MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA ORDE EMPAT KUNTZMANN BERDASARKAN RATA-RATA HARMONIK

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh

MIRNA
10954006792

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2013

MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA ORDE EMPAT KUNTZMANN BERDASARKAN RATA-RATA HARMONIK

<u>MIRNA</u>
10954006792

Tanggal Sidang : 29 Oktober 2013
Tanggal Wisuda : Februari 2014

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Penyelesaian persamaan diferensial biasa secara numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta telah banyak mengalami modifikasi. Modifikasi metode Runge-Kutta bertujuan untuk memperkecil *error* dari metode tersebut. Tugas akhir ini membahas modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik dan membandingkan *error* dari metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann dan metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann yang telah dimodifikasi berdasarkan rata-rata harmonik. Berdasarkan hasil pembahasan diperoleh modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann mempunyai *error* orde lima $O \quad ^{5}$. Hasil simulasi numerik dalam beberapa persoalan persamaan diferensial, metode Rungge Kutta orde empat Kuntzmann memiliki *error* yang lebih kecil dibandingkan dengan metode Rungge Kutta orde empat Kuntzmann yang telah dimodifikasi.

Kata kunci: *Metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann, rata-rata harmonik*

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis ucapkan kepada Allah SWT, karena atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan judul "**Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann Berdasarkan Rata-Rata Harmonik**". Sholawat beserta salam senantiasa kita hadiahkan kepada Nabi Besar Muhammad SAW, mudah-mudahan kita semua mendapat syafa'atnya kelak.

Tugas akhir ini merupakan salah satu syarat kelulusan untuk memperoleh gelar Sarjana (S1), dalam penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini, penulis tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu pertama kali rasa terima kasih tak terhingga penulis haturkan kepada Ayahanda (Isman) dan Ibunda (Hartati) tercinta, yang telah melimpahkan kasih sayang juga materi yang tak mungkin terbalas, yang tak pernah lelah memberi motivasi, semangat serta do'a, semoga Allah SWT selalu merahmati Ayah dan Ibu dan memberikan kebahagian dunia dan akhirat, Amin.

Dalam penyusunan dan penyelesian tugas akhir ini, penulis banyak sekali mendapat bimbingan, bantuan, arahan, nasehat, petunjuk, perhatian serta semangat dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan hati tulus ikhlas penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. DR. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika serta Pembimbing Akademik penulis dan Penguji II yang telah memberi kritikan dan saran sehingga tugas akhir ini dapat selesai.
4. Bapak Wartono, M.Sc selaku Pembimbing tugas akhir yang senantiasa ada dan memberi bimbingan serta arahan kepada penulis sehingga tugas akhir ini dapat diselesaikan.

5. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku Penguji I yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga tugas akhir dapat selesai.
6. Semua Dosen Jurusan Matematika yang banyak memberi masukan dan motivasi.
7. Abang dan Adikku (Topan, Aan, Icha dan Rahmat) yang tak lelah memberi motivasi dan semangat serta do'a yang tak terbalas.
8. Kakak dan Abang Iparku (Mia dan Putra) yang selama ini telah membantu biaya saya kuliah.
9. Sahabatku (Wanty, Darmy, Uni, Rena, Lyly dan Izul) selalu memberi dukungan dan selalu ada menemani penulis disaat suka dan duka.
10. Teman-teman Jurusan Matematika Angkatan 2009, kakak dan adik tingkat serta teman-teman yang tak dapat disebutkan satu persatu.

Semoga kebaikan yang telah mereka berikan kepada penulis menjadi amal kebaikan dan mendapat balasan yang setimpal dari Allah SWT. Amin.

Dalam penulisan ini penulis sadar bahwa tugas akhir ini belum sempurna. Namun, penulis sudah berusaha untuk mencapai hasil yang maksimal. Oleh karna itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan. Akhir kata penulis berharap semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pihak-pihak yang memerlukan.

. Pekanbaru, 29 Oktober 2013

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial merupakan presentasi model matematika dalam persoalan sains dan matematika dalam bidang ilmu teknik, ilmu fisika, biologi, kimia dan sosial yang telah dirumuskan dengan model matematika dalam bentuk persamaan yang memuat fungsi dan turunannya. Persamaan diferensial terdiri dari persamaan diferensial linear dan nonlinear. Pesamaan diferensial tersebut dapat diselesaikan secara analitik. Tapi tidak semua permasalahan yang dimodelkan ke bentuk persamaan diferensial dapat diselesaikan dengan mudah khususnya persamaan diferensial nonlinear, kadang tidak ditemukan solusi secara analitik. Oleh kerena itu, metode numerik digunakan untuk menyelesaikan persoalan dimana perhitungan secara analitik tidak dapat digunakan.

Terdapat beberapa metode secara numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial salah satunya adalah metode Runge-Kutta. Metode Runge-Kutta merupakan metode sering digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial biasa karena metode Runge-Kutta proses penyelesaiannya dilakukan tahap demi tahap tanpa harus mencari turunan-turunan fungsi dengan orde yang lebih tinggi.

Metode Runge-Kutta memiliki banyak bentuk berdasarkan pengambilan nilai parameter bebas diantaranya, Runge-Kutta orde empat Klasik, Runge-Kutta orde empat Kutta, Runge-Kutta orde empat Gill, dan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann (Lapidus, 1971). Metode Runge-Kutta telah banyak mengalami modifikasi dengan tujuan untuk memperkecil *error* dari metode tersebut sehingga hampirannya lebih mendekati nilai eksaknya. Penelitian terhadap modifikasi metode Runge-Kutta orde empat telah dilakukan oleh beberapa peneliti diantaranya modifikasi Runge-Kutta orde empat Klasik berdasarkan rata-rata harmonik telah dilakukan oleh Sanugi, dkk (1993). Selanjutnya untuk metode

Runge-Kutta orde empat Kutta berdasarkan rata-rata harmonik telah dilakukan oleh Ardianti (2011).

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan oleh peneliti mengenai modifikasi Runge-Kutta orde empat berdasarkan rata-rata harmonik, maka penulis tertarik untuk melanjutkan penelitian mengenai metode Runge-Kutta dengan judul ”Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann Berdasarkan Rata-Rata Harmonik”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka dapat dirumuskan masalah pada tugas akhir ini adalah “Bagaimana menentukan bentuk modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik”.

1.3 Batasan Masalah

Pada tugas akhir ini penulis hanya membatasi pembahasan pada bentuk Runge-Kutta orde empat Kuntzmann, dan persamaan diferensial biasa orde satu.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. Menentukan rumusan modifikasi metode Runge-Kutta Kuntzmann orde empat berdasarkan rata- rata harmonik.
b. Mengaplikasikan metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik tersebut ke dalam contoh soal.

1.5 Manfaat Penulisan

Manfaat dari tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

a. Mendapatkan model baru dari modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik.
b. Mendapatkan nilai hampiran dan galat dari modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini disusun atas lima bab.

BAB I Pendahuluan

Pada bab ini berisikan latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penulisan dan sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Bab ini berisikan tentang teori-teori yang menunjang untuk menyelesaikan permasalahan dalam tugas akhir diantaranya persamaan diferensial orde satu, metode Taylor, metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann, galat pemotongan dan rata-rata harmonik.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan metodologi yang digunakan penulis dalam tugas akhir untuk memperoleh hasilnya.

BAB IV Hasil dan Pembahasan

Bab ini berisi tentang bagaimana langkah-langkah dan hasil dari bentuk modifikasi Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik.

BAB V Penutup

Pada bab ini berisikan kesimpulan dari tugas akhir dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan Diferensial Orde Satu

Definisi 2.1 (Richard Bronson): Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan suatu fungsi yang dicari dan turunannya. Suatu persamaan diferensial dikatakan suatu persamaan diferensial biasa jika fungsi yang tidak diketahui terdiri dari satu variabel independen.

Ekspresi matematis $y', y'', y''', y^{(4)}, \ldots, y^{(n)}$ sering digunakan untuk menuliskan masing-masing turunan pertama, kedua, ketiga, keempat,…dan ke-*n* dari fungsi *y* terhadap variabel independen. Sedangkan pangkat tertinggi yang muncul pada masing-masing turunan tersebut dikenal dengan orde. Jika y' maka persamaan tersebut dikatakan sebagai persamaan diferensial orde satu dan jika y'' maka disebut sebagai persamaan diferensial orde dua. Begitu seterusnya sampai orde-*n*.

Bentuk standar dari persamaan diferensial biasa orde satu dalam fungsi $y\ x$ yang dicari adalah

$$y' = f\ x, y \tag{2.1}$$

dengan nilai awal $y\ x_0 = y_0$.

Berdasarkan cara penyelesaiannya persamaan diferensial orde satu dapat diklasifikasikan menjadi:

a. Persamaan diferensial terpisah (*separable equation*), metode integral langsung (*direct integration*).
b. Persamaan diferensial orde satu linear.
c. Persamaan diferensial homogen, metode substitusi.
d. Persamaan diferensial eksak, menggunakan faktor integrasi.

2.2 Deret Taylor

Teorema 2.1 (Rinaldi Munir): Andaikan f dan semua turunannya, $f', f'', f''', \ldots$, kontinu di dalam selang $[a, b]$. Misalkan $x_0 \in [a, b]$ maka untuk nilai-nilai x disekitar x_0 dan $x \in [a, b]$, $f(x)$ dapat diperluas (diekspansi) ke dalam deret Taylor, maka:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(x_0) \qquad (2.2)$$

Apabila $a = x_0$ atau $b = x$ maka persamaan (2.2) dapat dinyatakan sebagai:

$$f(b) = f(a) + (b - a)\, f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(b - a)^n}{n!} f^n(a) \qquad (2.3)$$

Bukti : Teorema dasar kalkulus

Teorema dasar kalkulus menyatakan bahwa

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$$ atau

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(x)\,dx \qquad (2.4)$$

dan bentuk integral parsial

$$\int_a^b u\,dv = uv|_a^b - \int_a^b v\,du \qquad (2.5)$$

dengan menerapkan integral parsial pada bentuk $\int_a^b f'(x)\,dx$, dengan mengasumsikan bahwa:

$$u = f'(x) \qquad dv = dx$$
$$du = f''(x)dx \qquad v = x$$

dan berdasarkan persamaan (2.5) di peroleh:

$$f(b) = f(a) + xf'(x)\Big|_a^b - \int_a^x x f''(x)\,dt$$

$$= f(a) + bf'(b) - af'(a) - \int_a^b (x)f''(x)\,dx$$

$$= f(a) + \int_a^b bf''(x)\,dx + bf'(a) - af'(a) - \int_a^b (x)f''(x)\,dx$$

$$= f(a) + (b - a)f'(a) + \int_a^b (b - x)f''(x)\,dx \tag{2.6}$$

dengan catatan $\int_a^b bf''(x)dx = bf'(b) - bf'(a)$ maka diperoleh persamaan (2.6).

