukkan bahwa akurasi penyelesaian $u(x,t)$ yang diperoleh dengan menngunakan metode itersi variasi untuk beberapa itersi terhadap penyelesaian eksak persamaan diferenesial parabolik nonlinier di $t = 0{,}1\ldots2$



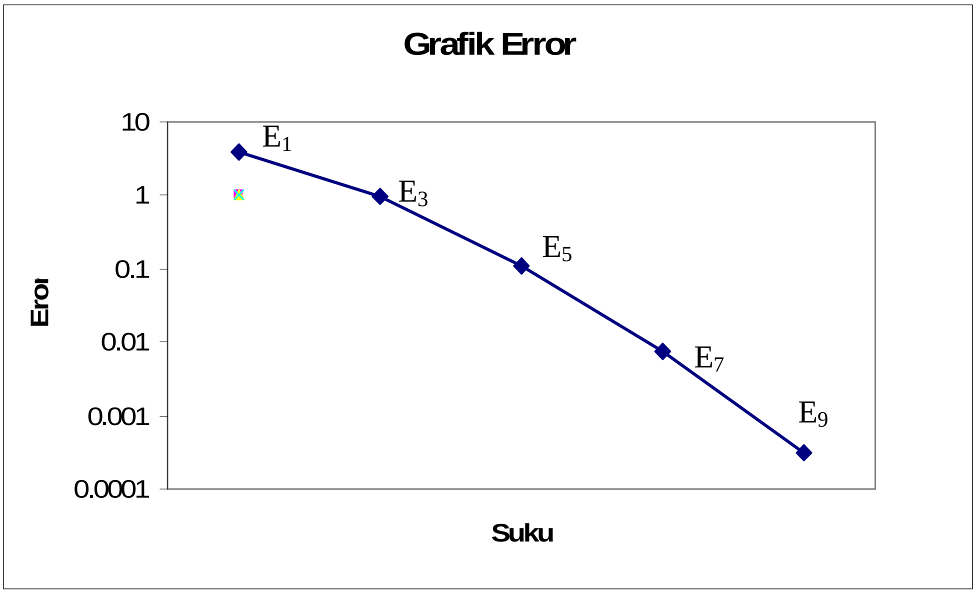
Grafik 4.3. Hampiran penyelesaian persamaan (4.5) dengan $u(x,0) = x^2$ di $1 \le t \le 5$ untuk beberapa iterasi.

Berikut ini akan ditujukan tabel galat dari masing-masing iterasi

Tabel 4.2 Perbandingan galat dari masing-masing suku dengan $x = 0.1$

t	E_3	E_5	E_7	E_9
0.1	0.000038467	0.000000016	0.000000002	0.000000001
1	0.046703329	0.001461459	0.000025208	0.000000274
2	0.955257462	0.110742539	0.007332547	0.000310880

Berdasarkan pada gambar 4.3 dapat dilihat bahwa, kurva yang dibentuk oleh $u_9(x,t)$ lebih mendekati dibandingkan kurva- kurva lainnya. Hal ini menunjukan iterasi lebih banyak akan mendekati kurva penyelesain eksaknya. Sedangkan untuk memperlihatkan *error* yang dihasilkan oleh beberapa kurva terhadap solusi eksak, dilihat pada grafik 4.4.



Grafik 4.4 kecepatan metode iterasi variasi persamaan (4.5) dengan $u(x,0) = x^2$ di $u(0.1,2)$ untuk beberapa iterasi.

Contoh 4.3

Tentukan penyelesaian persamaan differensial parsial parabolik nonlinier berikut ini:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{1}{x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{x}\right)u^2 \tag{4.6}$$

dengan nilai awal $u(x,0) = x$ (A. Soufyane, 2005)

Penyelesaian

Penyelesaian persamaan parabolik nonlinier pada persamaan (4.6) dilakukan dengan menentukan nilai $u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t), \ldots u_n(x,t)$ .Namun sebelum nya akan ditentukan fungsi pengali legrange (λ), yaitu

