KONVERGENSI MODIFIKASI METODE POTRA-PTAK MENGGUNAKAN INTERPOLASI KUADRATIK

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh:

ZUHROWARDI
10854004031

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2013

KONVERGENSI MODIFIKASI METODE POTRA-PTAK MENGGUNAKAN INTERPOLASI KUADRATIK

ZUHROWARDI
10854004031

Tanggal Sidang : 25 Juni 2013
Tanggal Wisuda : 2013

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Metode Potra-Ptak merupakan salah satu metode iterasi dengan orde konvergensi tiga untuk menentukan akar-akar persamaan nonlinier. Kecepatan sebuah metode iterasi bergantung kepada orde konvergensinya. Oleh karena itu, Pada tugas akhir ini penulis memodifikasi metode Potra-Ptak menggunakan interpolasi kuadratik guna meningkatkan orde konvergensi. Berdasarkan hasil penelitian, diperoleh bahwa modifikasi metode Potra-Ptak menghasilkan orde konvergensi enam yang melibatkan 3 evaluasi fungsi yaitu $f(z_n), f(y_n), f(x_n)$ dan 2 evaluasi fungsi turunan $f'(y_n)$, $f'(x_n)$ dengan indeks *efficiency* sebesar 1.430.

Katakunci: Interpolasi kuadratik, metode Potra-Ptak, orde konvergensi.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur kepada Allah SWT karena atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan judul **"Konvergensi Modifikasi Metode Potra-Ptak Menggunakan Interpolasi Kuadratik".** Penulisan tugas akhir ini dimaksud untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di UIN Suska Riau. Sholawat beserta salam semoga tercurahkan kepada Nabi Besar Muhammad SAW, mudah-mudahan kita semua mendapat syafa'atnya kelak.

Dalam penyusunan dan penyelesian tugas akhir ini, penulis banyak sekali mendapat bimbingan, bantuan, arahan, nasehat, petunjuk, perhatian serta semangat dari berbagai pihak. Untuk itu sudah sepantasnya bila penulis mengucapkan terima kasih kepada kedua orang tua tercinta yang telah melimpahkan perhatian dan kasih sayang juga materi yang tak mungkin bisa terbalas. Selain itu, penulis juga mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir Karim, M.A selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati,S.Si.,M.Sc. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Wartono,S.Si.,M.Sc. selaku pembimbing yang telah banyak membantu, mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dalam penulisan tugas akhir ini.
5. Bapak Muhammad Nizam Muhaijir, S.Si. selaku Penasehat Akademis selama penulis menjalani perkuliahan.
6. Bapak dan Ibu Dosen di lingkungan FST UIN SUSKA Riau, khususnya di Jurusan Matematika.
7. Abangku yang tercinta, Bang Karim yang selama ini telah membiayai saya kuliah serta keluargaku (Ngah, Ira, Jep, Anet, Neng, Nita, Sampol, Mah)

yang tak lelah memberi motivasi dan semangat serta do'a yang tak terbalas.

8. Kakandaku Bang Taufik, Bang Bantuan, Bang Domi, Bang Syafril, Bang Raja, Bang Eddi dan ustad Khairun, yang selama ini membimbingku.
9. Sahabatku (Bang Bekti, Yuzi, Vidi, Nazar, Adi, Ali, Afit, Nofi, Sam, Lin, Siti Kholipah, Silvia Yutika, Kholipah, Sutika Dewi) yang selalu memberi *support*.
10. Teman-teman Jurusan Matematika Angkatan 2008, kakak dan adik tingkat jurusan matematika angkatan pertama sampai terakhir, serta teman-teman yang tak dapat disebutkan satu persatu.
11. Semua Pengurus dan Alumni Forum Ukhuwah Assalam yang selalu memberikan motivasi, Semoga kebaikan yang telah mereka berikan kepada penulis menjadi amal kebaikan dan mendapat balasan yang setimpal dari Allah SWT. Amin.
12. Semua pihak yang telah memberi bantuan dari awal sampai selesai tugas akhir ini yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Penulis telah berusaha semaksimal mungkin dalam penyusunan tugas akhir ini. Walaupun demikian, tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan baik dalam penulisan maupun dalam penyajian materi. Untuk itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Pekanbaru, Juni 2013

Zuhrowardi

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan ilmu pengetahuan dewasa ini sangat pesat sekali, banyak karya-karya yang telah lahir. Salah satunya dibidang Matematika. Para Ilmuan di bidang sains dan teknik sering dihadapkan dengan sebuah persoalan matematis yang rumit, permasalahan tersebut biasanya berbentuk persamaan nonlinear. Dalam persamaan nonlinear, menentukan akar-akar persamaan merupakan salah satu persoalan yang ada. Untuk menentukan akar-akar persamaan suatu persamaan nonlinear, terdapat suatu metode yang sering digunakan, yaitu metode Newton dengan orde konvergensi berbentuk kuadratik. Oleh karena konvergensinya berorde dua, maka metode Newton cukup cepat menghampiri akar-akar persamaan nonlinier.

Bentuk umum metode Newton adalah,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0,1,2,3,... \text{ dengan } \quad f'(x_n) \neq 0 \tag{1.1}$$

Belakangan ini, peneliti telah banyak melakukan berbagai macam metode pendekatan dengan memodifikasi berbagai metode untuk meningkatkan orde konvergensi suatu metode. Metode yang sudah diteliti, salah satunya adalah metode Potra-Ptak yang memiliki orde konvergensi tingkat tiga. Bentuk umum dari metode Potra-Ptak adalah :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)} \tag{1.2}$$

dengan,

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Modifikasi yang dilakukan oleh peneliti adalah untuk meningkatkan orde konvergensi yang dimaksudkan untuk menghasilkan suatu nilai yang dapat menghampiri nilai eksak dengan *error* yang kecil. Reza Ezzati dan Elham Azadegan (2009) dalam jurnalnya yang berjudul “*A Simple Iterative Method* *with Fifth-order Convergence by using Potra-ptak's Method",* mengembangkan metode Potra-Ptak dengan memodifikasi dengan iterasi yang sederhana. Hasil modifikasi tersebut diperoleh orde konvergensinya lima. Selain itu, Alicia Cordero dan Jose L. Hueso (2010) dalam jurnalnya yang berjudul *"New modifications of Potra-Ptak's Method with Optimal Fourth and Eighth Orders of Convergence",* mengembangkan metode Potra-Ptak dengan mengoptimalkan orde konvergensi menjadi delapan. Changbum Chun (2007) dalam jurnalnya yang berjudul *"Some Improvements of Jarratt's method with Sixth-order Convergence",* memodifikasi metode Jarratt dengan melibatkan interpolasi kuadratik yang menghasilkan orde konvergensi tingkat enam.

Berdasarkan uraian di atas, maka pada tugas akhir ini penulis akan mencoba menguraikan modifikasi metode Potra-Ptak menggunakan interpolasi kuadratik untuk menghasilkan tingkat orde konvergensi yang tinggi.

1.2 Perumusan Masalah

Rumusan masalah pada tugas akhir ini adalah " Bagaimana menentukan orde konvergensi modifikasi metode Potra-Ptak menggunakan Interpolasi Kuadratik?".