Terapkan kembali integral parsial pada persamaan $\int_a^b (b - x)f''(x)dx$ dengan memisalkan:

$$u = f''(x), \qquad dv = (b - x)dx$$

$$du = f'''(x)\,dx, \qquad v = -\frac{(b - x)^2}{2}$$

kemudian didapatkan:

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \left[-\frac{(b - x)^2}{2} f''(x)\right]_a^b$$

$$- \int_a^b -\frac{(b - x)^2}{2} f'''(x)\,dx$$

maka diperoleh

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2} f''(a)$$

$$+ \frac{1}{2}\int_a^b (b - a)^2 f'''(x)\,dx \tag{2.7}$$

dengan mengulangi proses tersebut sebanyak *n* kali, maka akan diperoleh suatu deret yang disebut **deret Taylor**.

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(b - a)^n$$

$$+ R_n(b) \tag{2.8}$$

dengan

$$R_n(b) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1}, \qquad a < \xi < b \tag{2.9}$$

■

Deret Taylor orde-*n* pada persamaan (2.8), $R_n(b)$ merupakan bentuk sisa atau eror untuk $f(b)$, dengan mengganti $a = x_0$, $b = x_0 + ?$ dan $R_n(b) =$

$O(h^{n+1})$, untuk $k = 0,1,2,\dots,n$ maka teorema (2.8) dan bentuk sisanya dapat ditulis sebagai:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{n+1}(x_0)}{n!}h^{n+1}$$

$$+ \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1} \qquad (2.10)$$

atau

$$f(x_0 + h) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{m}(x_0)}{m!}h^{m} + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

maka,

$$f(x_0 + h) = \sum_{m=0}^{n} \frac{f^{m}(x_0)}{m!}h^{m} + O(h^{n+1}) \qquad (2.11)$$

Persamaan Taylor untuk dua variabel (*x*,*y*) dapat ditulis :

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$$

$$+ \frac{(x - x_0)^2}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} + (x - x_0)(y - y_0)\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}$$

$$+ \frac{(y - y_0)}{2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n} (x - x_0)^{n-j}(y - y_0)^{j}\frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^{n-j}\partial x^{j}}$$

Untuk deret Taylor dua variabel $(x + h, y + k)$ dapat ditentukan dengan rumus:

$$f(x + h, y + k) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{i} f(x,y) \qquad (2.12)$$

Persamaan (2.12) dapat dijelaskan sebagai berikut:

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{0} f(x,y) = f$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{1} f(x,y) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{2} f(x,y) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x,y) = h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3h^2k\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} + 3hk^2\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} + k^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$$

Penyelesaian persamaan differensial biasa dengan menggunakan deret Taylor sebagai berikut :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad , \quad y' = f(x,y)$$

Bentuk turunan persamaan differensial dalam bentuk f untuk orde-orde yang lebih tinggi dapat ditulis sebagai berikut :

$$f'(x_i, y_i) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

dengan

$$f'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}f = f_x + ff_y$$

$$f''(x,y) = \frac{\partial (f_x + ff_y)}{\partial x} + \frac{\partial (f_x + ff_y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial (f_x + ff_y)}{\partial x} + \frac{\partial (f_x + ff_y)}{\partial y}f$$

$$= f_{xx} + f_x f_y + f_{yx}f + f_{xy}f + f(f_y f_y + ff_{yy})$$

$$f^{(3)}(x,y) = f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f_x f_{xy} + 5ff_y f_{xy} + 3f^2 f_{xyy} + 3ff_y f_{yy}$$
$$+ 4f^2 f_x f_{yy} + f^3 f_{yyy} + f_{xx}f_y + f_y^2 (f_x + ff_y)$$

Bentuk dari turunan f di atas dapat ditulis sebagai berikut :

$$y' = f \tag{2.13}$$

$$y'' = f' = f_x + f_y f \tag{2.14}$$

$$y^{(3)} = f'' = f_{xx} + f_{xy}f + f_{yx}f + f_{yy}f^2 + f_y f_x + f_y^2 f$$
$$= f_{xx} + 2f_{xy}f + f_{yy}f^2 + f_x f_y + f_y^2 f \tag{2.15}$$

$$y^{(4)} = f''' = f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f_x f_{xy} + 5ff_y f_{xy} + 3f^2 f_{xyy} + 3ff_y f_{yy}$$
$$+ 4f^2 f_x f_{yy} + f^3 f_{yyy} + f_{xx}f_y + f_y^2 (f_x + ff_y) \tag{2.16}$$

Berdasarkan deret Taylor dengan mengekspansi y_{n+1} di sekitar y_n maka diperoleh:

$$y_{n+1} = y_n + hy' + \frac{1}{2!}h^2 y'' + \frac{1}{3!}h^3 y''' + \frac{1}{4!}h^4 y'''' + \cdots \tag{2.17}$$

Jika disubstitusikan persamaan (2.13) sampai (2.16) ke persamaan 2.17 maka untuk deret Taylornya dapat ditulis sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} = {} & y_n + hf + \frac{h^2}{2}\left(f_x + ff_y\right) \\
& + \frac{h^3}{6}\left(f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy} + f_x f_y + ff_y^2\right) \\
& + \frac{h^4}{24}\left(f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f_3 f_{xy} + 5ff_y f_{xy} + 3f^2 f_{xyy} + 4f^2 f_y f_{yy}\right. \\
& \left. + f^3 f_{yyy} + f_{xx} f_y + f_y^2\left(f_x + ff_y\right)\right) + \cdots
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

dengan hanya mengambil turunan terhadap *y* pada persamaan persamaan Taylor (2.18), maka akan diperoleh :

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} = {} & y_i + hf + \frac{h^2}{2} ff_y + \frac{h^3}{6}\left(ff_y{}^2 + f^2 f_y\right) + \frac{h^4}{24}\left(f^3 f_{yyy} + 4f^2 f_y f_{yy} +\right. \\
& \left. ff_y^3\right) + \frac{h^5}{120}\left(f^4 f_{yyyy} + 11 f^2 f_y{}^2 f_{yy} + 4f^3 f_{yy}{}^2 + 7f^3 f_y f_{yyy} +\right. \\
& \left. ff_y{}^4\right)
\end{aligned} \tag{2.19}
$$

2.3 Metode Runge-Kutta Orde Empat

Secara teoritis, deret Taylor dapat digunakan untuk menyelesaikan sebarang persamaan diferensial, tetapi fungsi $f(x, y)$ perlu diturunkan beberapa kali untuk memperoleh hasil yang cukup teliti dan juga tidak semua fungsi mudah dihitung turunannya, terutama fungsi-fungsi yang rumit. Cara lain yang lebih efisien dibanding deret Taylor adalah dengan metode Runge-Kutta, karena proses penyelesaiannya dilakukan tahap demi tanpa harus mencari turunan-turunan fungsi dengan orde yang lebih tinggi.

Bentuk umum metode Runge-Kutta orde s ialah:

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i \tag{2.21}$$

dengan

$$k_i = f\left(x_n + c_i h, y_n + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j\right), i = 1, 2, 3, \ldots, s$$

dan $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$, $\sum_{i=1}^{s} b_i = 1$

Metode Runge-Kutta dengan *s* langkah dapat ditunjukkan ke dalam sebuah tabel. Tabel ini dikenal sebagai tabel Butcher, berikut adalah bentuk umum metode Runge-Kutta digambarkan dalam tabel Butcher.

Tabel 2.1 Bentuk Umum Metode Runge-Kutta Orde *s*

0	0	0	0	...	0
c_2	a_{21}	0	0	...	0
c_3	a_{31}	a_{32}	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
c_n	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	...	0
	b_1	b_2	b_3	...	b_n

Misalkan di ambil $s = 4$, maka diperoleh persamaan umum metode Runge-Kutta orde empat dalam bentuk:

$$y_{n+1} = y_n + h\ b_1k_1 + b_2k_2 + b_3k_3 + b_4k_4 \qquad (2.22)$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + c_2h, y_n + ha_{21}k_1)$$

$$k_3 = f\ x_n + c_3h, y_n + h\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2$$

$$k_4 = f\ x_n + c_4h, y_n + h(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3)$$

Sehingga bentuk umum metode Runge-Kutta orde empat digambarkan dalam tabel Butcher berikut:

Tabel 2.2 Bentuk Umum Metode Runge-Kutta Orde Empat

0	0	0	0	0
c_2	a_{21}	0	0	0
c_3	a_{31}	a_{32}	0	0
c_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	0
	b_1	b_2	b_3	b_4

