PEMODELAN KECEPATAN ANGIN MENGGUNAKAN DISTRIBUSI GAMMA DAN WEIBULL

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh
Gelar Sarjana Sains pada Jurusan Matematika

Oleh

GUSTRI NENGSIH
10854004407

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU

PEKANBARU

2013

PEMODELAN KECEPATAN ANGIN MENGGUNAKAN DISTRIBUSI GAMMA DAN WEIBULL

GUSTRI NENGSIH
NIM : 10854004407

Tanggal Sidang : 23 Mei 2013
Periode Wisuda : November 2013

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas tentang dua distribusi yaitu Gamma dua parameter dan Weibull dalam menentukan model distribusi yang sesuai untuk data kecepatan angin di kelurahan Kulim kecamatan Tenayan Raya pada tahun 2009 dan 2010. Estimasi parameter yang digunakan adalah metode maksimum *likelihood* dan menggunakan uji kebaikan (*Goodness of Fit*) AIC (*Akaike's Information Criterion*). Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa, model distribusi Weibull lebih sesuai digunakan untuk data kecepatan angin di kelurahan Kulim, karena nilai AIC yang diperoleh lebih kecil dibandingkan nilai AIC dari distribusi Gamma.

Kata Kunci : **Data** Kecepatan Angin, Distribusi Gamma, Distribusi Weibull, *Goodness of Fit*, Metode Maksimum *Likelihood*.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum wr.wb.

Alhamdulillahirabil'alamin segala puji syukur ke hadirat Allah SWT karena atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan judul **"Pemodelan Kecepatan Angin Menggunakan Distribusi Gamma dan Weibull"**. Penulisan Tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Stata 1 (S1) di UIN Suska Riau. Sholawat serta salam senantiasa kita hadiahkan buat junjungan alam Nabi Besar Muhammad SAW, semoga dengan senantiasa bersholawat kita mendapatkan syafa'atnya.

Rasa hormat dan terimakasih yang sangat besar penulis ucapkan kepada keluarga tercinta, ayahanda dan ibunda yang telah memberikan kasih sayang yang tak ternilai harganya kepada penulis serta limpahan doa dan dukungan baik secara materi ataupun berupa semangat untuk kelancaran penulis dalam melakukan perkuliahan.

Pada kesempatan ini pula, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi.
4. Bapak Rado Yendra, M.Sc selaku Pembimbing yang telah banyak membantu, mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dengan penuh kesabarannya dalam penulisan tugas akhir ini.
5. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc selaku Penguji I yang telah banyak membantu, memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.

6. Ibu Rahmadeni, M.Si selaku Peguji II yang telah banyak membantu, memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
7. Semua dosen-dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan dukungan serta saran dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Laporan tugas akhir ini telah disusun semaksimal mungkin oleh penulis. Meskipun demikian, tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan dalam penulisan maupun dalam penyajian materi. Oleh karena itu, kritik dan saran dari berbagai pihak masih sangat diharapkan oleh penulis demi kesempurnaan laporan ini.

Pekanbaru, 23 Mei 2013

Gustri Nengsih

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Distribusi Gamma adalah salah satu distribusi kontinu yang dapat digunakan untuk menyelesaikan banyak persoalan dalam bidang rekayasa dan sains. Sebagai salah satu contohnya distribusi Gamma memainkan peran penting dalam teori antrian dan teori keandalan *(reliabilitas)* misalnya untuk mengatasi data hilang.

Salah satu data yang bisa diaplikasikan dengan menggunakan distribusi gamma adalah data kecepatan angin. Angin merupakan udara yang bergerak dan sejajar dengan permukaan bumi. Menurut Soenarmo (2003), manifestasi utama dari sirkulasi angin adalah medan tekanan. Angin terjadi disebabkan oleh adanya perbedaan tekanan horisontal. Besarnya kecepatan angin ditunjukkan oleh kecuraman beda tekanan. Jika beda tekanan besar maka angin menjadi kencang, sedangkan jika beda tekanan lemah maka angin juga menjadi lemah (Tjasjono, 1995).

Lapan (2009) menyatakan bahwa kecepatan angin merupakan salah satu dampak dari perubahan iklim yang merupakan faktor penting dalam kehidupan manusia. Hal ini ditunjukkan oleh pemanfaatan angin dalam kehidupan sehari-hari seperti faktor penentu penerbangan dan pelayaran, pengaruh kecepatan air dalam pengairan tanaman, sebagai input pembangkit lisrik tenaga angin, penerbangan, serta merupakan faktor penting dalam mempengaruhi prakiraan cuaca dan lain sebagainya.