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada tugas akhir ini yaitu fungsi f adalah suatu fungsi nonlinear dengan satu variabel dan fungsinya bernilai riil.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menentukan rumusan modifikasi metode Potra-Ptak menggunakan Interpolasi Kuadratik.
2. Menentukan orde konvergensi modifikasi metode Potra-Ptak menggunakan Interpolasi Kuadratik.
3. Menentukan akar-akar persamaan non-linear dengan tingkat kekonvergenan yang lebih tinggi.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian dari tugas akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Diperoleh metode baru setelah memodifikasikan metode Potra-Ptak menggunakan Interpolasi Kuadratik.
2. Dapat digunakan untuk menemukan akar-akar persamaan non-linear dengan tingkat kekonvergenan yang lebih tinggi.
3. Mensimulasikan secara numerik persamaan iterasi modifikasi metode Potra-Ptak menggunakan Interpolasi Kuadratik.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan skripsi ini mencakup lima bab yaitu :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penelitian.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisi tentang teori-teori dasar yang digunakan dalam penelitian.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisi tentang metodologi penelitian yang digunakan dalam skripsi ini.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini berisi tentang pembahasan bagaimana bentuk rumusan baru dari persamaan (1.2) dengan menggunakan metode newton dan Interpolasi Kuadratik, serta bagaimana bentuk orde konvergensinya. Selain itu dilengkapi dengan simulasi numeriknya.

BAB V **KESIMPULAN DAN SARAN**

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran.

BAB II
LANDASAN TEORI

Untuk mencapai tujuan dari penulisan tugas akhir ini, penulis mengambil beberapa konsep dasar yang akan menjadi landasan teori dalam penulisan tugas akhir ini, diantaranya adalah orde konvergensi, deret Taylor, metode Newton dan orde konvergensinya, metode Potra-Ptak dan orde konvergensinya, dan interpolasi kuadratik. Konsep dasar tersebut akan dijelaskan sebagai berikut.

2.1 Orde Konvergensi

Orde konvergensi merupakan suatu tingkat percepatan dalam penyelesaian persamaan nonlinear $f(x) = 0$. Adapun defenisi yang menyatakan tentang orde konvergensi adalah sebagai berikut :

Definisi 2.1 (John H Mathews, 1992). Misalkan terdapat sebuah bilangan konstanta $c \geq 0$, bilangan bulat $n_0 \geq 0$, untuk semua $n > n_0$ dan $p \geq 0$ maka barisan $\{x_n\}$, dikatakan konvergen ke $\sim$ dengan orde konvergensi ke p, jika memenuhi ketentuan

$$|x_{n+1} - \sim| \leq c|x_n - \sim|^p \qquad (2.1)$$

Jika $p = 2$ atau $p = 3$ maka metode hampiran memiliki orde konvergensi kuadratik atau kubik dan seterusnya. Apabila notasi $e_n = x_n - \sim$ merupakan notasi untuk nilai tingkat kesalahan pada iterasi ke-n, pada suatu metode yang menghasilkan suatu barisan $\{x_n\}$, maka suatu persamaan

$$e_{n+1} = ce_n^p + O(e_n^{p+1}), \qquad (2.2)$$

disebut sebagai persamaan tingkat kesalahan, sedangkan nilai p pada persamaan (2.1) menunjukkan orde konvergensinya.

Berikut definisi 2.2 dan 2.3 yang menjelaskan tentang keefektifan persamaan orde konvergensi dalam menyelesaikan persamaan nonlinear untuk menghampiri akar-akar persamaannya.

Definisi 2.2 (S. Weerakoon, 2000). Misalkan $\sim$ adalah akar untuk fungsi $f(x)$ dan andaikan x_{n+1}, x_n, x_{n-1} berturut-turut adalah iterasi yang dekat dengan $\sim$. Sehingga rumus COC dapat dihampiri menggunakan rumus :

$$\circ \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1} - \sim)/(x_n - \sim)\right|}{\ln\left|(x_n - \sim)/(x_{n-1} - \sim)\right|} \text{ atau } \circ \approx \frac{\ln\left|(e_{n+1})/(e_n)\right|}{\ln\left|(e_n)/(xe_{n-1})\right|} \tag{2.3}$$

Contoh 2.1.

Diberikan fungsi $f(x) = x^2 - 5x + 6$, dengan menggunakan rumus Newton tentukan iterasi untuk menentukan akar tunggal $\sim = 3$ serta konvergensi fungsi tersebut dengan nilai awal $x_0 = 3{,}2$ dan toleransi $e = 10^{-14}$.

Penyelesaian:

Tabel 2.1 Hasil Iterasi dari COC Metode Newton dengan Akar Tunggal

Iterasi	x_n	e_n	COC
0	3.2000000000000000	0.2000000000000000	0.2811430843
1	3.0285714285714276	0.0285714285714276	0.3910974187
2	3.0007722007722011	0.0007722007722011	2.000009554
3	3.0000005953745341	0.0000005953745341	Ttd
4	3.0000000000003539	0.0000000000003539	Ttd
5	2.9999999999999987	0.0000000000000013	Ttd

Ttd = Tidak terdefenisi

Tabel 2.1 menunjukkan bahwa metode Newton dengan akar tunggal memiliki konvergensi kuadratik dengan $\circ \approx 2$.

Selanjutnya nilai COC yang linier ditentukan oleh contoh berikut:

Contoh 2.2.

Diberikan sebuah fungsi $f(x) = x^2 - 5x + 6$, dengan menggunakan rumus Newton tentukan iterasi untuk menentukan akar tunggal $\sim = 2$ serta konvergensi fungsi tersebut dengan nilai awal $x_0 = 2{,}1$ dan toleransi $e = 10^{-14}$.

Penyelesaian:

Tabel 2.2 Hasil Iterasi dari COC Metode Newton dengan Akar Ganda

Iterasi	x_n	e_n	COC
0	2.100000000000000	0.1000000000000000	0.05012914731

1	1.9875000000000003	0.0124999999999997	1.87630913600
2	1.9998475609756092	0.0001524390243908	1.99446577500
3	1.9999999767694265	0.0000000232305735	Ttd
4	1.9999999999999984	0.0000000000000016	Ttd
5	1.9999999999999993	0.0000000000000007	Ttd
6	2.0000000000000000	0.0000000000000000	Ttd

Ttd = Tidak terdefenisi

Tabel 2.2 menunjukkan bahwa metode Newton dengan akar Ganda memiliki konvergensi kuadratik dengan ° ≈ 2 .

Definisi 2.2 ***Efficiency Index*** **(Chungbum Chun, 2011).** Index efisiensi merupakan definisi yang sederhana, yaitu

$$I = P^{\frac{1}{d}} \tag{2.4}$$

dengan P adalah banyaknya orde konvergensi dari sebuah metode, sedangkan d merupakan jumlah dari evaluasi fungsi dari metode tersebut termasuk juga fungsi turunannya. Semakin besar nilai indeksnya maka metode itu semakin efektif dalam menyelesaikan persamaan nonlinier.

Contoh 2.3. Tentukanlah nilai indeks dari metode Newton dan metode Potra-Ptak?

Penyelesaian:

Oleh karena metode Newton hanya mempunyai dua fungsi $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$, sedangkan orde konvergensinya dua, yaitu

$$e_{n+1} = C_2 e_n^2 + O(e_n^3)$$

maka nilai indeksnya adalah:

$$\begin{aligned} I = P^{\frac{1}{d}} &= 2^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2} \\ &= 1{,}414 \end{aligned}$$

Sedangkan metode Potra-Ptak mempunyai tiga fungsi yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$, $f(y_n)$

$$e_{n+1} = 2c_2^2 e_n^3 + O(e_n^4)$$

maka nilai indeksnya adalah:

$$I = P^{\frac{1}{d}} = 3^{\frac{1}{3}}$$
$$= \sqrt[3]{3}$$
$$= 1{,}442$$

Oleh karena nilai indeks metode Potra-ptak lebih besar dibandingkan dengan metode Newton, maka metode ini lebih efektif dalam menyelesaikan persamaan nonlinear.

2.2 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan deret yang berbentuk polinomial, digunakan sebagai alat untuk membuat polinom hampiran.