Berdasarkan tabel 2.2 metode Runge-Kutta orde empat memiliki tiga belas konstanta. Untuk memperoleh nilai $b_1, b_2, b_3, b_4, c_2, c_3, c_4, a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}$ dan a_{43} adalah dengan cara menjabarkan k_1, k_2, k_3 dan k_4 dalam bentuk deret Taylor. Dengan menjabarkan k_i yang hanya variabel y sehingga diperoleh:

$$k_1 = f(y_n)$$
$$k_2 = f(y_n + h a_{21} k_1)$$
$$k_3 = f(y_n + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2))$$
$$k_4 = f(y_n + h(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3))$$

maka diperoleh deret Taylor :

$$k_1 = f(y_n) = f \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
k_2 &= f(y_n + h a_{21} k_1) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(h a_{21} k_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)^i f \\
&= f + h a_{21} k_1 f_y + \frac{h^2}{2} a_{21}{}^2 k_1{}^2 f_{yy} + \frac{h^3}{6} a_{21}{}^3 k_1{}^3 f_{yyy} + \frac{h^4}{24} a_{21}{}^4 k_1{}^4 f_{yyyy} \\
&\quad + O(h^5) \\
&= f + h a_{21} f f_y + \frac{h^2}{2} a_{21}{}^2 f^2 f_{yy} + \frac{h^3}{6} a_{21}{}^3 f^3 f_{yyy} + \frac{h^4}{24} a_{21}{}^4 f^4 f_{yyyy} \\
&\quad + O(h^5)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}
k_3 &= f(y_n + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2) \frac{\partial}{\partial y}\right)^i f \\
&= f + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2) f_y + \frac{h^2}{2}(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)^2 f_{yy} \\
&\quad + \frac{h^3}{6}(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)^3 f_{yyy} + \frac{h^4}{24}(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)^4 f_{yyyy} + O(h^5) \\
&= (f + h(a_{31} + a_{32}) f f_y + h^2 a_{21} a_{32} f f_y^2 + \frac{h^3}{2} a_{21}^2 a_{32} f^2 f_{yy} f_y \\
&\quad + \frac{h^2}{2}(a_{31} + a_{32})^2 f^2 f_{yy} + h^3 (a_{31} + a_{32}) a_{32} a_{21} f^2 f_y f_{yy}
\end{aligned}$$

$$+\frac{h^3}{6}\left(a_{31}+a_{32}\right)^3 f^3 f_{yyy}+\cdots \qquad (2.25)$$

$$k_4 = f\left(y_n + h\left(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3\right)\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\left(h\left(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3\right)\frac{\partial}{\partial y}\right)^i f$$

$$= f + h\left(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3\right) f_y + \frac{h^2}{2}\left(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3\right)^2 f_{yy}$$

$$+\frac{h^3}{6}\left(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3\right)^3 f_{yyy}$$

$$+\frac{h^4}{24}\left(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3\right)^4 f_{yyyy} + O\left(h^5\right)$$

$$= f + h\left(a_{41} + a_{42} + a_{43}\right) f f_y + h^2 a_{21} a_{32} f f_y^2 + \frac{h^3}{2} a_{42} a_{21}{}^2 f^2 f_y f_{yy}$$

$$+ h^2 a_{43}\left(a_{31} + a_{32}\right) f f_y^2 + \frac{h^3}{2}\left(a_{31} + a_{32}\right)^2 a_{43} f^2 f_{yy} f_y$$

$$+ h^3 a_{43} a_{32} a_{21} f f_y^3 + \frac{h^2}{2}\left(a_{41} + a_{42} + a_{43}\right)^2 f^2 f_{yy}$$

$$+\frac{h^3}{2}\left(a_{41} + a_{42} + a_{43}\right) a_{43} a_{21} f^2 f_y f_{yy}$$

$$+\frac{h^3}{2}\left(a_{41} + a_{42} + a_{43}\right)\left(a_{31} + a_{32}\right) a_{43} f^2 f_y f_{yy}$$

$$+\frac{h^3}{6}\left(a_{41} + a_{42} + a_{43}\right) f^3 f_{yyy} + \cdots \qquad (2.26)$$

Untuk mendapatkan nilai parameter b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42} dan a_{43} adalah dengan cara mensubtitusikan persamaan (2.23), (2.24), (2.25) dan (2.26) ke persamaan (2.22). Kemudian gunakan penekatan deret Taylor untuk mendapatkan parameter tersebut sehingga diperoleh:

$$a_{21} = c_2$$

$$a_{31} + a_{32} = c_3$$

$$a_{41} + a_{42} + a_{43} = c_4$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1$$

$$b_2 a_{21} + b_3(a_{31} + a_{32}) + b_4\left(a_{41} + a_{42} + a_{43}\right) = \frac{1}{2}$$

$$b_2a_{21}^2 + b_3(a_{31} + a_{32})^2 + b_4\ \ a_{41} + a_{42} + a_{43}\ \ {}^2 = \frac{1}{3}$$

$$b_2a_{21}^3 + b_3(a_{31} + a_{32})^3 + b_4\ \ a_{41} + a_{42} + a_{43}\ \ {}^3 = \frac{1}{4}$$

$$b_3a_{32}a_{21} + b_4a_{42}a_{21} + b_4a_{43}(a_{31} + a_{32}) = \frac{1}{6}$$

$$b_3a_{32}a_{21}^2 + b_4a_{42}a_{21}^2 + b_4a_{43}(a_{31} + a_{32})^2 = \frac{1}{12}$$

$$b_3a_{21}a_{32}(a_{31} + a_{32}) + b_4\ \ a_{41} + a_{42} + a_{43}\ \ \ a_{21}a_{42} + a_{43}(a_{31} + a_{32})\ \ = \frac{1}{8}$$

$$b_4a_{43}a_{32}a_{21} = \frac{1}{24} \tag{2.27}$$

Setelah didapatkan persamaan (2.27) yang terdiri dari 11 persamaan dan 13 parameter, maka dapat ditentukan nilai parameter-paremeternya. Berdasarkan pengambilan parameter bebasnya metode Runge-Kutta memiliki banyak bentuk diantaranya:

a. Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann

Metode Runge-Kutta orde empat Kunztmann adalah metode Runge-Kutta dengan nilai parameter awal:

$$c_2 = \frac{2}{5}, c_3 = \frac{3}{5}\ \ dan\ \ c_4 = 1 \tag{2.28}$$

Persamaan (2.27) terdiri dari 11 persamaan dan 13 parameter, maka dapat kita tentukan nilai parameter-parameternya, dengan mensubstitusi dan mengeleminasi nilai parameter pada persamaan (2.28) ke persamaan (2.27) diperoleh nilai parameter:

$$a_{21} = \frac{2}{5}, a_{31} = -\frac{3}{20}, a_{32} = \frac{3}{4}, a_{41} = \frac{19}{44}, a_{42} = -\frac{15}{44}, a_{43} = \frac{40}{44}$$

$$b_1 = \frac{55}{360}, b_2 = \frac{125}{360}, b_3 = \frac{125}{360}\ dan\ b_4 = \frac{55}{360} \tag{2.29}$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (2.28) dan (2.29) ke persamaan (2.22) maka diperoleh metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{360}\ \ 55k_1 + 125k_2 + 125k_3 + 55k_4 \tag{2.30}$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{2}{5}\square, y_n + \frac{2}{5}k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{3}{5}h, y_n + -\frac{3}{20}k_1 + \frac{3}{4}k_2)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + \frac{1}{44}\ 19k_1 + -15k_2 + 40k_3\ )$$

Setelah didapatkan persamaan (2.30) maka nilai parameter-parameter dari metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann dapat digambarkan pada tabel Butcher.

Tabel 2.3 Nilai Parameter Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{3}{5} & -\frac{3}{20} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\
1 & \frac{19}{44} & -\frac{15}{44} & \frac{40}{44} & 0 \\
\hline
 & \frac{55}{360} & \frac{125}{360} & \frac{125}{360} & \frac{55}{360}
\end{array}$$

b. Metode Runge-Kutta Orde Empat Kutta

Metode Runge-Kutta orde empat Kutta adalah metode Runge-Kutta dengan nilai parameter awal:

$$c_2 = \frac{1}{3}, c_3 = \frac{2}{3}\ dan\ c_4 = 1 \qquad (2.31)$$

dengan mensubstitusikan nilai parameter pada persamaan (2.31) ke persamaan (2.27), dan selanjutnya dengan mengeliminasi diperoleh nilai parameter:

$$a_{21} = \frac{1}{3}, a_{31} = -\frac{1}{3}, a_{32} = 1, a_{41} = 1, a_{42} = -1, a_{43} = 1$$

$$b_1 = \frac{1}{8}, b_2 = \frac{3}{8}, b_3 = \frac{3}{8}\ dan\ b_4 = \frac{1}{8} \qquad (2.32)$$

Kemudian subtitusikan persamaan (2.31) dan (2.32) ke persamaan (2.22) diperoleh metode Runge-Kutta orde empat Kutta:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{8}\ k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4 \qquad (2.33)$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{3}\square, y_n + \frac{1}{3}k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{2}{3}\square, y_n + -\frac{1}{3}k_1 + k_2)$$

$$k_4 = f(x_n + \square, y_n + k_1 - k_2 + k_3)$$

Setelah didapatkan nilai parameter-parameter tersebut, maka metode Runge-Kutta orde empat Kutta dapat digambarkan pada tabel Butcher.

Tabel 2.4 Nilai Parameter Metode Runge-Kutta Orde Empat Kutta

0	0	0	0	0
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	0
1	1	-1	1	0
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

c. Metode Runge-Kutta Orde Empat Klasik

Metode Runge-Kutta orde empat Klasik adalah metode Runge-Kutta dengan nilai awal:

$$c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = \frac{1}{2} \; dan \; c_4 = 1 \tag{2.34}$$

dengan cara mensubstitusi dan mengeliminasi persamaan (2.34) ke persamaan (2.27) diperoleh nilai parameter:

$$a_{21} = \frac{1}{2}, a_{31} = 0, a_{32} = \frac{1}{2}, a_{41} = 0, a_{42} = 0, a_{43} = 1$$

$$b_1 = \frac{1}{6}, b_2 = \frac{1}{3}, b_3 = \frac{1}{3} \; dan \; b_4 = \frac{1}{6} \tag{2.35}$$

Selanjutnya subtitusikan persamaan (2.34) dan (2.35) ke persamaan (2.22) diperoleh metode Runge-Kutta orde empat Klasik:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \; k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 \tag{2.36}$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}\square, y_n + \frac{1}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_n, y_n + k_2)$$

$$k_4 = f(x_n + \square, y_n + k_3)$$

Setelah didapatkan nilai parameter-parameter tersebut, maka metode Runge-Kutta orde empat Klasik dapat digambarkan pada tabel Butcher.

Tabel 2.5 Nilai Parameter Metode Runge-Kutta Orde Empat Klasik

0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

d. Metode Runge-Kutta Orde Empat Gill

Metode Runge-Kutta orde empat Gill adalah metode Runge-Kutta dengan nilai awal:

$$c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = \frac{1}{2} \; dan \; c_4 = 1 \qquad (2.37)$$

dengan cara mensubstitusi dan mengeliminasi persamaan (2.37) ke persamaan (2.27) diperoleh nilai parameter:

$$a_{21} = \frac{1}{2}, a_{31} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \; a_{32} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, a_{41} = 0, a_{42} = \frac{-\sqrt{2}}{2},$$

$$a_{43} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, b_1 = \frac{1}{6}, b_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{6}, b_3 = \frac{2 - \sqrt{2}}{6} \; dan \; b_4 = \frac{1}{6} \qquad (2.38)$$

kemudian subtitusikan persamaan (2.37) dan (2.38) ke persamaan (2.22) diperoleh metode Runge-Kutta orde empat Gill:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\square}{6} \; k_1 + (2 - \sqrt{2})k_2 + (2 - \sqrt{2})k_3 + k_4 \qquad (2.39)$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{\sqrt{2}-1}{2}k_1 + \frac{2-\sqrt{2}}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x_n + h, y_n + \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)k_2 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)k_3\right)$$

Setelah didapatkan nilai parameter-parameter tersebut, maka metode Runge-Kutta orde empat Kutta dapat digambarkan pada tabel Butcher.