Terkadang angin sendiri memberikan dampak-dampak negatif. Kecepatan angin yang melebihi batas maksimum kondisi aman (melebihi 40 km/jam) dapat mengakibatkan bencana, misalnya rusaknya bangunan akibat badai, tanaman rusak, nelayan tidak dapat melaut akibat gelombang laut meninggi,. Keadaan ini mendorong penelitian-penelitian mengenai kecepatan angin semakin dikembangkan, salah satunya dalam hal peramalan kecepatan angin. Pentingnya meramalkan kecepatan angin untuk menghindari timbulnya kerugian bagi kehidupan manusia.

Beberapa penelitian mengenai peramalan kecepatan angin telah dilakukan sebelumnya, antara lain oleh Irhamah dan Nooreliz, M. (2006) meramalkan metode kecepatan angin dengan menggunakan pendekatan ARIMA dan ARFIMA di Juanda. Para peneliti ini membandingkan kedua metode dengan menggunakan nilai MSE dan MAD, dimana dihasilkan ARFIMA lebih baik. Irhamah, dkk (2010) melakukan penelitian pada kecepatan angin dengan menggunakan *hybrid time series* dan algorithma Genetika, dihasilkan algorithma Genetika lebih baik. Penelitian lain yang dilakukan oleh Faulina (2010), meramalkan kecepatan angin rata-rata harian dengan menggunakan *Adaptive Neuro Fuzzy Inference System* dan ARIMA di Kabupaten Sumenep.

Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut, maka penulis tertarik untuk mencari distribusi yang sesuai untuk data kecepatan angin di kelurahan Kulim kecamatan Tenayan Raya tahun 2009 dan tahun 2010, dengan judul tugas akhir yaitu; **"Pemodelan Kecepatan Angin Menggunakan Distribusi Gamma dan Weibull".**

1.2 Rumusan Masalah

Bagaimana menentukan model statistik yang tepat untuk data kecepatan angin di kelurahan Kulim kecamatan Tenayan Raya pada Tahun 2009 dan Tahun 2010.

1.3 Batasan Masalah

Mencegah meluasnya permasalahan dan agar penelitian ini lebih terarah, maka dilakukan pembatasan masalah yaitu, data yang digunakan adalah data kecepatan angin di kelurahan Kulim kecamatan Tenayan Raya pada tahun 2009–2010, dengan estimasi parameter yang digunakan adalah metode maksimum *likelihood*, sedangkan uji kebaikan (*Goodness of Fit*) yang digunakan hanya metode AIC saja.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah memperoleh distribusi yang sesuai antara distribusi Gamma dan Weibull untuk memodelkan data kecepatan angin di kelurahan Kulim kecamatan Tenayan Raya pada Tahun 2009 dan Tahun 2010.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

a. Mendapatkan model distribusi yang sesuai untuk data kecepatan angin di kecamatan Kulim pada tahun 2009-2010.
b. Dapat dijadikan referensi bagi pembaca yang ingin melakukan penelitian berikutnya

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dalam tugas akhir ini terdiri dari beberapa bab, yaitu sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisikan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisikan landasan teori yang berkaitan dengan penyelesaian hasil tugas akhir, seperti distribusi peluang, rataan distribusi peluang, variansi distribusi peluang, distribusi Gamma, distribusi weibull, dan estimasi parameter.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisikan tentang jenis dan sumber data serta metode analisis data yang digunakan penulis dalam menyelesaikan penelitian ini.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Bab ini berisikan tentang pembahasan penelitian yang didukung dengan literatur yang telah ada.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisikan kesimpulan dari keseluruhan pembahasan dan saran-saran untuk pembaca.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Distribusi Peluang

Dalam statistik dikenal dua macam distribusi peluang yaitu distribusi peluang dengan variabel acak diskrit dan distribusi peluang dengan variabel acak kontinu. Pada dasarnya distribusi peluang yang menggunakan variabel acak diskrit, jika dapat diasumsikan secara terbatas dan dapat dihitung dengan jumlah yang jelas, sedangkan untuk distribusi peluang yang menggunakan vairabel acak kontinu tidak dapat dihitung atau tak hingga.