Teorema 2.1 : (Rinaldi Munir, 2006) Andaikan f dan semua turunannya $f\,'$, $f\,''$, $f\,'''$, ... menerus didalam selang $[a,b]$, misalkan $x_0 \in [a,b]$, maka untuk nilai-nilai x disekitar x_0 dan $x_0 \in [a,b]$. $f(x)$ dapat diperluas (diekspansi) ke dalam deret Taylor.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + ... \quad (2.5)$$

Karena suku-suku deret Taylor tidak berhingga banyaknya, maka deret Taylor dapat dipotong sampai suku orde tertentu.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + ... + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + R_n(x) \quad (2.6)$$

dengan $R_n(x)$ adalah galat atau sisa.

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c),\ x_0 < c < x \quad (2.7)$$

dengan demikian deret Taylor yang dipotong sampai suku orde ke-n dapat ditulis sebagai berikut :

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad (2.8)$$

dengan,

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^k(x_0) \tag{2.9}$$

dan

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c), \quad x_0 < c < x \tag{2.10}$$

Bukti : Misalkan polinomial berderajat n dengan fungsi f dan memiliki selang $[a,b]$ maka $x_0 \in [a,b]$. maka :

$$f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + c_3(x-x_0)^3 + \ldots + c_n(x-x_0)^n$$

$$f(x) = \sum_{n}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \tag{2.11}$$

Jika $f(x)$ diturunkan secara berurutan mulai dari $f'(x)$ sampai $f^n(x)$ maka diperoleh:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-x_0) + 3c_3(x-x_0)^2 + 4c_4(x-x_0)^3 + \ldots + c_n n(x-x_0)^{n-1}$$

$$f''(x) = 2c_2 + 2.3c_3(x-x_0) + 3.4c_4(x-x_0)^2 + \ldots + c_n n(n-1)(x-x_0)^{n-2}$$

$$f'''(x) = 2.3c_3 + 2.3.4c_4(x-x_0) + 3.4.5c_5(x-x_0)^2 + \ldots + c_n n(n-1)(x-x_0)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f^n(x) = n!c_n$$

Apabila $x = x_0$ disubstitusikan, maka :

$$f(x) = c_0$$

$$f'(x) = c_1$$

$$f''(x) = 2c_2$$

$$f'''(x) = 2.3c_3$$

$$\vdots$$

$$f^n(x) = n!c_n$$

Sehingga :

$$c_n = \frac{f^n(x)}{n!} \tag{2.12}$$

Oleh karena itu, jika persamaan (2.11) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.12), diperoleh :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(x)}{n!}(x - x_0)^n \tag{2.13}$$

Selanjutnya, galat deret Taylor dapat dibuktikan dengan mendefenisikan fungsi $R_n(x)$ di I dengan :

$$R_n(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 - \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 - \ldots$$
$$- \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^{n3}$$

Kemudian anggap x dan x_0 sebagai konstanta dan defenisikan fungsi baru g di I dengan

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 - \frac{f'''(t)}{3!}(x - t)^3 - \ldots^n$$
$$- \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t) - R_n(x)\frac{(x - t)^{n+1}}{(x - x_0)^{n+1}}$$

Jelaslah bahwa $g(x) = 0$ (ingat, x dianggap tetap) dan

$$g(x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 - \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 - \ldots$$
$$- \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n - R_n(x)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(x - x_0)^{n+1}}$$
$$= R_n(x) - R_n(x)$$
$$= 0$$

Karena x dan x_0 adalah titik-titik di I dengan sifat bahwa $g(x_0) = g(x) = 0$, maka kita dapat menerapkan Teorema Nilai Rata-rata Turunan. Dengan demikian terdapat sebuah bilangan real c diantara x_0 dan x sedemikian sehingga $g'(c) = 0$. Untuk mendapatkan turunan g, terapkanlah aturan perkalian dengan berulangkali.

$$g'(t) = 0 - f'(t) - \left[f(t)(-1) + (x-t)f''(t)\right] - \frac{1}{2!}\left[f''(t)2(x-t)(-1) + (x-t)^2 f'''(t)\right]$$

$$-\frac{1}{3!}\left[f'''(t)3(x-t)^2(-1) + (x-t)^3 f^{(4)}(t)\right] - \ldots$$

$$-\frac{1}{n!}\left[f^{(n)}(t)n(x-t)^{n-1}(-1) + (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\right] - R_n(x)\frac{(n+1)(x-x_0)^n(-1)}{(x-x_0)^{n+1}}$$

$$= -\frac{1}{n!}\left[(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\right] + (n+1)R_n(x)\frac{(x-x_0)^n}{(x-x_0)^{n+1}}$$

Jadi, berdasarkan Teorema Nilai Rata-rata untuk turunan, terdapat suatu nilai c diantara x dan x_0 sedemikian sehingga,

$$0 = g'(c) = -\frac{1}{n!}\left[(x-c)^n f^{(n+1)}(c)\right] + (n+1)R_n(x)\frac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}}$$

Sehingga diperoleh

$$R_n(x)(n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{1}{(n)!}(x-c)^n f^{(n+1)}(c)$$

$$= \frac{1}{(n)!}(x-c)^n f^{(n+1)}(c).\frac{1}{(n+1)}\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-c)^n}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

2.3 Metode Newton dan Konvergensinya

Metode Newton berasal dari turnan deret Taylor orde pertama. Banyak para peneliti menggunakan metode ini menjadi metode yang lebih baik untuk konvergensinya, sehingga membuatnya metode ini sangat populer. Misalkan fungsi f dapat diekspansi di sekitar $x = x_n$ menggunakan deret Taylor dengan x_n pendekatan $f(x) = 0$, jika $f(x)$ diekspansi di sekitar $x = x_n$ sampai orde pertama, maka diperoleh

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) \tag{2.14}$$

Karena $f(x) = 0$, selanjutnya distribusikan $x = x_{n+1}$ ke persamaan (2.14) sehingga menjadi:

$$0 = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) f'(x_n)$$

$$(x_{n+1} - x_n) f'(x_n) = -f(x_n)$$

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = 0, 1, 2,.. \tag{2.15}$$

persamaan (2.15) merupakan metode Newton.

Teorema 2.2 : (Weerakon, 2000) Misalkan $f(x)$ adalah fungsi bernilai rill yang mempunyai turunan pertama, kedua dan ketiga pada interval (a,b). Jika $f(x)$ mempunyai akar $\sim$ pada interval (a,b) dan x_0 adalah nilai tebakan awal yang cukup dekat ke $\sim$, maka metode iterasi pada persamaan (2.3) memenuhi persamaan *error*

$$e_n = x_n - \sim \text{ dan } C_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\sim)}{f'(\sim)} \quad k = 1,2,3,\cdots$$

Bukti : Misalkan $\sim$ adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\sim) = 0$. Asumsikan $f'(x) \neq 0$ dan $x_n = \sim + e_n$, dan dengan menggunakan rumus ekspansi Taylor untuk mengaproksimasi fungsi *f* di sekitar x_n, diperoleh

$$f(x_n) = f(\sim + e_n)$$

$$= f(\sim) + f'(\sim)e_n + \frac{1}{2!} f''(\sim)e_n^2 + \frac{1}{3!} f'''(\sim)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.16}$$

Karena $f(\sim) = 0$, maka dengan melakukan manipulasi aljabar pada persamaan (2.16) diperoleh

$$f(x_n) = f'(\sim)\left(e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\sim)e_n^3}{f'(\sim)} + \frac{O(e_n^4)}{f'(\sim)} \right)$$

$$= f'(\sim)\left(e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\sim)e_n^3}{f'(\sim)} + O(e_n^4) \right)$$

$$= f'(\sim)\left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \tag{2.17}$$