Tabel 2.6 Nilai Parameter Metode Runge-Kutta Orde Empat Gill

0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	0	0
1	0	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{6}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{6}$	$\frac{1}{6}$

2.4 Galat Pemotongan

Penyelesaian suatu model matematika secara numerik akan memberikan hasil aproksimasi atau pendekatan yang berbeda dengan penyelesaian secara analitik. Adanya perbedaan inilah yang disebut dengan galat atau *error*.

Pada aproksimasi polinomial di titik $n + 1$ data, terdapat perbedaan atau galat terhadap nilai sesungguhnya atau nilai eksak. Nilai perbedaan tersebut dapat dicari dengan menggunakan galat pemotongan. Dengan mensubtitusikan sebuah derajat polinomial $p + 1$ kedalam rumus orde p dapat dibangun sebuah bentuk *error* :

$$T(x, h) = Ch^{p+1}y^{(p+1)}(\varepsilon)$$

Aplikasi Algoritma dan proses perhitungan dari bentuk x_0 ke $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$ dalam pengertian yang luas dapat didefinisikan sebagai metode satu langkah, yang secara umum ditulis sebagai :

$$y_{n+1} = y_n + h\Phi(x_n, y_n; h) \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

dengan Φ adalah fungsi naik yang terdapat unsur x_n, y_n dan menggunakan h. Definisikan $y(x)$ sebagai solusi eksak untuk persamaan differensial biasa, sehingga untuk setiap x akan berlaku :

$$T(x, h) = y(x) + h\Phi(x, y(x); h) - y(x + h)$$

atau

$$Galat\ Pemotongan = Nilai\ Sebenarnya - Nilai\ Hampiran$$

atau

$$GP = NS - NH$$

Galat untuk metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann diperoleh dengan langkah yang sama dalam menentukan persamaan metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann dengan menjabarkan k_1, k_2, k_3 dan k_4 pada persamaan (2.30) kedalam bentuk deret Taylor sampai orde lima (h^5). Sehingga di peroleh:

$$y_{n+1} = y_i + hf + \frac{h^2}{2} f f_y + \frac{h^3}{6}\left(f f_y^{\,2} + f^2 f_y\right) + \frac{h^4}{24}\left(f^3 f_{yyy} + 4 f^2 f_y f_{yy} + f f_y^3\right)$$
$$+ h^5\left(\frac{31}{3600} f^4 f_{yyyy} + \frac{103}{1800} f^3 f_y f_{yyy}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{30} f^3 f_{yy}^{\,2} + \frac{91}{880} f^2 f_y^{\,2} f_{yy}\right) \qquad (2.40)$$

Kemudian bandingkan persamaan (2.40) dan persamaan (2.19), sehingga diperoleh galat dari metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann sebagai berikut:

$$Galat = h^5\left(\frac{1}{3600} f^4 f_{yyyy} - \frac{1}{900} f^3 f_y f_{yyy} + \frac{1}{30} f^3 f_{yy}^{\,2} + \frac{31}{2640} f^2 f_y^{\,2} f_{yy}\right.$$
$$\left. - \frac{1}{120} f f_y^{\,4}\right)$$

atau

$$Galat = h^5\left(0{,}000278\, f^4 f_{yyyy} - 0{,}00111\, f^3 f_y f_{yyy} + 0{,}03333\, f^3 f_{yy}^{\,2}\right.$$
$$\left. + 0{,}011742\, f^2 f_y^{\,2} f_{yy} - 0{,}00833\, f f_y^{\,4}\right)$$

2.5 Rata-Rata Harmonik

Rata-rata harmonik didefinisikan sebagai:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

atau

$$H = n \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \right)^{-1}$$

Rata-rata harmonik untuk dua variabel yang setara x_1 dan x_2 dapat ditulis :

$$H = \frac{2}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}$$

$$= \frac{2}{\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}}$$

$$= 2 \times \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$$

$$H = \frac{2 x_1 x_2}{x_1 + x_2} \qquad (2.41)$$

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Pada penulisan skripsi ini penulis hanya membahas teori tentang modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann, dengan menggunakan metode *research library* (penelitian kepustakaan) yang berguna untuk mengumpulkan data dan informasi yang dibutuhkan dari buku-buku, jurnal, maupun sumber-sumber dari internet yang ada hubungannya dengan penulisan, yang akan diuraikan.

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Memperkenalkan bentuk metode Runge Kutta orde empat Kuntzmann, yaitu:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{360}\; 55k_1 + 125k_2 + 125k_3 + 55k_4 \tag{3.1}$$

2. Berdasarkan persamaan (3.1) bentuk persamaan baru yang mengandung unsur rata-rata aritmatik.
3. Kemudian substitusikan persamaan $H = \frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}$ ke dalam persamaan (3.1) $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{360}\; 55k_1 + 125k_2 + 125k_3 + 55k_4$ sehingga menghasilkan bentuk persamaan baru yang disebut sebagai Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik
4. Ekspansi k_1, k_2, k_3 dan k_4 dengan deret Taylor sehingga diperoleh 13 parameter yaitu $b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}$ dan a_{33} dan 11 persamaan.
5. Setelah didapat Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik, kemudian menentukan nilai parameter dari Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik dengan menggunakan *software* Maple 13.
6. Selanjutnya mengaplikasikan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik tersebut ke dalam contoh soal dengan menggunakan *software* Matlab 5.3 untuk memperoleh nilai galatnya.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann Berdasarkan Rata-Rata Harmonik

Berdasarkan pengambilan parameter bebasnya Metode Runge-Kutta orde empat memiliki banyak bentuk diantaranya, Runge-Kutta orde empat Klasik, Runge-Kutta orde empat Kutta, Runge-Kutta orde empat Gill, dan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann (Lapidus, 1971)

Perhatikan kembali bentuk umum dari metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{360}\; 55k_1 + 125k_2 + 125k_3 + 55k_4 \qquad (4.1)$$

atau

$$y_{n+1} = y_n + \frac{5h}{360}\; 11k_1 + 25k_2 + 25k_3 + 11k_4 \qquad 4.2$$

Berdasarkan persamaan (4.2) dapat dibentuk persamaan baru yang mengandung unsur rata-rata aritmatik sebagai berikut :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{5h}{180}\; 11\; \frac{k_1 + k_2}{2} + 14\; \frac{k_2 + k_3}{2} + 11\; \frac{k_3 + k_4}{2} \qquad (4.3)$$

Persamaan (4.3) merupakan persamaan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata aritmatik. Selanjutnya, bentuk persamaan (4.3) ke bentuk rata-rata harmonik. Berikut persamaan umum rata-rata harmonik :

$$H = \frac{2k_i k_{i+1}}{k_i + k_{i+1}} \qquad (4.4)$$

dengan,

$$i = 1, 2, 3$$

Kemudian subsitusi persamaan (4.3) ke persamaan (4.1) sehingga didapat :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{10h}{180}\; 11\; \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} + 14\; \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} + 11\; \frac{k_3 k_4}{k_3 + k_4} \qquad (4.5)$$

Persamaan (4.5) dapat disederhanakan menjadi:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{18}\left(11\,\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2} + 14\,\frac{k_2k_3}{k_2 + k_3} + 11\,\frac{k_3k_4}{k_3 + k_4}\right)$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$
$$k_2 = f(x_n + c_2h, y_n + ha_{21}k_1)$$
$$k_3 = f\left(x_n + c_3h, y_n + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)\right)$$
$$k_4 = f\left(x_n + c_4h, y_n + h(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3)\right) \qquad (4.6)$$

Persamaan (4.6) dikenal sebagai modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik dengan:

$$c_2 = a_{21}$$
$$c_3 = (a_{31} + a_{32})$$
$$c_4 = (a_{41} + a_{42} + a_{43}).$$

Nilai dari $a_{21}, a_{31}, a_{32}, a_{41}, a_{42}$ dan a_{43} diperoleh dengan terlebih dahulu menentukan nilai dari k_1, k_2, k_3, dan k_4. Jabarkan nilai k_1, k_2, k_3 dan k_4 kedalam bentuk deret Taylor, sehingga akan diperoleh persamaan (2.23) sampai (2.26). Persamaan (2.23) sampai (2.26) akan disubstitusikan ke persamaan (4.6) dan untuk menghindari adanya pembagian dua polinomial maka persamaan (4.6) dapat ditulis sebagai berikut :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\text{pembilang}}{\text{penyebut}} \qquad (4.7)$$

Selanjutnya dengan membandingkan persamaan (4.7) dengan deret Taylor pada persamaan (2.15), sehingga diperoleh :

$$y_n + \frac{\text{pembilang}}{\text{penyebut}} = y_n + T$$

atau

$$\text{pembilang} = T \times \text{penyebut} \qquad (4.8)$$

dengan

$$\text{pembilang} = h/18\{11(k_1k_2)(k_2 + k_3)(k_3 + k_4) + 14\,k_2k_3(k_1 + k_2)(k_3 + k_4) + 11\,k_3k_4(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)\}$$

dan

$$\text{penyebut} = k_1 + k_2 \quad k_2 + k_3 \quad k_3 + k_4$$

Substitusikan nilai k_1, k_2, k_3, dan k_4 yang telah diperoleh pada persamaan (2.23) sampai (2.26) ke dalam persamaan (4.8) dan untuk penyederhanaan aljabar dipilih $A = a_{31} + a_{32}$ dan $B = a_{41} + a_{42} + a_{43}$ sehingga diperoleh :

$$pembilang = T \times penyebut$$

$$= \frac{25}{54}f^6A^3f_{yyy} + \frac{11}{54}f^6B^3f_{yyy} + \frac{25}{54}f^6{a_{21}}^3f_{yyy} - f^4{f_y}^3A^2$$

$$- \frac{4}{3}f^4{f_y}^3A - \frac{2}{3}f^4{f_y}^3B - f^4{f_y}^3{a_{21}}^2 - \frac{4}{3}f^4{f_y}^3a_{21} - \frac{4}{3}f^5f_{yy}f_y$$

$$- \frac{1}{3}f^6f_{yyy} - \frac{1}{3}f^4{f_y}^3 + \frac{64}{9}{a_{21}}^2f^4{f_y}^3a_{32} + \frac{47}{18}{a_{21}}^2f^4{f_y}^3a_{42}$$