Definisi 2.1 (Walpole & Myers, 1989) Himpunan pasangan terurut $(x, f(x))$ merupakan suatu fungsi kepadatan peluang, fungsi massa peluang atau distribusi peluang peubah acak diskrit X bila untuk setiap kemungkinan hasil :

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_x f(x) = 1$ (2.1)
3. $P(X = x) = f(x)$

Definisi 2.2 (Walpole & Myers, 1989) Fungsi $f(x)$ adalah fungsi kepadatan peluang peubah acak kontinu X, yang didefinisikan pada himpunan semua bilangan rill R, bila :

1. $f(x) \geq 0$, untuk semua $x \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ (2.2)
3. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx$

2.2 Rataan Distribusi Peluang

Nilai harapan atau rataan dari suatu peubah acak merupakan salah satu ukuran pemusatan data populasi yang terpenting. Nilai rata-rata atau rataan peubah acak X atau rataan distribusi peluang X dan ditulis sebagai μ_x atau μ.

Rataan ini disebut juga oleh para statistikawan dengan nilai harapan matematik atau nilai harapan peubah acak X dan dinyatakan dengan $E(X)$ (Walpole & Myers, 1989).

Definisi 2.3 (Dennis dkk, 2002) Diberikan *X* adalah variabel acak dengan fungsi kepadatan peluang $f(X)$. Nilai harapan atau rataan *X* adalah :

$$\mu = E(X) = \sum_x x f(x) \quad \text{, bila } X \text{ diskrit} \tag{2.3}$$

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \quad \text{, bila } X \text{ kontinu} \tag{2.4}$$

Metode yang diuraikan di atas menunjukkan bahwa rataan atau nilai harapan setiap peubah acak diskrit dapat dihitung dengan mengalikan tiap nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dari peubah acak X dengan peluang padanannya $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ dan kemudian dijumlahkan hasilnya. Bila peubah acak kontinu, definisi nilai harapan matematik pada dasarnya masih tetap sama, yaitu dengan mengganti penjumlahan dengan integral (Walpole & Myers, 1989).

2.3 Variansi Distribusi Peluang

Rataan atau nilai harapan suatu peubah acak X memiliki peran khusus dalam statistika karena menggambarkan keterangan cukup mengenai bentuk distribusi peluang. Ukuran keragaman terpenting suatu peubah acak X diperoleh dengan mengambil $g(X) = (X - \mu)^2$, karena pentingnya dalam statistika maka diberi nama variansi peubah acak X atau variansi distribusi peluang X dan dinyatakan dengan $Var(X)$ atau $\sigma_x^{\,2}$ atau σ^2. Selanjutnya $Var(X)$ akan digunakan untuk menyatakan variansi dari distribusi peluang X (Dudewicz & Misra, 1988).

Definisi 2.4 (Dudewicz & Misra, 1988) Diberikan X adalah peubah acak dengan distribusi peluang $f(x)$ dan rataan μ. Variansi X adalah :

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2] = \sum_x (X - \mu)^2 f(x) \quad \text{, bila } X \text{ diskrit} \tag{2.5}$$

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu)^2 f(x)\, dx, \text{ bila } X \text{ kontinu} \quad (2.6)$$

Teorema 2.1 (Dudewicz & Misra, 1988) Variansi dari peubah acak X adalah :

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (2.7)$$

Bukti :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[(X - \mu)]^2 \\ &= E[(X^2 - 2\mu X + \mu^2)] \\ &= E(X^2) - E(2\mu X) + E(\mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2) \end{aligned}$$

karena μ = $E(X)$ maka diperoleh:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - 2(E(X))^2 + [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - [E(X)]^2 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definisi 2.5 (Walpole & Myers, 1989) Fungsi distribusi kumulatif variabel X dinotasikan sebagai F_x dan didefinisikan sebagai $F_x(x) = p(X \leq x)$ untuk seluruh x yang riil. Jika X adalah kontinu, maka :

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \quad (2.8)$$

Definisi 2.6 (Walpole & Myers, 1989) Variabel acak X dikatakan memiliki distribusi gamma dengan parameter $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$ jika dan hanya jika fungsi kepadatan peluang dari X adalah :

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, \quad 0 \leq x < \infty \quad (2.9)$$

dengan :

$$\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (2.10)$$

Kuantitas $\Gamma(\alpha)$ dikenal dengan fungsi gamma. Integral secara langsung akan menghasilkan $\Gamma(1) = 1$. Secara terus-menerus integral akan menghasilkan bahwa $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\,\Gamma(\alpha - 1)$ untuk $\alpha > 1$, seperti yang dibuktikan pada bentuk berikut:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\alpha) &= \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \\
&= \left[-x^{\alpha-1}e^{-x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty (\alpha - 1)\, x^{\alpha-2}e^{-x} dx \\
&= (\alpha - 1) \int_0^\infty x^{\alpha-2}e^{-x} dx \\
&= (\alpha - 1)\,\Gamma(\alpha - 1) \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

dan juga $\Gamma(n) = (n - 1)!$ yang dihasilkan jika n adalah bilangan bulat.