Jika untuk $f'(x_n)$ dilakukan ekspansi Taylor di sekitar $x = \sim$ maka

$$f'(x_n) = f'(\sim)\left(1 + \frac{f''(\sim)e_n}{f'(\sim)} + \frac{1}{2!}\frac{f'''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + \frac{O(e_n^3)}{f'(\sim)} \right)$$

$$= f'(\sim)\left(1 + \frac{f''(\sim)e_n}{f'(\sim)} + \frac{1}{2!}\frac{f'''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + O(e_n^3)\right)$$

$$= f'(\sim)\left(1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right) \qquad (2.18)$$

Apabila persamaan (2.17) dibagi dengan persamaan (2.18) diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\sim)\left(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{f'(\sim)\left(1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)}$$

$$= \frac{\left(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{\left(1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)}$$

$$= \left(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times \left(1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)^{-1}$$

$$= \left(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times \left(1 - \left(2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)\right)$$

$$+ \left(2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)^2 - \ldots)$$

$$= \left(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times \left(1 - \left(2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right) + \left(4C_2^2e_n^2 + \ldots\right)\right)$$

$$= \left(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times \left(1 - 2C_2e_n + \left(4C_2^2 - 3C_3\right)e_n^2 + O(e_n^3)\right)$$

$$= e_n - C_2e_n^2 + \left(2C_2^2 - 2C_3\right)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (2.19)$$

Selanjutnya persamaan (2.20) substitusikan ke persamaan umum Newton dan diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \left(e_n - C_2e_n^2 + \left(2C_2^2 - 2C_3\right)e_n^3 + O(e_n^4)\right)$$

$$e_{n+1} + \sim = e_n + \sim - e_n + C_2e_n^2 - \left(2C_2^2 - 2C_3\right)e_n^3 - O(e_n^4)$$

$$e_{n+1} = C_2e_n^2 - \left(2C_2^2 - 2C_3\right)e_n^3 - O(e_n^4) \qquad (2.20)$$

2.4 Metode Potra-Ptak dan Orde Konvergensinya

Diberikan persamaan metode Potra-ptak sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f^{'}(x_n)} \quad \text{untuk} \quad n = 0,1,2,3,..$$

dan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}$$

Misalkan $f(x)=0$ dan $\sim$ adalah akar dari fungsi $f(x)$ tersebut, maka $f(\sim)=0$ dan asumsikan bahwa $f^{'}(x)\neq 0$. Dengan menggunakan ekspansi taylor untuk $f(x_n)$ di sekitar $x=\sim$ diperoleh

$$f(x_n)= f(\sim+e_n)$$

$$= f(\sim)+f'(\sim)e_n+\frac{1}{2!}f''(\sim)e_n^2+\frac{1}{3!}f'''(\sim)e_n^3+O(e_n^4) \qquad (2.21)$$

Karena $f(\sim)=0$, maka dengan melakukan manipulasi aljabar pada persamaan (2.21) menghasilkan

$$f(x_n)= f'(\sim)\left(e_n+\frac{1}{2!}\frac{f''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)}+\frac{1}{3!}\frac{f'''(\sim)e_n^3}{f'(\sim)}+\frac{O(e_n^4)}{f'(\sim)}\right)$$

$$= f'(\sim)\left(e_n+C_2e_n^2+C_3e_n^3+O(e_n^4)\right) \qquad (2.22)$$

Sedangkan untuk $f^{'}(x)$ dapat diperoleh dengan mengekspansinya di sekitar $x=\sim$ diperoleh

$$f'(x_n)= f'(\sim)\left(1+\frac{f''(\sim)e_n}{f'(\sim)}+\frac{1}{2!}\frac{f'''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)}+\frac{O(e_n^3)}{f'(\sim)}\right)$$

$$= f'(\sim)\left(1+2C_2e_n+3C_3e_n^2+O(e_n^3)\right) \qquad (2.23)$$

maka

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=\frac{f'(\sim)\left(e_n+C_2e_n^2+C_3e_n^3+O(e_n^4)\right)}{f'(\sim)\left(1+2C_2e_n+3C_3e_n^2+O(e_n^3)\right)}$$

$$=\frac{\left(e_n+C_2e_n^2+C_3e_n^3+O(e_n^4)\right)}{\left(1+2C_2e_n+3C_3e_n^2+O(e_n^3)\right)} \qquad (2.24)$$

misalkan $u=2C_2e_n+3C_3e_n^2+O(e_n^3)$ dan dengan menggunakan

$$\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+\ldots$$

maka persamaan (2.24) dapat dibentuk menjadi

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=\left(e_n+C_2e_n^2+C_3e_n^3+O(e_n^4)\right)\times\left(1+2C_2e_n+3C_3e_n^2+O(e_n^3)\right)^{-1}$$

$$=\left(e_n+C_2e_n^2+C_3e_n^3+O(e_n^4)\right)$$
$$\times\left(1-\left(2C_2e_n+3C_3e_n^2+O(e_n^3)\right)+\left(2C_2e_n+3C_3e_n^2+O(e_n^3)\right)^2-\ldots\right)$$

$$=\left(e_n+C_2e_n^2+C_3e_n^3+O(e_n^4)\right)\times\left(1-\left(2C_2e_n+3C_3e_n^2+O(e_n^3)\right)+\left(4C_2^2e_n^2+\ldots\right)\right)$$

$$=\left(e_n+C_2e_n^2+C_3e_n^3+O(e_n^4)\right)\times\left(1-2C_2e_n+\left(4C_2^2-3C_3\right)e_n^2+O(e_n^3)\right)$$

$$=e_n-C_2e_n^2+\left(2C_2^2-2C_3\right)e_n^3+O(e_n^4) \qquad (2.25)$$

sehingga

$$f(y_n)=\left(x_n-\frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}\right)$$

$$f(y_n)=\sim+e_n-(e_n-C_2e_n^2+\left(2C_2^2-2C_3\right)e_n^3+O(e_n^4))$$

$$f(y_n)=\sim+C_2e_n^2+\left(2C_2^2-2C_3\right)e_n^3+O(e_n^4)) \qquad (2.26)$$

untuk itu,

$$f(y_n)=f^{'}(\sim)(C_2e_n^2+(2C_3-2C_2^2)e_n^3+$$

$$(-7C_2C_3+3C_4-4C_2^3)e_n^4+O(e_n^5)) \qquad (2.27)$$

selanjutnya

$$\frac{f(x_n)+f(y_n)}{f^{'}(x_n)}=\frac{f^{'}(\sim)(C_2e_n^2+(2C_3-2C_2^2)e_n^3+(-7C_2C_3+3C_4-4C_2^3)e_n^4}{f'(\sim)\left(1+2C_2e_n+3C_3e_n^2+O(e_n^3)\right)}$$

$$=\frac{(C_2e_n^2+(2C_3-2C_2^2)e_n^3+(-7C_2C_3+3C_4-4C_2^3)e_n^4}{\left(1+2C_2e_n+3C_3e_n^2+O(e_n^3)\right)}$$

karena

$$\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+..$$

maka

$$\frac{f(x_n)+f(y_n)}{f^{'}(x_n)}=e_n-2C_2^2\ e_n^3+(-2(3c_3-2c_2^2)c_2$$

$$+5c_2c_3+2c_2(-3c_3+4c_2^2)-4c_2^3)e_n^4+O(e_n^5) \qquad (2.28)$$

selanjutnya persamaan (2.27) dan persamaan (2.28) substitusikan ke persamaan (1.2) dan diperoleh :

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)+f(x_n-f(x_n)/f^{'}(x_n))}{f^{'}(x_n)}$$

$$=(\sim+e_n)-(e_n-2C_2^2\ e_n^3+(-2(3c_3-2c_2^2)c_2+5c_2c_3$$

$$+2c_2(-3c_3+4c_2^2)-4c_2^3)e_n^4+O(e_n^5)$$

$$=\sim+2c_2^2e_n^3+O(e_n^4) \qquad (2.29)$$

dari persamaan (2.30), sehingga di peroleh orde konvergensi persamaan adalah

$$x_{n+1} = \sim + 2c_2^2 e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$e_{n+1} + \sim = \sim + 2c_2^2 e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$e_{n+1} = 2c_2^2 e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (2.30)$$

Sehingga metode Potra-Ptak memiliki konvergensi orde ketiga.