$$+ \frac{25}{18}f^5A^3f_yf_{yy} + \frac{23}{6}f^4A^2{f_y}^3a_{43} + \frac{23}{9}{a_{21}}^2f^4{f_y}^3A + {a_{21}}^2f^4{f_y}^3B$$

$$+ \frac{23}{9}a_{21}f^4{f_y}^3A^2 + \frac{25}{18}{a_{21}}^3f^5f_yf_{yy} + \frac{11}{9}A^2f^4{f_y}^3B$$

$$+ \frac{25}{18}f^5{a_{21}}^2a_{32}f_yf_{yy} + \frac{11}{18}f^5a_{42}{a_{21}}^2f_yf_{yy} + \frac{11}{18}f^5a_{43}f_yA^2f_{yy}$$

$$+ \frac{11}{9}f^4a_{43}{f_y}^3a_{21}a_{32} + \frac{32}{9}a_{21}f^5f_yA^2f_{yy} + \frac{47}{36}f^5a_{21}f^5f_yB^2f_{yy}$$

$$+ \frac{47}{18}a_{21}f^4{f_y}^3a_{43}A + \frac{25}{9}f^4Af_ya_{21}a_{32} + \frac{23}{12}f^5Af_yB^2f_{yy}$$

$$+ \frac{23}{6}f^4A{f_y}^3a_{21}a_{42} + \frac{32}{9}f^5{a_{21}}^2f_{yy}Af_y + \frac{47}{36}f^5{a_{21}}^2f_{yy}Bf_y$$

$$+ 5a_{21}f^4{f_y}^3AB + \frac{23}{12}f^5A^2f_{yy}Bf_y + \frac{23}{6}f^4a_{21}a_{32}{f_y}^3B$$

$$+ \frac{25}{9}f^5Aa_{32}a_{21}f_yf_{yy} - 2f^5f_yA^2f_{yy} - 4f^4{f_y}^3a_{21}a_{32} - f^5f_yB^2f_{yy}$$

$$- 2f^4{f_y}^3a_{21}a_{42} - 2f^4{f_y}^3a_{43}A - 3f^4{f_y}^3a_{21}A - 2f^4{f_y}^3a_{21}B$$

$$- f^4{f_y}^3AB - \frac{4}{3}f^5f_{yy}Af_y - \frac{2}{3}f^5f_{yy}Bf_y - 2f^5f_y{a_{21}}^2f_{yy}$$

$$- \frac{4}{3}f^5f_{yy}a_{21}f_y + \frac{11}{9}f^5f_yf_{yy}a_{21}a_{42} + \frac{11}{9}f^5f_yf_{yy}a_{43} \;\square^4$$

$$+ \frac{23}{6} B f^4 {f_y}^2 A + \frac{25}{9} f^4 a_{21} a_{32} {f_y}^2 - 2 f^4 {f_y}^2 B + \frac{11}{9} f^4 {f_y}^2 a_{21} a_{42}$$

$$+ \frac{64}{9} a_{21} f^4 {f_y}^2 A + \frac{47}{18} B f^4 {f_y}^2 a_{21} - \frac{4}{3} f^5 f_{yy} - 4 f^4 {f_y}^2 a_{21}$$

$$+ \frac{11}{9} f^4 {f_y}^2 a_{43} A - 4 f^4 {f_y}^2 A + \frac{25}{18} {a_{21}}^2 f^4 {f_y}^2 + \frac{25}{18} f^4 A^2 {f_y}^2$$

$$+ \frac{25}{18} f^5 {a_{21}}^2 f_{yy} + \frac{25}{18} f^5 A^2 f_{yy} - \frac{4}{3} f^4 {f_y}^2 + \frac{11}{18} B^2 f^5 f_{yy} \quad h^3$$

$$+ \frac{25}{9} a_{21} f^4 f_y + 4 f^4 f_y + \frac{25}{9} f^4 A f_y$$

$$+ \frac{11}{9} f^4 B f_y \quad h^2 \tag{4.9}$$

Selanjutnya dengan memperhatikan h^n dengan $n \leq 4$ pada persamaan (4.9), diperoleh:

$h^2 f^4 f_y$: $\frac{25}{9} a_{21} + \frac{25}{9} A + \frac{11}{9} B - 4 = 0$

$h^3 f^5 f_{yy}$: $\frac{25}{18} a_{21}^2 + \frac{25}{18} A^2 + \frac{11}{18} B^2 - \frac{4}{3} = 0$

$h^3 f^4 f_y^2$: $\frac{25}{18} a_{21}^2 + \frac{25}{18} A^2 + \frac{23}{6} AB + \frac{47}{18} a_{21} B + \frac{64}{9} a_{21} A$

$+ \frac{25}{9} a_{21} a_{32} + \frac{11}{9} a_{21} a_{42} + \frac{11}{9} a_{43} A - 4 a_{21} - 4A$

$- 2B - \frac{4}{3} = 0$

$h^4 f^6 f_{yyy}$: $\frac{25}{54} a_{21}^3 + \frac{25}{54} A^3 + \frac{11}{54} B^3 - \frac{1}{3} = 0$

$h^4 f^5 f_y f_{yy}$: $\frac{25}{18} a_{21}^3 + \frac{25}{18} A^3 + \frac{32}{9} a_{21}^2 A + \frac{32}{9} a_{21} A^2 + \frac{47}{36} a_{21} B^2$

$+ \frac{47}{36} a_{21}^2 B + \frac{11}{18} a_{21}^2 a_{42} + \frac{11}{18} a_{43} A^2 + \frac{11}{9} B a_{21} a_{42} + \frac{11}{9} AB a_{43}$

$+ \frac{23}{12} A^2 B + \frac{23}{12} AB^2 + \frac{25}{18} a_{21}^2 a_{32} + \frac{25}{9} a_{21} a_{32} A - 2 a_{21}^2$

$- 2A^2 - B^2 - \frac{4}{3} a_{21} - \frac{4}{3} A - \frac{2}{3} B - \frac{4}{3} = 0$

$h^4 f^4 f_y^3$: $\frac{23}{9} a_{21}^2 A + \frac{23}{9} a_{21} A^2 + a_{21}^2 B + \frac{64}{9} a_{21}^2 a_{32} - a_{21}^2$

$$+ \frac{47}{18} a_{21}^2 a_{42} + \frac{23}{6} a_{21} a_{42} A + \frac{47}{18} a_{21} a_{43} A - 2a_{43} A$$
$$+ \frac{25}{9} a_{21} a_{32} A + 5a_{21} AB + \frac{11}{9} a_{21} a_{32} a_{43} + \frac{23}{6} a_{21} a_{32} B$$
$$+ \frac{23}{6} a_{43} A^2 + \frac{11}{9} A^2 B - \frac{4}{3} A - \frac{2}{3} B - \frac{4}{3} a_{21} - A^2 - \frac{1}{3}$$
$$- 4a_{21} a_{32} - 2a_{21} a_{42} - 3a_{21} A - AB - 2a_{21} B = 0 \qquad (4.10)$$

Ambil nilai $A = \frac{3}{5}$ dan $B = 1$ sehingga diperoleh :

$$\square^2 f^4 f_y \quad : \frac{25}{9} a_{21} = \frac{10}{9}$$
$$\square^3 f^5 f_{yy} \quad : \frac{25}{18} {a_{21}}^2 = \frac{2}{9}$$
$$\square^3 f^4 f_y^2 \quad : \frac{259}{90} a_{21} + \frac{25}{18} {a_{21}}^2 + \frac{25}{9} a_{32} a_{21} + \frac{11}{9} a_{42} a_{21} + \frac{11}{15} a_{43} = \frac{44}{15}$$
$$\square^4 f^6 f_{yyy} \quad : \frac{25}{54} {a_{21}}^3 = \frac{4}{135}$$
$$\square^4 f^5 f_y f_{yy} \quad : \frac{25}{18} {a_{21}}^3 + \frac{259}{180} {a_{21}}^2 + \frac{1127}{900} a_{21} + \frac{25}{18} {a_{21}}^2 a_{32}$$
$$+ \frac{5}{3} a_{21} a_{32} + \frac{11}{18} {a_{21}}^2 a_{42} + \frac{5}{3} a_{21} a_{32} + \frac{143}{150} a_{43} = \frac{119}{50}$$
$$\square^4 f^4 f_y^3 \quad : \frac{23}{15} {a_{21}}^2 - \frac{91}{75} a_{21} + \frac{64}{9} {a_{21}}^2 a_{32} + \frac{3}{10} a_{21} a_{42} + \frac{47}{18} {a_{21}}^2 a_{42}$$
$$+ \frac{47}{30} a_{21} a_{43} + \frac{3}{2} a_{21} a_{32} + \frac{9}{50} a_{43} + \frac{11}{19} a_{21} a_{32} a_{43}$$
$$= \frac{58}{25} \qquad (4.11)$$

substitusikan nilai $a_{21} = \frac{2}{5}$ ke dalam persamaan (4.11) sehingga diperoleh :

$$\frac{10}{9} a_{32} + \frac{22}{45} a_{42} + \frac{11}{15} a_{43} = \frac{39}{25}$$
$$\frac{8}{9} a_{32} + \frac{44}{75} a_{42} + \frac{143}{150} a_{43} = \frac{39}{25}$$
$$\frac{391}{225} a_{32} + \frac{121}{225} a_{42} + \frac{121}{150} a_{43} + \frac{22}{45} a_{32} a_{43} = \frac{64}{25} \qquad (4.12)$$

Langkah terakhir adalah melakukan penyelesaian dengan mengeliminasi persamaan (4.12) sehingga diperoleh nilai parameter berikut:

$$a_{21} = \frac{2}{5},\ a_{31} = \frac{42}{125} - \frac{3}{1000}\sqrt{39394},\ a_{32} = \frac{33}{125} + \frac{3}{1000}\sqrt{39394},$$

$$a_{41} = -\frac{321}{110} + \frac{7}{440}\sqrt{39394},\ a_{42} = \frac{723}{110} - \frac{3}{88}\sqrt{39394}$$

dan

$$a_{43} = -\frac{146}{55} + \frac{\sqrt{39394}}{55}$$

Substitusikan semua nilai parameter yang telah diperoleh ke dalam persamaan (4.6), sehingga diperoleh metode Runge-Kutta orde empat kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik yang ditulis :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{18}\left(11\left(\frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}\right) + 14\left(\frac{k_2k_3}{k_2 + k_3}\right) + 11\left(\frac{k_3k_4}{k_3 + k_4}\right)\right)$$

dengan

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{2h}{5}, y_n + \frac{2h}{5}k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{3h}{5}, y_n + h\left(\left(\frac{42}{125} - \frac{3}{1000}\sqrt{39394}\right)k_1 + \left(\frac{33}{125} + \frac{3}{1000}\sqrt{39394}\right)k_2\right))$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + h\left(\left(-\frac{321}{110} + \frac{7}{440}\sqrt{39394}\right)k_1\right.$$

$$\left. + \left(\frac{723}{110} - \frac{3}{88}\sqrt{39394}\right)k_2 + \left(-\frac{146}{55} + \frac{1}{55}\sqrt{39394}\right)k_3\right)) \qquad (4.13)$$