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(1-1)!}(s-t)^{1-1}$$

$$\lambda = -1$$

Selanjutnya akan ditentukan $u_1(x,t)$ yaitu:

$$u_1 = u_0(x,t) + \int_0^t \lambda(s)\{L_s u_0 + (L_{xx} + N)\tilde{u}_0 - g(x,t)\}\partial s$$

$$= x + \int_0^t -1\left\{\frac{\partial u_0}{\partial s} - \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{1}{x}u_0^{\ 2}\right\}\partial s$$

$$= x + \int_0^t -1\{0 - 0 - x\}\partial s$$

$$= x + \int_0^t (x)\partial s$$

$$u_1 = x(1+t)$$

Setelah didapat $u_1(x,t)$, untuk menentukan $u_2(x,t)$ perhatiakn kembali $u_1(x,t)$, kemudian ganti t dengan s pada persamaan $u_1(x,t)$ sehingga bentuk $u_1(x,t) = x(1+s)$ dan $u_2(x,t)$ didapat :

$$u_2 = u_1(x,t) + \int_0^t \lambda(s)\{L_s u_1 + (L_x + N)\tilde{u}_1 - g(x,t)\}\partial s$$

$$= x(1+t) + \int_0^t -1\left\{\frac{\partial u_1}{\partial s} - \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{1}{x}u_1^{\ 2}\right\}\partial s$$

$$= x(1+t) + \int_0^t -1\left\{x - 0 - \frac{1}{x}\left(x^2 + 2x^2 s + x^2 s^2\right)\right\}\partial s$$

$$= x(1+t) + \int_0^t (2xs + xs^2)\partial s$$

$$u_2 = x(1 + t + t^2 + \frac{1}{3}t^3)$$

Untuk menentukan $u_3(x,t)$, dilakukan cara yang sama pada $u_2(x,t)$, yaitu dengan menggantikan s dengan t pada persamaan $u_2(x,t)$, $u_2 = x(1 + t + t^2 + \frac{1}{3}t^3)$ sehingga diperoleh $u_3(x,t)$

$$u_3 = u_2(x,t) + \int_0^t \lambda(s)\{L_s u_2 + (L_{xx} + N)\tilde{u}_2 - g(x,t)\}\partial s$$

$$= x(1 + t + t^2 + \frac{1}{3}t^3) + \int_0^t -1\left\{\frac{\partial u_2}{\partial s} - \frac{1}{x}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{1}{x}u_2^{\ 2}\right\}\partial s$$

$$= x(1+t+t^2+\frac{1}{3}t^3)+\int_0^t -1\left\{x+2xs+xs^2-0-\frac{1}{x}\left(x(1+t+t^2+\frac{1}{3}t^3)\right)^2\right\}\partial s$$

$$= x(1+t+t^2+t^3+\frac{42t^4}{63}+\frac{21t^5}{63}+\frac{7t^6}{63}+\frac{t^7}{63})$$

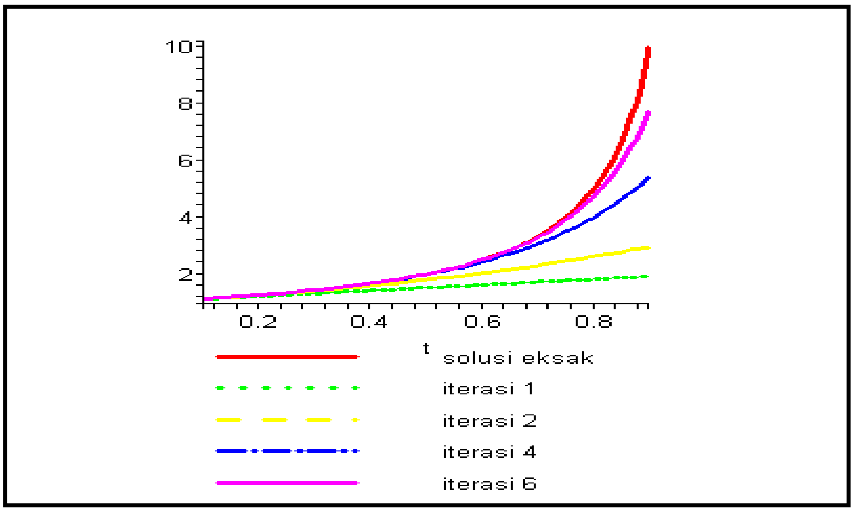
$\vdots$

Untuk $u_4(x,t), u_5(x,t), u_6(x,t), \cdots$ sama seperti mencari $u_3(x,t)$ sehingga akan didapat hampiran dari solusi eksaknya, dan solusi eksak yaitu:

$u(x,t) = \frac{x}{1-t}$ dimana nilai $0 < t < 1$

Akurasi penyelesaian dari persamaan (4.6) bergantung banyak iterasi yang dilibatkan.