2.5 Interpolasi Kuadratik

Misalkan diberikan dua buah titik $(x_n, f'(x_n))$ dan $(y_n, f'(y_n))$ dan misalkan polinom yang menginterpolasi kedua titik itu adalah persamaan kuadratik yang berbentuk

$$h(x) = ax^2 + bx + c \qquad (2.31)$$

Koefisien b dan c dicari dengan proses mensubstitusikan $(x_n, f'(x_n))$ dan $(y_n, f'(y_n))$ ke dalam persamaan di atas, diperoleh dua persamaan kuadratik

$$f'(x_n) = a(x_n)^2 + b(x_n) + c \qquad (2.32)$$

$$f'(y_n) = a(y_n)^2 + b(y_n) + c \qquad (2.33)$$

dan dengan mengeliminasi persamaan (2.32) dan persamaan (2.33), diperoleh b dan c dengan bentuk

$$b = \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} - a(x_n + y_n) \qquad (2.34)$$

dan

$$c = f'(x_n) + ax_n y_n - x_n \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} \qquad (2.35)$$

Subtitusikan nilai b dan c tersebut ke dalam persamaan $h(x)$, maka diperoleh :

$$h(x) = ax^2 + \left(\frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} - a(x_n + y_n)\right)x + f'(x_n) + ax_n y_n - x_n \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n}$$

$$= ax^2 - a(x_n + y_n)x + ax_n y_n + \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n}x + f'(x_n) - x_n \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n}$$

$$= a(x - x_n)(x - y_n) + f'(x_n) + \frac{xf'(x_n) - xf'(y_n) - x_n f'(x_n) + x_n f'(y_n)}{x_n - y_n}$$

$$= a(x - x_n)(x - y_n) + f^{'}(x_n) + \frac{f^{'}(x_n)(x - x_n) - f^{'}(y_n)(x - x_n)}{x_n - y_n}$$

$$= a(x - x_n)(x - y_n) + f^{'}(x_n) + \frac{f^{'}(x_n) - f^{'}(y_n)}{x_n - y_n}(x - x_n) \tag{2.36}$$

Bentuk terakhir dapat diubah menjadi,

$$h(x) = a(x - x_n)(x - y_n) + f^{'}(x_n) + \frac{x - y_n}{x_n - y_n} f^{'}(x_n) - \frac{x - y_n}{x_n - y_n} f^{'}(y_n)$$

$$= a(x - x_n)(x - y_n) + f^{'}(x_n) + \frac{f^{'}(x_n)(x - x_n) - f^{'}(y_n)(x - x_n)}{x_n - y_n}$$

$$= a(x - x_n)(x - y_n) + \frac{f^{'}(x_n)(x_n - y_n) + f^{'}(x_n)(x - y_n)}{x_n - y_n} + \frac{x - y_n}{y_n - x_n} f^{'}(y_n)$$

$$= a(x - x_n)(x - y_n) + \frac{(x - x_n)}{(y_n - x_n)} f^{'}(y_n) + \frac{(x - y_n)}{(x_n - y_n)} f^{'}(x_n) \tag{2.37}$$

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Penulisan tugas akhir ini menggunakan metode studi literatur yang bertujuan mengumpulkan data dan informasi yang dibutuhkan dalam penelitian yang berasal dari buku-buku dan jurnal yang berhubungan dengan penelitian untuk menyelesaikan permasalahan pada penelitian ini.

Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan metode Potra-ptak orde tiga dengan bentuk:

$$z_n = y_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)}$$

   dengan,

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

2. Mendefinisikan kembali persamaan (3.1) ke dalam bentuk Newton

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, \; f'(z_n) \neq 0$$

3. Definisikan interpolasi kuadratik dengan bentuk,

$$h(x) = a(x - x_n)(x - y_n) + \frac{(x - x_n)}{(y_n - x_n)} f'(y_n) + \frac{(x - y_n)}{(x_n - y_n)} f'(x_n)$$

4. Mengaproksimasikan formulasi yang diusulkan, kemudian asumsikan bahwa aproksimasi $f'(x) \approx h(x)$, sehingga $f'(z_n)$ pada persamaan (2.15) dapat diaproksimasikan dengan $h(x)$ pada persamaan (2.37).
5. Menganalisa orde konvergensi yang dihasilkan berdasarkan rumusan iterasi.
6. Membuat beberapa simulasi numerik menggunakan bahasa pemograman *Matlab* untuk menentukan jumlah iterasi yang digunakan pada hampiran akar-akar fungsi.
7. Membandingkan dengan hasil penelitian lain, seperti metode Newton (orde konvergensi tingkat dua), Metode Potra (orde konvergensi tingkat tiga) dan metode Super-Halley orde tiga.

BAB IV
PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai modifikasi metode Potra-ptak menggunakan Interpolasi Kuadratik, orde konvergensi dan membuat simulasi numeriknya serta membandingkannya dengan dengan hasil penelitian lain, seperti metode Newton (Orde konvergensi tingkat 2), Metode Potra-ptak (Orde tiga) dan metode Super-halley orde empat.

4.1 Modifikasi Metode Potra-Ptak

Pandang kembali metode Potraiptak, kemudian definisikan kembali dalam bentuk

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)} \tag{4.1}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{4.2}$$

Selanjutnya, definisikan kembali metode Newton dengan bentuk

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \tag{4.3}$$

Kemudian, definisikan kembali interpolasi kuadratik yang menginterpolasi titik $(x_n, f'(x_n))$ dan $(y_n, f'(y_n))$ pada persamaan $h(x) = ax^2 + bx + c$ sehingga menjadi

$$h(x) = a(x - x_n)(x - y_n) + \frac{(x - x_n)}{(y_n - x_n)} f'(y_n) + \frac{(x - y_n)}{(x_n - y_n)} f'(x_n) \tag{4.4}$$

Asumsikan bahwa $f'(x) \approx h(x)$, sehingga $f'(z_n)$ pada persamaan (4.3) dapat diaproksimasikan dengan $h(x)$ pada persamaan (4.4), dimana x pada $h(x)$ di diganti dengan z_n sehingga menjadi

$$f'(z_n) \approx h(z_n) = a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + \frac{(z_n - x_n)}{(y_n - x_n)} f'(y_n) + \frac{(z_n - y_n)}{(x_n - y_n)} f'(x_n) \tag{4.5}$$

Persamaan (4.5) di atas dapat dibentuk menjadi

$$f^{'}(z_n) \approx a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + \frac{\left(\left(x_n - \frac{f(x_n)+f(y_n)}{f^{'}(x_n)}\right) - x_n\right)}{\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}\right) - x_n} f^{'}(y_n)$$

$$+ \frac{\left(\left(x_n - \frac{f(x_n)+f(y_n)}{f^{'}(x_n)}\right) - \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}\right)\right)}{\left(x_n - \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}\right)\right)} f^{'}(x_n)$$

$$= a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + \frac{\left(x_n - \frac{f(x_n)+f(y_n)}{f^{'}(x_n)} - x_n\right)}{\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)} - x_n\right)} f^{'}(y_n)$$

$$+ \frac{\left(x_n - \frac{f(x_n)+f(y_n)}{f^{'}(x_n)} - x_n + \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}\right)}{\left(x_n - x_n + \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}\right)} f^{'}(x_n)$$

$$= a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + \left(\frac{\left(f(x_n) + f(y_n)\right) f^{'}(y_n)}{f(x_n)} + \frac{\left(-\frac{f(x_n)+f(y_n)}{f'(x_n)} + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) f'(x_n) f^{'}(x_n)}{f(x_n)} \right)$$

$$= a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + \frac{f'(y_n)\ \ f(x_n) + f'(y_n) f(y_n) - f'(x_n) f(y_n)}{f(x_n)}$$

$$= a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + f'(y_n) + \left(f'(y_n) - f'(x_n)\right) \frac{f(y_n)}{f(x_n)}$$

sehingga

$$f^{'}(z_n) \approx a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + f'(y_n) + \left(f'(y_n) - f'(x_n)\right) \frac{f(y_n)}{f(x_n)} \tag{4.6}$$