4.2 Galat Metode Runge-Kutta Orde Empat Kuntzmann Berdasarkan Rata-Rata Harmonik

Galat metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik dapat diperoleh dengan langkah-langkah yang sama dalam menentukan persamaan RKKuH. Substitusikan nilai parameter yang telah didapat ke persamaan (4.8) dan mengekspansinya sampai dengan Orde-5 (h^5), maka diperoleh galat metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik sebagai berikut :

$$Galat = h^5 \quad \frac{31}{450} f^4 f_{yyyy} + \quad -\frac{1401452873}{7260000}$$

$$+ \frac{84971789}{87120000}\sqrt{39394} \quad f^3 f_{yyy} f_y$$

$$+ \quad \frac{49}{2500} + \frac{2}{1875}\sqrt{39394} \quad f^3 {f_{yy}}^2$$

$$+ \quad -\frac{14128347}{2750000} + \frac{23513}{750000}\sqrt{39394} \quad f^2 f_{yy} {f_y}^2$$

$$+ \quad -\frac{3601177}{4125000} + \frac{14371}{4125000}\sqrt{39394} \quad f {f_y}^4$$

atau

$$Galat = h^5 \quad 0{,}068889\, f^4 f_{yyyy} + 0{,}547518\, f^3 f_{yyy} f_y$$

$$+ 0{,}231311\, f^3 {f_{yy}}^2 + 1{,}084875\, f^2 f_{yy} {f_y}^2$$

$$+ \quad -0{,}181535 \quad f {f_y}^4 \qquad (4.14)$$

4.3 Simulasi Numerik

Penyelesaian persamaan diferensial dengan menggunakan Metode Runge-Kutta orde empat berdasarkan rata-rata harmonik. Penelitian tentang metode Runge Kutta berdasarkan rata-rata harmonik telah di lakukan oleh beberapa peneliti yaitu Runge-Kutta orde empat Klasik harmonik (Evans, D.J, dkk), Runge-Kutta orde empat Kutta harmonik (Ardianti, E.P) dan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann harmonik.

Contoh 4.1:

$$y' = y, \qquad y\ 0 = 1, \qquad 0 \leq x \leq 1 \qquad (4.15)$$

dan solusi eksak yang diberikan adalah $Y = e^x$ dengan *n* = 11. Tentukan penyelesaian persamaan diferensial.

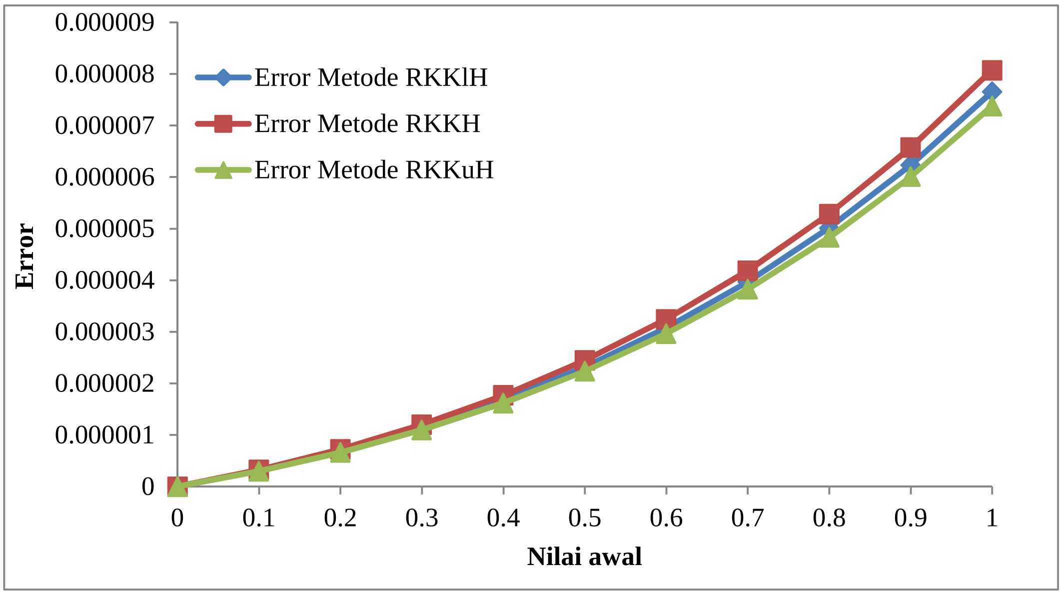
Penyelesaian:

Persamaan (4.15) diselesaikan menggunakan *software* Matlab 5.3 secara metode Runge-Kutta Klasik berdasarkan rata-rata harmonik (RKKlH), Runge-Kutta Kutta berdasarkan rata-rata harmonik (RKKH) dan Runge-Kutta Kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik (RKKuH), dengan $h = 0.1$, $x_0 = 0$ dan $y_0 = 1$. Solusi eksak dan *error* dari persamaan (4.15) disajikan dalam Tabel (4.1).

Tabel 4.1 **Solusi Eksak dan *Error* dari Metode RKKlH, RKKH dan RKKuH untuk Persamaan $y' = y$**

i	x	y (solusi eksak)	*Error*		
			Metode RKKlH	Metode RKKH	Metode RKKuH
1	0,0	1,0000000	0,00000000000	0,00000000000	0.000000000000
2	0,1	1,1051709	3,1126688E-07	3,2821385E-07	3,0000244E-07
3	0,2	1,2214027	6,8800611E-07	7,2546470E-07	6,6310785E-07
4	0,3	1,3498588	1,1405463E-06	1,2026435E-06	1,0992711E-06
5	0,4	1,4918246	1,6806646E-06	1,7721686E-06	1,6198430E-06
6	0,5	1,6487212	2,3217768E-06	2,4481862E-06	2,2377540E-06
7	0,6	1,8221188	3,0791518E-06	3,2467965E-06	2,9677204E-06
8	0,7	2,0137527	3,9701533E-06	4,1863087E-06	3,8264774E-06
9	0,8	2,2255409	5,0145112E-06	5,2875268E-06	4,8330412E-06
10	0,9	2,4596031	6,2346276E-06	6,5740725E-06	6,0090028E-06
11	1,0	2,7182818	7,6559202E-06	8,0727474E-06	7,3788603E-06

Hasil simulasi numerik untuk persamaan diferensial $y' = y$, diperoleh *error* dari metode RKKlH, RKKH dan RKKuH pada Tabel 4.1. Untuk mengetahui perbandingan *error* pada metode tersebut maka berdasarkan Tabel 4.1 dapat diplot grafik yang ditunjukkan pada gambar 4.1.



Gambar 4.1 Grafik Perbandingan *Error* Metode RKKlH, RKKH dan RKKuH pada Persamaan Diferensial $y' = y$

Berdasarkan Gambar 4.1 dapat dilihat bahwa *error* dari metode Runge-Kutta orde empat yang telah dimodifikasi berdasarkan rata-rata harmonik, metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann harmonik (RKKuH) memilik *error* lebih kecil dari Runge-Kutta orde empat Klasik harmonik (RKKlH) dan Runge-Kutta orde empat Kutta harmonik (RKKH).

Simulasi numerik untuk penyelesaian persamaan diferensial dengan mengunakan metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann dan metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann yang telah dimodifikasi berdasarkan rata-rata harmonik.

Contoh 4.2:

$$y' = y, \qquad y(0) = 1, \qquad 0 \le x \le 1 \tag{4.16}$$

dan solusi eksak yang diberikan adalah $Y = \exp x$ dengan $n = 11$. Tentukan penyelesaian persamaan diferensial.

Penyelesaian:

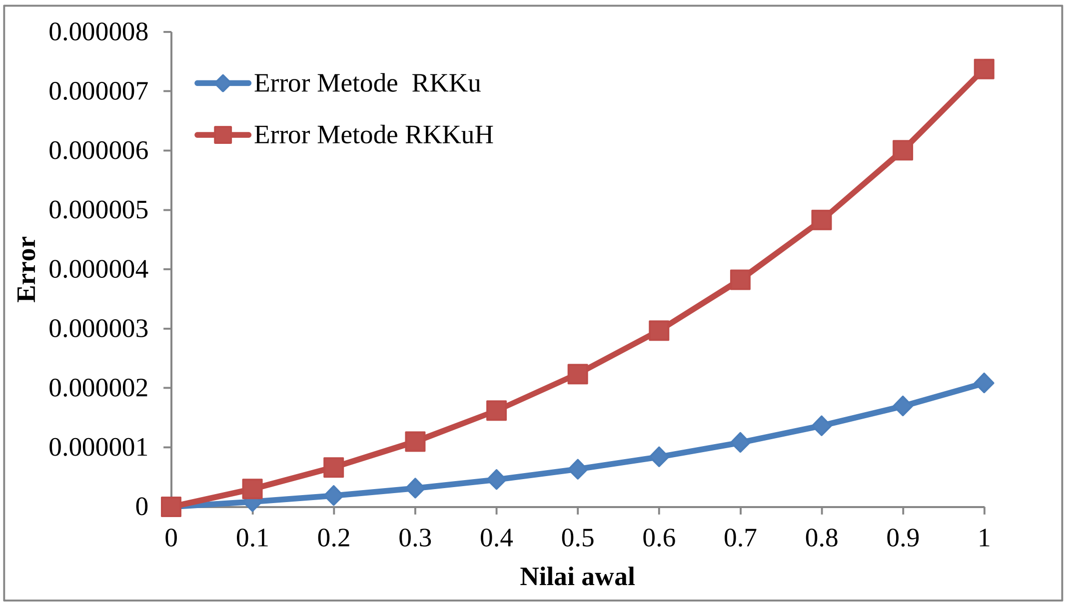
Persamaan (4.16) diselesaikan dengan menggunakan *software* Matlab 5.3 secara metode Runge-Kutta Kuntzmann (RKKu) dan Runge-Kutta Kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik (RKKuH) dengan $h = 0.1$, $x_0 = 0$ dan $y_0 = 1$. Berdasarkan lampiran B diperoleh solusi eksak dan *error* dari persamaan (4.16) disajikan dalam Tabel (4.2).