2.4 Distribusi Gamma

Distribusi Gamma adalah salah satu distribusi kontinu yang dapat digunakan untuk menyelesaikan banyak persoalan dalam bidang rekayasa dan sains. Sebagai salah satu contohnya distribusi Gamma memainkan peran penting dalam teori antrian dan teori keandalan *(reliabilitas)* misalnya untuk mengatasi kehilangan data.

Distribusi Gamma memiliki fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \qquad (2.12)$$

dengan nilai ekspektasi dan varians secara berurutan $\alpha\beta$ dan $\alpha\beta^2$.

Setiap distribusi harus memenuhi syarat suatu fungsi kepadatan peluang. Adapun syarat suatu fungsi $f(x)$ yang kontinu memenuhi suatu fungsi kepadatan peluang adalah (Walpole & Myers, 1989) :

1. $f(x) \geq 0, \forall x$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$

Akan di tunjukkan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

Bukti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\, dx$$

misalkan:

$$y = \frac{x}{\beta}$$

$$dy = \frac{1}{\beta}dx$$

$$x = y\beta$$

$$dx = \beta dy$$

maka:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} \frac{(y\beta)^{\alpha-1}e^{-y}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\,\beta\,dy$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{y^{\alpha-1}\beta^{\alpha-1}\beta e^{-y}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\,dy$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{y^{\alpha-1}\beta^{\alpha}e^{-y}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\,dy$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{y^{\alpha-1}e^{-y}}{\Gamma(\alpha)}\,dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} y^{\alpha-1}e^{-y}\,dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha)$$

$$= 1$$

Selanjutnya akan ditunjukkan rata-rata distribusi Gamma dua parameter sebagai berikut:

$$E(X) = \int_0^{\infty} x f(x)\,dx$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} x\,\frac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\,dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\,dx$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} x^{\alpha}e^{-\frac{x}{\beta}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}\beta\,\alpha\,\Gamma(\alpha)}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}$$

$$E(X) = \alpha\beta$$

Berikut ini akan ditunjukkan variansi distribusi Gamma dengan menggunakan persamaan (2.7) , yaitu :

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Terlebih dahulu akan ditentukan :

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty x^2 \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}\, dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha+1} e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \beta^{\alpha+2} \Gamma(\alpha + 2)$$

$$= \frac{\beta^\alpha \beta^2 (\alpha+1) \Gamma(\alpha+1)}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)}$$

$$= \frac{\beta^2 (\alpha+1) \alpha \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$E(X^2) = \alpha\beta^2 (\alpha + 1)$$

maka diperoleh:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \alpha\beta^2(\alpha + 1) - (\alpha\beta)^2$$

$$= \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta^2$$

$$= \alpha\beta^2$$

2.5 Distribusi Weibull

Distribusi Weibull diambil dari nama seorang fisikawan yang berasal dari Swedia bernama Waloddi Weibull pada Tahun 1939. Distribusi Weibull merupakan distribusi yang sering digunakan karena menggambarkan keseluruhan data secara jelas terutama dalam pengujian dan memodelkan data, sehingga distribusi Weibull sering diaplikasikan untuk pemodelan antara lain pemodelan dibidang teknologi, kecepatan angin, unsur-unsur kimia dan juga dibidang hidrologi. Karakteristik dari distribusi Weibull yaitu dicirikan oleh dua parameter yaitu λ dan γ, dimana $\lambda > 0$ dan $\gamma > 0$ (Rinne, 2009).