Kemudian, subtitusikan persamaan (4.6) ke dalam persamaan (4.3) sehingga diperoleh Metode iterasi Potra-ptak baru dengan bentuk

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + f'(y_n) + \left(f'(y_n) - f'(x_n)\right) \frac{f(y_n)}{f(x_n)}} \tag{4.7}$$

dengan z_n didefinisikan dari persamaan (4.1) dan y_n dari persamaan (4.2). Dari persamaan (4.7) dapat dibentuk tiga persamaan, yaitu:

untuk $a = 0$,

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(y_n) + \left(f'(y_n) - f'(x_n)\right)\frac{f(y_n)}{f(x_n)}} \tag{4.8}$$

untuk $a = 1$,

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{(z_n - x_n)(z_n - y_n) + f'(y_n) + \left(f'(y_n) - f'(x_n)\right)\frac{f(y_n)}{f(x_n)}} \tag{4.9}$$

untuk $a = -1$,

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(y_n) + \left(f'(y_n) - f'(x_n)\right)\frac{f(y_n)}{f(x_n)}) - (z_n - x_n)(z_n - y_n)} \tag{4.10}$$

4.2 Analisa Konvergensi

Teorema 4.1 Misalkan $\sim \in I$ adalah akar dari fungsi $f : I \to R$ untuk suatu interval terbuka *I*. Jika x_0 adalah nilai tebakan awal yang cukup dekat ke $\sim$ maka metode iterasi pada persamaan (4.7) memiliki persamaan *error :*

$$e_{n+1} = 2\left(aC_2^3 - 3C_2^3C_3 + 2C_2^5\right)e_n^6 + O(e_n^7) \tag{4.11}$$

Bukti : Misalkan $\sim \in I$ dimana $\sim$ merupakan akar dari $f(x)$, maka $f(\sim) = 0$ dan $f^{'}(\sim) \neq 0$, dengan menggunakan deret Taylor diperoleh:

$$f(x_n) = f^{'}(\sim)(e_n + C_2e_n^2 + C_3e_n^3 + C_4e_n^4 + O(e_n^5) \tag{4.12}$$

$$f^{'}(x_n) = f^{'}(\sim)(1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + 4C_4e_n^3 + O(e_n^4) \tag{4.13}$$

Selanjutnya dari persamaan (4.12) dan (4.13) diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\sim)[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + O(e_n^5)]}{f^{'}(\sim)[1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + 4C_4e_n^3 + O(e_n^4)]}$$

$$= \frac{\left(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + O(e_n^5\right)}{\left(1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + 4C_4e_n^3 + O(e_n^4)\right)}$$

$$= \left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + O(e_n^5\right) \times \left(1 - \left(2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + 4C_4 e_n^3 + O(e_n^4)\right)\right)$$

$$+ \left(2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + 4C_4 e_n^3 + O(e_n^4)\right)^2 - ...$$

$$= e_n + c_2 e_n^2 - (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + (7c_2 c_3 - 3c_4 + 4c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5)$$

$$f(y_n) = c_2 e_n^2 - (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + (7c_2 c_3 - 3c_4 + 4c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5) \qquad (4.14)$$

Selanjutnya $f'(y_n)$ ditentukan dengan menggunakan ekspansi $f(y_n)$ disekitar $\sim$ diperoleh :

$$f'(y_n) = f(\sim + e_n)$$

$$= f'(\sim) + f''(\sim)(y_n - \sim) + \frac{f'''(\sim)}{2!}(y_n - \sim)^2 + ...$$

$$= f'(\sim) + f''(\sim)\left(c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right) + ...$$

$$= f'(\sim)\left[1 + \frac{1}{2!}\frac{2\left(f''(\sim)\left(c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right)\right)}{f'(\sim)} + ...\right]$$

$$= f'(\sim)\left[1 + 2c_2\left(c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\right) + ...\right]$$

$$f'(y_n) = f'(\sim)\left[1 + 2c_2^2 e_n^2 + 4(c_2 c_3 - c_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)\right] \qquad (4.15)$$

Substitusikan persamaan (4.12), (4.13) dan (4.14) kedalam persamaan (4.1) diperoleh :

$$z_n = \sim + 2c_2^2 e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (4.16)$$

Kemudian dengan menggunakan persamaan (4.14) dan persamaan (4.12), maka diperoleh:

$$\frac{f(y_n)}{f(x_n)} = \frac{f'(\sim)\left(C_2 e_n^2 - 2(C_2^2 - C_3)e_n^3 + (3C_4 + 5C_2^3 - 7C_2 C_3)e_n^4 + O(e_n^5)\right)}{f'(\sim)(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + C_4 e_n^4 + O(e_n^5)}$$

$$= \frac{C_2 e_n^2 - 2(C_2^2 - C_3)e_n^3 + (3C_4 + 5C_2^3 - 7C_2 C_3)e_n^4 + O(e_n^5)}{e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + C_4 e_n^4 + O(e_n^5)}$$

$$= C_2 e_n^2 - 2(C_2^2 - C_3)e_n^3 + (3C_4 + 5C_2^3 - 7C_2 C_3)e_n^4 + O(e_n^5) \times \left(1 - \left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + C_4 e_n^4 + O(e_n^5)\right)\right)$$

$$+ \left(\left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + C_4 e_n^4 + O(e_n^5)\right)\right)^2 - ...$$

$$= C_2 e_n + (2C_3 - 3C_2^2)e_n^2 + O(e_n^3) \qquad (4.17)$$

Selanjutnya, dengan mengurangi persamaan (4.15) dengan persamaan (4.13) diperoleh :

$$f'(y_n) - f'(x_n) = f'(\sim)\left[1 + 2c_2^2 e_n^2 + 4(c_2 c_3 - c_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)\right]$$

$$- f'(\sim)(1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + 4C_4 e_n^3 + O(e_n^4))$$

$$= -2C_2 e_n + (2C_2^2 - 3C_3)e_n^2 + 4C_2(C_3 - C_2^2)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (4.18)$$

dengan mengalikan persamaan (4.18) dengan persamaan (4.17) diperoleh :

$$\left(f'(y_n) - f'(x_n)\right)\frac{f(y_n)}{f(x_n)} = -2C_2^2 e_n^2 + (8C_2^3 - 7C_2 C_3)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (4.19)$$