Grafik (4.5) menunjukkan bahwa akurasi penyelesaian $u(x,t)$ yang diperoleh dengan menggunakan metode itersi variasi untuk beberapa itersi terhadap penyelesaian eksak persamaan diferenesial parabolik nonlinier di $0 < t < 1$



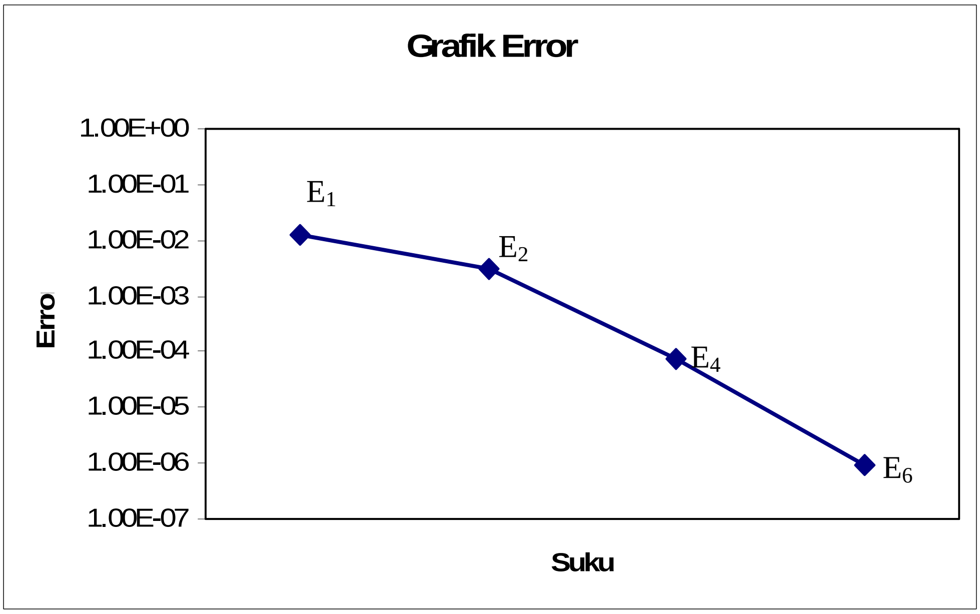
Grafik 4.5. Hampiran persamaan (4.6) dengan $u(x,0) = x$ untuk beberapa iterasi.

Berikut ini akan ditunjukan tabel galat dari masing-masing iterasi .

Tabel 4.3 Galat dari masing-masing suku dengan $x = 0.1$

T	E_1	E_2	E_4	E_6
0.1	0.001111111	0.000077778	0.000001728	0.000000002
0.2	0.005000000	0.000733333	0.000007330	0.000000034
0.3	0.012857142	0.002957142	0.000075682	0.000000923

Berdasarkan pada gambar grafik 4.5, dapat dilihat bahwa, kurva yang dibentuk oleh lebih mendekati dibandingkan kurva- kurva lainnya. Hal ini menunjukan iterasi lebih banyak akan mendekati kurva penyelesain eksaknya. Sedangkan untuk memperlihatkan *error* yang dihasilkan oleh beberapa kurva terhadap solusi eksak, dilihat pada gambar 4.6



Grafik 4.6 kecepatan metode iterasi variasi persamaan (4.6) dengan $u(x,0) = x$ di $u(0.1,0.3)$ untuk beberapa iterasi.

4.2 Persamaan Diferensial Parsial Nonhomogen

Pertimbangan kembali persamaan diferensial parsial parabolik berikut ini

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(u) + g(x,t) \tag{4.7}$$

dengan syarat batas $u(0,t) = u(1,t) = 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$. Persamaan pada (4.7) dapat ditulis dalam bentuk operator $L_t u + L_{xx} u + \Phi(u) = g(x,t)$

atau

$$L_t u = g(x,t) - L_{xx} u - \Phi(u) \tag{4.8}$$

Komponen $\Phi(u)$ pada persaman (4.7) berbentuk nonlinier Nu dan $L_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ adalah operator diferensial.