Distribusi Weibull termasuk distribusi acak kontinu yang juga mempunyai fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

$$f(x) = \lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^\gamma} \tag{2.13}$$

dengan nilai espektasi dan variansi secara berurutan adalah $\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}{\lambda}$ dan

$\frac{1}{\lambda^2}\left[\Gamma\left(\frac{2}{\gamma}+1\right) - \Gamma(1+\frac{1}{\gamma})^2\right]$. (2.14)

sedangkan fungsi distribusi kumulatifnya adalah :

$$F(x,\lambda,\gamma) = 1 - e^{-(\lambda x)^{\gamma}} \tag{2.15}$$

Akan ditunjukkan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ untuk distribusi Weibull dua parameter sebagai berikut:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} \lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^{\gamma}}\,dx$$

dimisalkan:

$u = (\lambda x)^{\gamma}$

$\frac{du}{dx} = \gamma(\lambda x)^{\gamma-1}\lambda$

$du = \lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}\,dx$

$dx = \frac{1}{\lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}}\,du$

maka diperoleh:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_{0}^{\infty} \lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1} e^{-u}\,\frac{1}{\lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}}\,du \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-u}\,du \\ &= 1\end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan fungsi distribusi kumulatif untuk distribusi Weibull pada persamaan (2.12) berdasarkan definisi (2.8) persamaan (2.10), sebagai berikut:

$$F(t) = \int_{0}^{x} \lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1} e^{-(\lambda y)^{\gamma}}\,dt$$

misalkan,

$u = (\lambda x)^{\gamma}$

$$\frac{du}{dx} = \gamma(\lambda x)^{\gamma-1}\lambda$$
$$du = \lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}\,dx$$
$$dx = \frac{1}{\lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}}\,du$$

sehingga;

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x \lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}e^{-(\lambda x)^{\gamma}}\,dx \\
&= \int_0^x e^{-u}\,dx \\
&= -e^{-u}\Big|_0^x \\
&= -e^{-(\lambda x)^{\gamma}}\Big|_0^x \\
&= -e^{-(\lambda x)^{\gamma}} - \left(-e^{-(\lambda 0)^{\gamma}}\right) \\
&= -e^{-(\lambda x)^{\gamma}} + 1 \\
F(x) &= 1 - e^{-(\lambda x)^{\gamma}}
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan rata-rata distribusi Weibull dua parameter . Rata-rata atau $E(X)$ dari distribusi Weibull adalah :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^{\infty} x\, f(x)\,dx \\
&= \int_0^{\infty} x\,\lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}\,e^{-(\lambda x)^{\gamma}}\,dx \\
&= \int_0^{\infty} x\,\lambda\gamma\,(\lambda)^{\gamma-1}(x)^{\gamma-1}e^{-(\lambda x)^{\gamma}}\,dx \\
&= \int_0^{\infty} (x)^{\gamma}(\lambda)^{\gamma}\gamma e^{-(\lambda x)^{\gamma}}\,dx \\
&= \int_0^{\infty} (\lambda x)^{\gamma}\gamma e^{-(\lambda x)^{\gamma}}\,dx
\end{aligned}$$

misalkan:

$$u = (\lambda x)^{\gamma} \quad maka \ \lambda x = (u)^{\frac{1}{\gamma}}$$
$$x = \frac{(u)^{\frac{1}{\gamma}}}{\lambda}$$
$$\frac{du}{dx} = \gamma(\lambda x)^{\gamma-1}\lambda$$
$$du = \lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}\,dx$$
$$dx = \frac{1}{\lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}}\,du$$

sehingga,

$$E(X) = \int_0^{\infty} (\lambda x)^{\gamma}\gamma\, e^{-(\lambda x)^{\gamma}}\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty u\,\gamma\, e^{-u}\frac{1}{\lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}}\,du \\
&= \int_0^\infty u\, e^{-u}\frac{1}{\lambda(\lambda x)^{\gamma-1}}\,du \\
&= \int_0^\infty u\, e^{-u}\frac{1}{\lambda(\lambda)^{\gamma-1}(x)^{\gamma-1}}\,du \\
&= \int_0^\infty u\, e^{-u}\frac{1}{(\lambda)^{\gamma}(x)^{\gamma-1}}\,du \\
&= \int_0^\infty u\, e^{-u}\frac{1}{(\lambda)^{\gamma}\left(\frac{(u)^{\frac{1}{\gamma}}}{\lambda}\right)^{\gamma-1}}\,du \\
&= \int_0^\infty u\, e^{-u}\frac{1}{(\lambda)^{\gamma}}\frac{1}{\left(\frac{(u)^{\frac{1}{\gamma}}}{\lambda}\right)^{\gamma-1}}\,du \\
&= \int_0^\infty u\, e^{-u}\frac{1}{(\lambda)^{\gamma}}\frac{(\lambda)^{\gamma-1}}{(u)^{1-\frac{1}{\gamma}}}\,du \\
&= \int_0^\infty u\, e^{-u}\lambda\frac{1}{(u)^{1-\frac{1}{\gamma}}}\,du \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \frac{u}{(u)^{1-\frac{1}{\gamma}}}e^{-u}\,du \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty (u)^{\frac{1}{\gamma}}e^{-u}\,du \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty (u)^{\frac{1}{\gamma}}e^{-u}\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)^{1+\frac{1}{\gamma}}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)^{1+\frac{1}{\gamma}}} \\
&= \frac{1}{\lambda}\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)^{1+\frac{1}{\gamma}}\int_0^\infty \frac{(u)^{\frac{1}{\gamma}}e^{-u}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)^{1+\frac{1}{\gamma}}} \\
&= \frac{1}{\lambda}\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)
\end{aligned}
$$