Tabel 4.2 Solusi Eksak dan *Error* dari Metode RKKu dan RKKuH untuk Persamaan $y' = y$

i	x	y (solusi eksak)	*Error*	
			Metode RKKu	Metode RKKuH
1	0,0	1,0000000	0,0000000000	0,00000000000
2	0,1	1,1051709	8,474231E-08	3,0000244E-07
3	0,2	1,2214027	1,873094E-07	6,6310785E-07
4	0,3	1,3498588	3,105134E-07	1,0992711E-06
5	0,4	1,4918246	4,575605E-07	1,6198430E-06
6	0,5	1,6487212	6,321032E-07	2,2377540E-06
7	0,6	1,8221188	8,382985E-07	2,9677204E-06
8	0,7	2,0137527	1,080873E-06	3,8264774E-06

9	0,8	2,2255409	1,365200E-06	4,8330412E-06
10	0,9	2,4596031	1,697376E-06	6,0090028E-06
11	1,0	2,7182818	2,084323E-06	7,3788603E-06

Hasil simulasi numerik untuk persamaan diferensial $y' = y$, diperoleh *error* dari metode RKKu dan RKKuH pada Tabel 4.2. Untuk mengetahui perbandingan *error* pada metode tersebut maka berdasarkan Tabel 4.2 dapat diplot grafik yang ditunjukkan pada Gambar 4.2



Gambar 4.2 Grafik Perbandingan *Error* Metode RKKu dan RKKuH pada Persamaan Diferensial $y' = y$

Berdasarkan Gambar 4.2 dapat dilihat bahwa metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann (RKKu) memiliki *error* yang lebih kecil dari metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann yang telah dimodifikasi berdasarkan rata-rata harmonik (RKKuH).

Contoh 4.3:

$$y' = y - 2x + 1, \qquad y(0) = 0,5, \qquad 0 \le x \le 1 \tag{4.17}$$

dan solusi eksak yang diberikan adalah $Y = (x+1)^2 - \frac{1}{2}\exp(x)$ dengan $n = 11$. Tentukan penyelesaian persamaan diferensial.

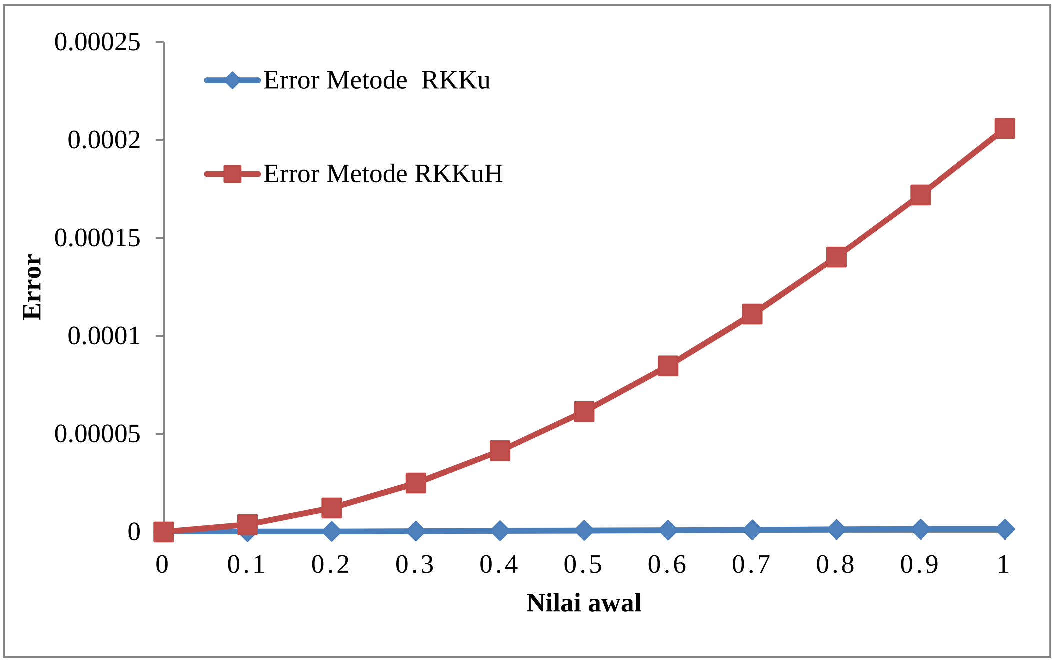
Penyelesaian:

Persamaan (4.17) diselesaikan dengan menggunakan *software* Matlab 5.3 secara metode Runge-Kutta Kuntzmann (RKKu) dan Runge-Kutta Kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik (RKKuH) dengan $h = 0.1$, $x_0 = 0$ dan $y_0 = 1$. Bredasarkan lampiran C diperoleh solusi eksak dan *error* dari persamaan (4.17) disajikan dalam Tabel 4.3.

Tabel 4.3 Solusi Eksak dan *Error* dari Metode RKKu dan RKKuH untuk Persamaan $y' = y - 2x + 1$

i	x	y (solusi eksak)	*Error*	
			Metode RKKu	Metode RKKuH
1	0,0	0,5000000	0,0000000000	0,0000000000
2	0,1	0,6574145	1,242955E-07	3,742214E-06
3	0,2	0,8292986	2,572070E-07	1,221186E-05
4	0,3	1,0150705	3,991721E-07	2,489155E-05
5	0,4	1,2140876	5,506250E-07	4,140075E-05
6	0,5	1,4256393	7,119910E-07	6,144256E-05
7	0,6	1,6489405	8,836801E-07	8,476595E-05
8	0,7	1,8831236	1,066078E-06	1,111361E-04
9	0,8	2,1272295	1,259540E-06	1,403086E-04
10	0,9	2,3801984	1,464375E-06	1,720041E-04
11	1,0	2,6408590	1,464375E-06	2,058813E-04

Hasil simulasi numerik untuk persamaan diferensial $y' = y - 2x + 1$, diperoleh *error* dari metode RKKu dan RKKuH pada Tabel 4.3. Untuk mengetahui perbandingan *error* pada metode tersebut maka berdasarkan Tabel 4.3 dapat diplot grafik yang ditunjukkan pada Gambar 4.3.



Gambar 4.3 Grafik Perbandingan *Error* Metode RKKu dan RKKuH pada Persamaan Diferensial $y' = y - 2x + 1$

Berdasarkan Gambar 4.3 dapat dilihat bahwa metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann (RKKu) memiliki *error* yang lebih kecil dari metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann yang telah dimodifikasi berdasarkan rata-rata harmonik (RKKuH).

Contoh 4.4:

$$y' = -y, \qquad y\ 0\ = 1, \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{4.18}$$

dan solusi eksak yang diberikan adalah $Y = \exp(-x)$ dengan n = 11. Tentukan penyelesaian persamaan diferensial.

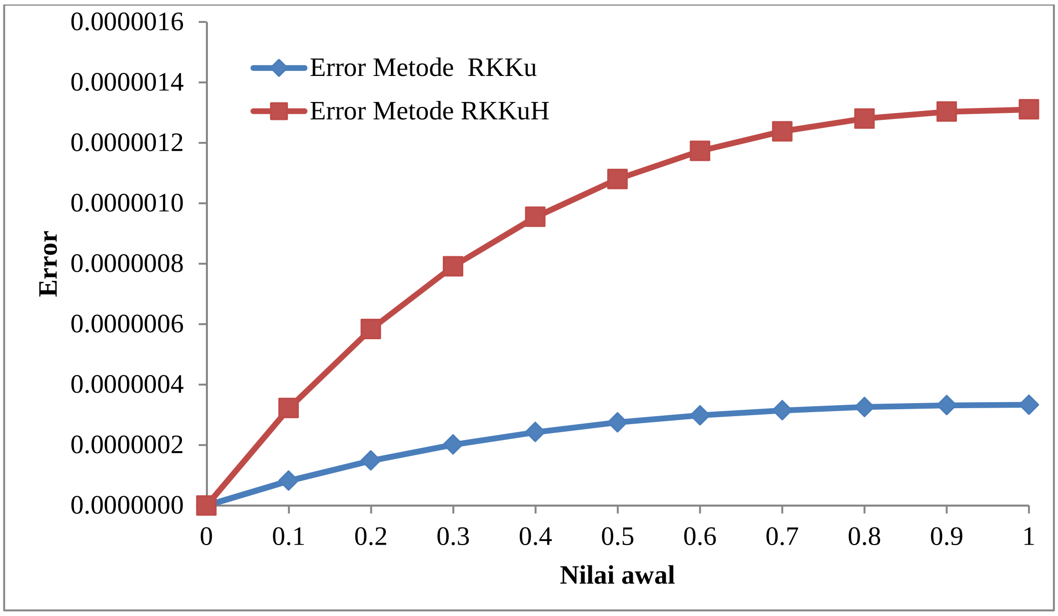
Penyelesaian:

Persamaan (4.18) diselesaikan dengan menggunakan *software* Matlab 5.3 secara metode Runge-Kutta Kuntzmann (RKKu) dan Runge-Kutta Kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik (RKKuH) dengan $h = 0.1$, $x_0 = 0$ dan $y_0 = 1$. Berdasarkan lampiran D diperoleh solusi eksak dan *error* dari persamaan (4.18) disajikan dalam Tabel 4.4.

Tabel 4.4 Solusi Eksak dan *Error* dari Metode RKKu dan RKKuH untuk Persamaan $y' = -y$

i	x	y (solusi eksak)	*Error*	
			Metode RKKu	Metode RKKuH
1	0,0	1,000000	0,0000000000	0,0000000000
2	0,1	0,904837	8,196404E-08	3,223136E-07
3	0,2	0,818730	1,483282E-07	5,832829E-07
4	0,3	0,740818	2,013194E-07	7,916644E-07
5	0,4	0,670320	2,428818E-07	9,551036E-07
6	0,5	0,606530	2,747107E-07	1,080267E-06
7	0,6	0,548811	2,982822E-07	1,172959E-06
8	0,7	0,496585	3,148798E-07	1,238227E-06
9	0,8	0,449328	3,256172E-07	1,280451E-06
10	0,9	0,406569	3,314594E-07	1,303425E-06
11	1,0	0,367879	3,332410E-07	1,310431E-06

Hasil simulasi numerik untuk persamaan diferensial $y' = -y$, diperoleh *error* dari metode RKKu dan RKKuH pada Tabel 4.4. Untuk mengetahui perbandingan *error* pada metode tersebut maka berdasarkan Tabel 4.4 dapat diplot grafik yang ditunjukkan pada Gambar 4.4.