Persamaan (4.8) dikatakan homogen apabila $g(x,t) \neq 0$ .Untuk menyelesaikan persamaan (4.8) dilakukan dengan mengubah persamaan ke dalam metode iterasi variasi yaitu:

$$u_{n+1} = u_n(x,t) + \int \lambda \{ L_s u_n + (L_{xx} + N)\tilde{u}_n - g(x,t) \} \partial s \tag{4.9}$$

Selanjutnya akan ditentukan fungsi pengali legrange (λ) yaitu:

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

Kemudian setelah didapat fungsi pengali legrange akan ditentukan $u_1(x,t)$ $u_2(x,t), u_3(x,t)\ldots$ diamana $u_0(x,t) = f(x)$

$$u_1(x,t) \quad = u_0(x,t) + \int_0^t -1 \left\{ \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} - \Phi(u) - g(x,t) \right\} \partial s \ .$$

$$u_1(x,t) \quad = f(x) + \int_0^t -1 \left\{ \frac{\partial f(x)}{\partial s} - \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - \Phi(u) - g(x,t) \right\} \partial s \ .$$

$$u_2(x,t) = u_1(x,t) + \int_0^t -1 \left\{ \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - \Phi(u) - g(x,t) \right\} \partial s \ .$$

$$u_3(x,t) = u_2(x,t) + \int_0^t -1 \left\{ \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial s} - \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} - \Phi(u) - g(x,t) \right\} \partial s$$

$$\vdots$$

$$u_n(x,t)$$

Sehingga didapat nilai $u_1, u_2, ...u_n$ dan solusi dari persaman (4.9) yaitu:

$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t).$$

Contoh (4.4)

Tentukan solusi exsak dari persamaan diferansial nonlinier nonhomogen berikut ini

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x^2. \qquad (4.10)$$

dengan masalah nilai awal $u(x,0) = x^2$

Penyelesaian

Penyelesaian persamaan parabolik nonlinier pada persamaan (4.10) dengan menentukan nilai pengali legrange (λ) yaitu:

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(m-1)!}(s-t)^{m-1}$$

$$\lambda = \frac{(-1)^m}{(1-1)!}(s-t)^{1-1}$$

$$\lambda = -1$$

Untuk memperoleh nilai solusi eksak $u\ (x,t)$ dilakukan dengan mengubah persamaan (4.10) kedalam metode iterasi variasi. Selanjutnya akan ditentukan $u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t),...$ yaitu:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0(x,t) + \int_0^t \lambda\left\{\frac{\partial u_0}{\partial s} - u_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2x^2\right\}\partial s \\ &= x^2 + \int_0^t -1\{0-(2x^2)+2x^2\}\partial s \\ &= x^2 + \int_0^t 0\,\partial s \\ &= x^2 \end{aligned}$$

Setelah didapat nilai $u_1(x,t)$,untuk mencari nilai $u_2(x,t)$ sama halnya dengan mencari nilai pada $u_1(x,t)$, namun nilai $u_1(x,t)$ sama dengan $u_0(x,t)$ maka nilai $u_2(x,t), u_3(x,t)...$ akan sama. Sehingga solusi exsak dari persamaan (4.10) yaitu:

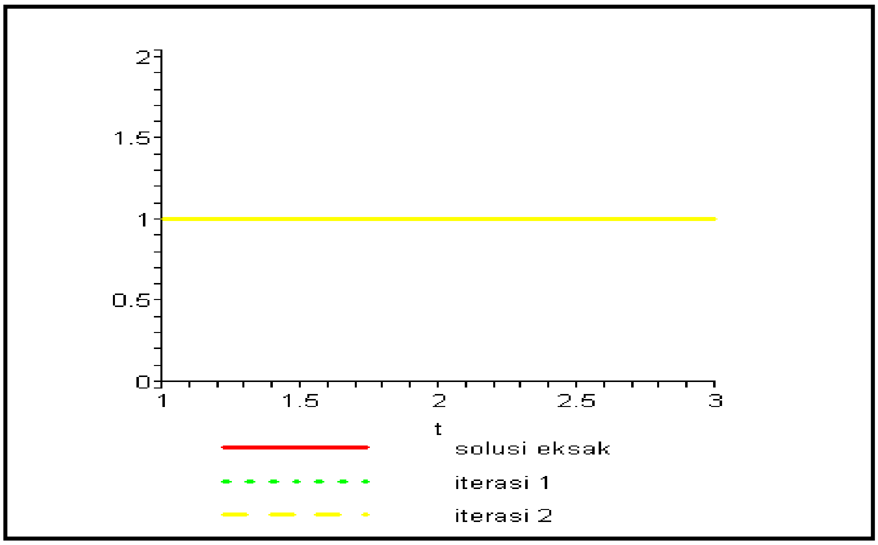
$$u(x,t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x,t).$$