Berdasarkan persamaan (4.4) diperoleh :

$$z_n - x_n = x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)} - x_n$$

$$= -\frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)}$$

$$= -\frac{(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)) + C_2 e_n^2 - 2(C_2^2 - C_3)e_n^3 + O(e_n^4)}{1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + 4C_4 e_n^3 + O(e_n^4)}$$

$$= e_n - 2C_2^2 e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (4.20)$$

$$z_n - y_n = x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)} - x_n + \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}$$

$$= -\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}$$

$$= \frac{f'(\sim)[c_2 e_n^2 - (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + (7c_2 c_3 - 3c_4 + 4c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5)]}{f'(\sim)[1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + 4C_4 e_n^3 + O(e_n^4)]}$$

$$= \frac{c_2 e_n^2 - (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + (7c_2 c_3 - 3c_4 + 4c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5)}{\left(1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + 4C_4 e_n^3 + O(e_n^4)\right)}$$

$$= c_2 e_n^2 - (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4) \times \left(1 - \left(2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + 4C_4 e_n^3 + O(e_n^4)\right)\right)$$

$$+ \left(2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + 4C_4 e_n^3 + O(e_n^4)\right)^2 - \ldots$$

$$= -C_2 e_n^2 + O(e_n^3) \qquad (4.21)$$

maka,

$$a(z_n - x_n)(z_n - y_n) = aC_2 e_n^3 + O(e_n^4) \tag{4.22}$$

Sehingga penambahan dari persamaan (4.22), (4.15) dan (4.19) diperoleh :

$$a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + f'(y_n) + f'(y_n) - f'(x_n)\frac{f(y_n)}{f(x_n)}$$

$$= \left(1 + (aC_2 - 3C_2C_3 + 4C_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)\right) \tag{4.23}$$

Ekspansi deret Taylor pada $f(zn)$ terhadap ~ diberikan oleh

$$f(z_n) = z_n + C_2 z_n^2 + C_2 z_n^3 + C_2 z_n^4 \tag{4.24}$$

$$f(z_n) = f'(\sim)\left(2C_2^2 e_n^3 + c_2\left(2C_2^2\right)^2 e_n^6\right) \tag{4.25}$$

Sehingga dengan membagikan persamaan (4.25) dengan persamaan (4.23) maka diperoleh :

$$\frac{f(z_n)}{a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + f'(y_n) + f'(y_n) - f'(x_n)\frac{f(y_n)}{f(x_n)}}$$

$$= \frac{\left(2C_2^2 e_n^3 + c_2\left(2C_2^2\right)^2 e_n^6\right)}{\left(1 + (aC_2 - 3C_2C_3 + 4C_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)\right)}$$

$$= (\left(2C_2^2 e_n^3 + c_2\left(2C_2^2\right)^2 e_n^6\right))[1 - ((aC_2 - 3C_2C_3 + 4C_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)$$
$$+ \left((aC_2 - 3C_2C_3 + 4C_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)\right)^2 + \ldots]$$

dan untuk

$$x_{n+1} = z_n - \left(2C_2^2 e_n^3 + c_2\left(2C_2^2\right)^2 e_n^6\right)[1 - ((aC_2 - 3C_2C_3 + 4C_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)$$
$$+ \left((aC_2 - 3C_2C_3 + 4C_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)\right)^2 + \ldots]$$
$$= 2\left(aC_2^3 - 3C_2^3 C_3 + 2C_2^5\right)e_n^6 + O(e_n^7)$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \sim$, maka diperoleh,

$$e_{n+1} + \sim = \sim + 2\left(aC_2^3 - 3C_2^3 C_3 + 2C_2^5\right)e_n^6 + O(e_n^7)$$

$$e_{n+1} = 2\left(aC_2^3 - 3C_2^3 C_3 + 2C_2^5\right)e_n^6 + O(e_n^7) \tag{4.26}$$

Berdasarkan Teorema (4.1), persamaan (4.7) memiliki orde konvergensi keenam.

Untuk $a = 0$, maka orde konvergensi persamaan (4.8)

$$e_{n+1} = 2\left(-3C_2^3 C_3 + 2C_2^5\right)e_n^6 + O(e_n^7) \tag{4.27}$$

Untuk $a = 1$, maka orde konvergensi persamaan (4.9)

$$e_{n+1} = 2\left(aC_2^3 - 3C_2^3 C_3 + 2C_2^5\right)e_n^6 + O(e_n^7) \tag{4.28}$$

Dan untuk $a = -1$, maka orde konvergensi persamaan (4.10)

$$e_{n+1} = 2\left(aC_2^3 - 3C_2^3 C_3 + 2C_2^5\right)e_n^6 + O(e_n^7) \tag{4.29}$$

Sehingga berdasarkan analisa konvergensi, semua hasil modifikasi Potra-ptak dengan menggunakan interpolasi kuadratik memiliki orde konvergensi ke-enam.

4.3 Simulasi Numerik

Pada sub bab ini, akan ditunjukkan keefektivan dari persamaan (4.8), (4.9), dan (4.10) dalam menyelesaikan persamaan nonlinier. Oleh karena itu, dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan *processor* komputer Intel(R) Atom(TM) CPU N570 @ 1.66 GHz (4CPUs), *Operating System* Windows 7 Ultimate 32-bit (6.1, build 7600) , memori 2 GB dan melibatkan aplikasi pemograman MATLAB versi 7.0.4, dengan digit error e = 10^{-16} dan kriteria penghentian program komputer:

$f_1(x) = x^3 + 4x^2 - 10 \qquad \sim \approx 1.3652300134140968$

$f_2(x) = x^2 - e^x - 3x + 2 \qquad \sim \approx 0.2575302854398607$

$f_3(x) = (\cos x - x) \qquad \sim \approx 0.7390851332151606$

$f_4(x) = (x-1)^3 - 1 \qquad \sim \approx 2.0000000000000000$

$f_5(x) = xe^{x^2} - \sin^2 x + 3\cos x + 5 \qquad \sim \approx -1.2076478271309189$

$f_6(x) = (x+2)e^x - 1 \qquad \sim \approx -0.4428544010023885$

$f_7(x) = \sin^2 x - x^2 + 1 \qquad \sim \approx 1.4044916482153412$

Berdasarkan hasil perhitungan komputasi atau simulasi numerik diperoleh jumlah iterasi dari berbagai metode seperti : NM dinotasikan sebagai metode Newton dengan orde konvergensi dua, PTR dinotasikan sebagai metode Potra dengan orde konvergensi tiga, SHM dinotasikan sebagai metode Super-Halley dengan orde konvergensi tiga oleh Yaotang Li (2009), PTRI1 dinotasikan sebagai metode pada persamaan (4.8), PTRI2 dinotasikan sebagai metode pada persamaan (4.9), PTRI3 dinotasikan sebagai metode pada persamaan (4.10) dengan orde konvergensi 6.

Tabel 4.1 Perbandingan Jumlah Iterasi

$f(x)$	x_0	Jumlah Iterasi					
		NW	PTR	SHM	PTRI1	PTRI2	PTRI3
$f_1(x)$	-0.3	54	50	32	5	18	Ttd
	-0.5	131	8	14	13	44	15
$f_2(x)$	1	7	16	3	2	4	3
	5	8	5	5	3	4	4
$f_3(x)$	4.5	8	5	4	3	4	Ttd
	7	9	7	5	3	3	3
$f_4(x)$	2.4	5	3	3	3	3	2
	7	27	4	14	3	4	3
$f_5(x)$	0.2	26	9	8	18	6	Ttd
	3.5	7	5	4	3	4	3
$f_6(x)$	-0.5	11	Ttd	4	13	8	15
	-2.5	12	8	6	20	7	12
$f_7(x)$	2	8	6	4	2	3	2
	4	11	8	5	3	4	3

Berdasarkan Tabel 4.1 mengambarkan perbandingan jumlah iterasi dari berbagai metode dengan menggunakan beberapa fungsi dan nilai awal yang berbeda, di mana secara umum Tabel 4.1 menunjukkan bahwa metode iterasi dengan orde yang lebih tinggi memiliki jumlah iterasi yang lebih sedikit dibandingkan metode iterasi yang mempunyai orde konvergensi lebih rendah. Akan tetapi, pada beberapa fungsi ada yang menunjukkan orde yang lebih tinggi memiliki iterasi yang lebih banyak dibandingkan metode iterasi yang orde konvergensi yang lebih rendah. seperti pada $f_1(x)$ dengan nilai awal -0.5, PTRI2 dengan orde konvergensi enam memiliki iterasi lebih banyak dibandingkan SHM yang memiliki orde konvergensi keempat. Hal ini bisa terjadi karena setiap metode memiliki cara tersendiri dalam menghampiri akar sebuah fungsi tergantung pada bentuk persamaan serta fungsi yang diberikan dan nilai awal yang diberikan pada fungsi itu.