Gambar 4.4 Grafik Perbandingan *Error* Metode RKKu dan RKKuH pada Persamaan Diferensial $y' = -y$

Berdasarkan Gambar 4.4 dapat dilihat bahwa metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann (RKKu) memiliki *error* yang lebih kecil dari metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann yang telah dimodifikasi berdasarkan rata-rata harmonik (RKKuH).

Contoh 4.5:

$$y' = 1/y, \qquad y\;0 = 1, \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{4.19}$$

dan solusi eksak yang diberikan adalah $Y = \sqrt{2x + 1}$ dengan n = 11. Tentukan penyelesaian persamaan differensial.

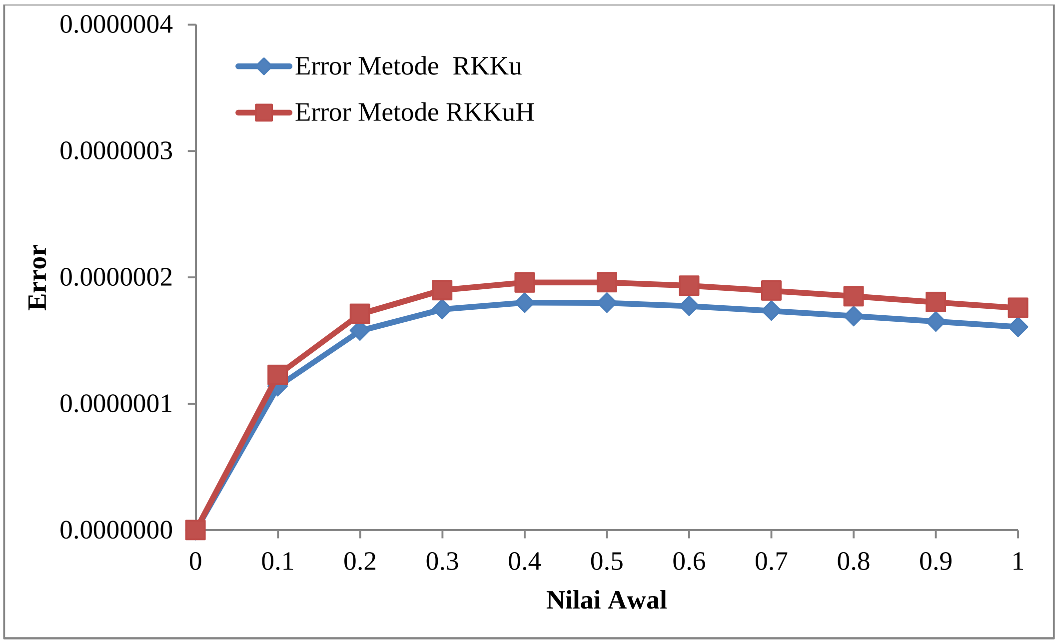
Penyelesaian:

Persamaan (4.19) diselesaikan dengan menggunakan *software* Matlab 5.3 secara metode Runge-Kutta Kuntzmann (RKKu) dan Runge-Kutta Kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik (RKKuH) dengan $h = 0.1$, $x_0 = 0$ dan $y_0 = 1$. Berdasarkan lampiran E diperoleh solusi eksak dan *error* dari persamaan (4.17) disajikan dalam Tabel 4.5.

Tabel 4.5 Solusi Eksak dan *Error* dari Metode RKKu dan RKKuH untuk Persamaan $y' = \frac{1}{y}$

i	x	y (solusi eksak)	*Error*	
			Metode RKKu	Metode RKKuH
1	0,0	1,000000	0,0000000000	0,0000000000
2	0,1	1,095445	1,139113E-07	1,228678E-07
3	0,2	1,183215	1,579208E-07	1,710691E-07
4	0,3	1,264911	1,748102E-07	1,898998E-07
5	0,4	1,341640	1,800403E-07	1,959591E-07
6	0,5	1,414213	1,799412E-07	1,961179E-07
7	0,6	1,483239	1,773466E-07	1,934808E-07
8	0,7	1,549193	1,736093E-07	1,895421E-07
9	0,8	1,612451	1,694041E-07	1,850534E-07
10	0,9	1,673320	1,650764E-07	1,804027E-07
11	1,0	1,732050	1,608037E-07	1,757919E-07

Hasil simulasi numerik untuk persamaan diferensial $y' = \frac{1}{y}$, diperoleh *error* dari metode RKKu dan RKKuH pada Tabel 4.5. Untuk mengetahui perbandingan *error* pada metode tersebut maka berdasarkan Tabel 4.5 dapat diplot grafik yang ditunjukkan pada Gambar 4.5.



Gambar 4.5 Grafik Perbandingan *Error* Metode RKKu dan RKKuH pada Persamaan Diferensial $y' = \frac{1}{y}$.

Berdasarkan Gambar 4.5 dapat dilihat bahwa metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann (RKKu) memiliki *error* lebih kecil dibandingkan dari metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann yang telah dimodifikasi berdasarkan rata-rata harmonik (RKKuH).

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann memiliki bentuk umum sebagai berikut :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{360} \; 55k_1 + 125k_2 + 125k_3 + 55k_4$$

setelah dilakukan modifikasi dengan menggunakan rata-rata harmonik diperoleh :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{18} \; 11 \; \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \; + 14 \; \frac{k_2 k_3}{k_2 + k_3} \; + 11 \; \frac{k_3 k_4}{k_3 + k_4}$$

dengan

$$k_1 = f \; x_n, y_n$$

$$k_2 = f(x_n + \frac{2h}{5}, y_n + \frac{2h}{5} k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + \frac{3h}{5}, y_n + h \quad \frac{42}{125} - \frac{3}{1000}\sqrt{39394} \;\; k_1 + \quad \frac{33}{125} + \frac{3}{1000}\sqrt{39394} \;\; k_2$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + h \quad -\frac{321}{110} + \frac{7}{440}\sqrt{39394} \;\; k_1$$

$$+ \quad \frac{723}{110} - \frac{3}{88}\sqrt{39394} \;\; k_2 + \quad -\frac{146}{55} + \frac{1}{55}\sqrt{39394} \;\; k_3$$

Galat dari metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik diperoleh

$$Galat \; = \; h^5 \;\; 0{,}068889 \; f^4 f_{yyyy} + \; 0{,}547518 \; f^3 f_{yyy} f_y + \; 0{,}231311 \; f^3 {f_{yy}}^2$$

$$+ \, 1{,}084875 \; f^2 f_{yy} {f_y}^2 + \quad -0{,}181535 \;\; f {f_y}^4$$

Penyelesaian persamaan diferensial biasa orde satu dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat yang telah dimodifikasi berdasarkan rata-rata harmonik dalam soal $y' = y$, metode Runge-Kutta Kuntzmann harmonik memiliki memiliki *error* yang lebih kecil dibandingkan dari metode Runge-Kutta Kutta harmonik dan Runge-Kutta Klasik harmonik.

Penyelesaian persamaan diferensial biasa orde satu dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat Kuntzman dan Runge-Kutta orde empat Kuntzmann yang telah dimodifikasi berdasarkan rata-rata harmonik dalam beberapa persoalan persamaan diferensial biasa metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann memiliki *error* yang lebih kecil dibandingkan dengan metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann yang telah dimodifikasi berdasarkan rata-rata harmonik.

5.2 Saran

Penulisan tugas akhir ini penulis hanya menggunakan rata-rata harmonik untuk memodifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann, dan dalam komputasinya hanya membandingkan dua metode. Oleh karena itu, penulis menyarankan agar pembaca dapat lebih lanjut menemukan bentuk baru dengan menggunakan rata-rata yang berbeda seperti heronian dan centroidal.

DAFTAR PUSTAKA

Bronson, Richard dan Costa. *Persamaan Differensial, Edisi Tiga*. Erlangga, Jakarta. 2007.

Butcher, J.C. 2008. *Numerical methods for ordinarry Differential Equetion*. John Wiley& Sons: England.

Chapra, Steven C dan Raymond P. Canela. *Metode Numerik untuk Teknik*. Universitas Indonesia. Jakarta. 1991.

Cheney, Ward dan David Kincaid. *Numerical for Computing, Sixth Edition.* halaman 440- 443.Thomson Higher Education. USA. 2008

Eka Putri Ardianti.”Modifikasi Metode Runge-Kutta orde-4 Kutta Berdasarkan Rata-rata Harmonik”. *Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau*. 2011.

Evans, D.J. ”A New 4TH Order Runge-Kutta Method for Initial Value Problems With Error Control”. *Intern J. Computer Math*.Vol. 39. halaman 217-227. 1991.

Imran, M. 2002. “Perbandingan Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde-4 Berdasarkan Variasi Rata-rata”. *Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Riau*.

Lambert, J. D. *Numerical Methods for Ordinay Differential System The Initial Value*. halaman 150. John Wiley & Sons. New York.1993.

Lapidus, Leon dan John H. Seinfeld. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equation.* halaman 41-58. Academic Press. New York. 1971.

Munir, Rinaldi. *Metode Numerik, Edisi Revisi*. Informatika, Bandung. 2008.

Ravinder, D dan P.S Rama Chandra Rao. “A New Fourth Order Runge- Kutta Method for The Solution of Initial Value Problem in ODE’S”. *Int. J. Of Appl. Math and Mech*. halaman 32-50. 2012

Sanugi, B. B. dan D. J. Evans. ”A New Fourth Order Runge-Kutta Formula Based on the Harmonic Mean*”. Intern J. Computer Math*.Vol. 50. halaman 113-118. 1994.

Shampine, F. Lawrence. 1994. *Numerical Solution Of Ordinary Differential Equetions*, Champan & Hall Mathematics: New York.

Supinah. 2010."Modifikasi Metode Runge-Kutta orde-4 Kutta Berdasarkan Rata-rata Kontraharmonik". *Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau*.

Waluya, S.B. *Persamaan Differensial*. halaman 8-28. Graha Ilmu. Yogyakarta.2006.