$$u(x,t) = x^2$$

Tabel 4.4 perbandingan galat dari masing-masing suku dengan $x = 0.1$

t	*U(x,t)* Solusi eksak	U_1	E_1
0.1	0.01	0.01	0.00
1	0.01	0.01	0.00

Grafik 4.7 menunjukan bahwa akurasi penyelesaian $u(x,t)$ yang diperoleh dengan menggunakan metode iterasi variasi



Grafik 4.7 Hampiran penyelesaian persamaan diferensial parabolik nonlinier pada persamaan 4.10 dengan $u(x,0) = x^2$.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dari skripsi ini diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

a) Penyelesaikan persamaan diferensial parabolik nonlinier dengan persamaan umum $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(u) + g(x,t)$ baik yang homogen $g(x,t) = 0$ maupun yang nonhomogen $g(x,t) \neq 0$ dilakukan dengan menggunakan pengali legrange dan nilai awal $u(x,0) = f(x)$. Sehingga nantinya akan didapat nilai hampiran untuk mendekati nilai solusi eksak.

b) Hasil yang diperoleh dengan menggunakan metode iterasi variasi semakin mendekati nilai eksak yang dapat dilihat pada gambar grafik 4.1 contoh 4.1 dan pada gambar grafik 4.7 contoh 4.4 untuk persamaan yang nonhomogen $g(x,t) \neq 0$ dan semakin banyak iterasi yang digunakan maka hasilnya akan semakin akurat dan cukup efektif dengan kata lain dapat memperkecil error hal ini dapat dilihat pada gambar grafik 4.1 contoh 4.1,dan pada gambar 4.7 contoh 4.4 terlihat bahwa nilai error nya sama dengan nol. Ini membuktikan bahwa metode iterasi variasi bagus untuk menyelesaikan persamaan diferensial parabolik nonlinier.

5.2 Saran

Sikripsi ini membahas tentang penylesaian persamaan diferensial parabolik nonliner $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Phi(u) + g(x,t)$ baik yang homogen $g(x,t) = 0$ maupun yang nonhomogen $g(x,t) \neq 0$ berdasarkan nilai awal $u(0,t) = u(1,t) = 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$ dengan metode iterasi variasi. Bagi pembaca yang berminat melanjutkan skripsi ini, penulis sarankan untuk menyelesaikan persamaan hiperbolik dengan metode iterasi variasi.

DAFTAR PUSTAKA

Abbasbandy, S dan E. Svivanian, Application variational iteration method for system of nonlinear volterra's integro-diferential equation, *Mathematical and computational applications,* vol. 14, No.2, pp 147-158, 2009.

Abdoul R ghotip, et. al, Aplication of variatioanl iteration method to parabolic problem, *applied mathematical sciences* Vol.3.No. 19. 927-934.2009.

Ali, A. H. A dan K. R. Raslan, Variational iteration method for solving partial differantial equation with variabel coefficients, *Chaos. solitons ang fractals* 40. 1520-1529. 2009

Batiha, B application of variational iteration mehod to linear partial diffrential equation, *Applied mathematical sciences* vol.3 No.50. (2009) 2491-2498

He, J. H, Some asyptotic method for strongly nonlinear equation. *International juornal of modern physics* B Vol. 20, No.10. 1141-1199, 2006.

Santoso, W. *Persamaan diferensial biasa,* Erlangga, Jakarta 1988.

Soliman, A. A dan M.A Abdou, Numerical solutios of nonlinear evolution equation using variational iteration method, *Computation and applied mathematics* 111-120. 2007.

Souyane, A. dan M. Boulamlf, solution of linear and nonlinear parabolik equation by decomposition method, *Applied mathematic and computation* vol 162 (2005) 687-693.

Stavroulakis, I. P dan S. A Tersian, *Partial defferantial equatuion an introduction with matematica and maple*, word scientific publishing, 2004.