Selain menggunakan iterasi, kekonvergenan juga dapat dilihat dengan menggunakan *Computational Order of Convergence* (COC), yakni perhitungan orde konvergensi secara numerik.

Tabel 4.2 Perbandingan Nilai COC

$f(x)$	x_0	COC					
		NW	PTR	SHM	PTRI1	PTRI2	PTRI3
$f_1(x)$	-0.3	2.03	2.97	3.73	3.30	4.58	Ttd
	-0.5	1.99	3.03	3.98	5.21	Ttd	3.93
$f_2(x)$	1	1.99	2.96	Ttd	5.99	5.78	Ttd
	5	1.99	3.03	4.05	5.99	4.99	Ttd
$f_3(x)$	4.5	1.88	2.89	3.91	3.18	4.55	Ttd
	7	2.00	2.84	4.03	5.30	5.50	Ttd
$f_4(x)$	2.4	1.99	2.96	3.83	5.99	5.89	Ttd
	7	1.99	2.93	3.88	5.98	5.80	Ttd
$f_5(x)$	0.2	2.00	2.98	3.76	4.40	5.63	Ttd
	3.5	1.99	2.98	3.90	Ttd	Ttd	Ttd
$f_6(x)$	-0.5	2.00	2.97	3.66	1.85	Ttd	3.93
	-2.5	2.00	2.97	4.04	3.04	3.04	4.91
$f_7(x)$	2	1.99	2.89	3.84	5.99	4.99	Ttd
	4	2.00	2.98	3.84	5.99	5.05	Ttd

Tabel 4.2 menunjukkan bahwa orde konvergensi pada setiap metode berbeda-beda. Hal ini dapat terjadi akibat fungsi serta nilai awal yang diberikan pada setiap metode. Namun, secara umum hasil perhitungan orde konvergensi secara numerik (COC) metode iterasi yang memiliki orde konvergensi yang lebih

tinggi secara teori menunjukkan nilai COC lebih tinggi dibandingkan metode iterasi yang memiliki orde konvergensi yang lebih rendah.

Berdasarkan Tabel 4.1 dan Tabel 4.2 akan menunjukkan tentang keefektifan persamaan orde konvergensi dalam menyelesaikan persamaan nonlinear untuk menghampiri akar-akar persamaannya.

Tabel 4.3 Perbandingan Indeks

Metode	Orde Konvergensi	Banyak evaluasi fungsi	Indeks
NW	2	2	1.414
PTR	3	3	1.442
SHM	3	4	1.316
PTRI	6	5	1.430

Tabel 4.3 menggambarkan perbandingan indeks secara numerik. Tabel 4.3 menunjukkan bahwa nilai indeks untuk modifikasi metode Potra-ptak menggunakan Interpolasi Kuadratik (PTRI) lebih besar dibandingkan dengan metode newton, maka metode ini lebih efektif dalam menyelesaikan persamaan nonlinear.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Metode Potra-ptak memiliki orde konvergensi ketiga, setelah dimodifikasi menggunakan Interpolasi Kuadratik, maka diperoleh persamaan baru pada persamaan (4.7) dengan bentuk:

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{a(z_n - x_n)(z_n - y_n) + f'(y_n) + \left(f'(y_n) - f'(x_n)\right)\dfrac{f(y_n)}{f(x_n)}}$$

dengan

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)}$$

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

dan persamaan errornya sebagai berikut:

$$e_{n+1} = 2\left(aC_2^3 - 3C_2^3 C_3 + 2C_2^5\right)e_n^6 + O(e_n^7)$$

yang merupakan orde konvergensi enam. Selanjutnya dengan mengambil $a = 0$, $a = -1$ dan $a = 1$ diperoleh tiga persamaan baru dengan bentuk:

PTRI 1 dengan $a = 0$,

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(y_n) + \left(f'(y_n) - f'(x_n)\right)\dfrac{f(y_n)}{f(x_n)}}$$

untuk PTRI 2 dengan $a = 1$,

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{(z_n - x_n)(z_n - y_n) + f'(y_n) + \left(f'(y_n) - f'(x_n)\right)\dfrac{f(y_n)}{f(x_n)}}$$

Untuk PTRI 3 dengan $a = -1$,

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(y_n) + \left(f'(y_n) - f'(x_n)\right)\dfrac{f(y_n)}{f(x_n)}) - (z_n - x_n)(z_n - y_n)}$$

Berdasarkan hasil simulasi numerik pada Tabel 4.1, Tabel 4.2 PTRI secara umum memiliki iterasi yang lebih sedikit dan nilai COC yang lebih tinggi dibanding metode iterasi Newton dan metode lain nya. Dan berdasarkan Tabel 4.3 indeks PTRI lebih efektif dalam menyelesaikan persamaan nonlinear.

5.2 Saran

Tugas akhir ini, penulis diilhami dari proses yang dilakukan oleh Changbum Chung (2007) yang memodifikasi metode jarrat menggunakan interpolasi kuadratik. Pada skripsi ini, penulis menggunakan COC *(Computational Order of Convergence)* dalam memperlihatkan orde konvergensi secara numerik dan penulis juga menggunakan *Efficiency index* (Chungbum Chun, 2011) dalam memperlihatkan keefektifan persamaan orde konvergensinya. Oleh sebab itu, disarankan pada pembaca untuk meneliti lanjut dalam memperlihatkan orde konvergensi secara numerik dengan menggunakan ACOC *(Approximated Computational Order of Convergence)* dan ECOC *(Extrapolated Computational Order of Convergence)* .

DAFTAR PUSTAKA

Chun, Changbum, "*A new Sixth-Order scheme for Nonlinear Equations*". Applied Mathematics letters. halaman 440-746, 2011

Chun, Changbum, "*Some Improvement of Jarrat's Method with Sixth-order Convergence*". Applied Mathematics and Computation. Vol. 190, halaman 1432-1437, 2007

Ezzati, Reza, "*A Simple Iterative Method with Fifth-order Convergence by using Potra-ptak's method*". Applied Mathematics and Computation. Vol. 3, No. 2 halaman 191-200, 2009

JR, Frank Ayres & Elliot Mendelson, *Kalkulus Edisi Keempat*, Erlangga, Jakarta, 2004

Mathews, John H., *Numerical Methods for Mathematics Science and Engineering, Second Edition*, Prentice-Hall International,Inc, United States of America.1992.

Munir, Rinaldi, *Metode Numerik*, Erlangga, Jakarta, 2003.

Purcell, Edwin J., Dale Varberg., Steven E. Rigdon, *Kalkulus Edisi Kedelapan. Jilid 2*, Erlangga, Jakarta. 2004

Sanjay K. Khattri, Ioannis K. Argyros, "*How to Develop Fourth and Seventh order Iterative Methods?*". Vol. 40, No. 2, halaman 61-67, 2010

Sanjay K. Khattri, Ravi P. Agarwal, "*Quadratur Based Optimal Iterative Methods*". Mathematics Subject Classification. 2000

Smith, Robert T. dan Roland B Milton, *Calculus Second Edition*, MC Graw Hill, New York, 2002

Weerakon, S. dan T.G.I. Fernando, "*A Variant of Newton's Method With Accelerated Third-Order Convergence*". Applied Mathematics Letters. 13:87-93, 2000

Zhong LI, Peng Shong, *A New Newton-Type Method For Solving nonlinear Equations with Any Integer Order of Convergence*, Zhejiang, China, 2011