Berikut ini akan ditunjukkan variansi distribusi Weibull , yaitu sebagai berikut:

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Terlebih dahulu ditentukan:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^{\infty} x^2 f(x)\, dx \\
&= \int_0^{\infty} x^2 \lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^{\gamma}}\, dx \\
&= \int_0^{\infty} x^2 \lambda\gamma(\lambda)^{\gamma-1}(x)^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^{\gamma}}\, dx \\
&= \int_0^{\infty} (x)^{\gamma+1}(\lambda)^{\gamma}\, \gamma\, e^{-(\lambda x)^{\gamma}}\, dx
\end{aligned}
$$

Misal:

$u = (\lambda x)^{\gamma}$

$\dfrac{du}{dx} = \gamma(\lambda x)^{\gamma-1}\lambda$

$du = \lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}\, dx$

$dx = \dfrac{1}{\lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}}\, du$

maka diperoleh,

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_0^{\infty} (x)^{\gamma+1}(\lambda)^{\gamma}\gamma e^{-u} \frac{1}{\lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1}}\, du \\
&= \int_0^{\infty} (x)^{\gamma+1}(\lambda)^{\gamma}\, e^{-u} \frac{1}{\lambda(\lambda x)^{\gamma-1}}\, du \\
&= \int_0^{\infty} (x)^{\gamma+1}(\lambda)^{\gamma} e^{-u} \frac{1}{\lambda(\lambda)^{\gamma-1}(x)^{\gamma-1}}\, du \\
&= \int_0^{\infty} (x)^{\gamma+1}(\lambda)^{\gamma} e^{-u} \frac{1}{(\lambda)^{\gamma}(x)^{\gamma-1}}\, du \\
&= \int_0^{\infty} (x)^{\gamma+1} e^{-u} \frac{1}{(x)^{\gamma-1}}\, du \\
&= \int_0^{\infty} \left(\frac{u^{\frac{1}{\gamma}}}{\lambda}\right)^{\gamma+1} e^{-u} \frac{1}{\left(\frac{u^{\frac{1}{\gamma}}}{\lambda}\right)^{\gamma-1}}\, du \\
&= \int_0^{\infty} \frac{(u)^{1+\frac{1}{\gamma}}}{(\lambda)^{\gamma+1}}\, e^{-u} \frac{1}{\frac{(u)^{1-\frac{1}{\gamma}}}{(\lambda)^{\gamma-1}}}\, du \\
&= \int_0^{\infty} \frac{(u)^{1+\frac{1}{\gamma}}}{(\lambda)^{\gamma+1}}\, e^{-u} \frac{(\lambda)^{\gamma-1}}{(u)^{1-\frac{1}{\gamma}}}\, du
\end{aligned}
$$

$$= \int_0^\infty \lambda^{-2}(u)^{\frac{2}{\gamma}} e^{-u}\, du$$

$$= \lambda^{-2} \int_0^\infty (u)^{\frac{2}{\gamma}} e^{-u} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{\gamma}+1\right)^{\frac{2}{\gamma}+1}}{\Gamma\left(\frac{2}{\gamma}+1\right)^{\frac{2}{\gamma}+1}}$$

$$= \lambda^{-2}\Gamma\left(\frac{2}{\gamma}+1\right)^{\frac{2}{\gamma}+1} \int_0^\infty \frac{(u)^{\frac{2}{\gamma}} e^{-u}}{\Gamma\left(\frac{2}{\gamma}+1\right)^{\frac{2}{\gamma}+1}}\, du$$

$$E(X^2) = \lambda^{-2}\Gamma\left(\frac{2}{\gamma}+1\right)$$

sehingga,

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \lambda^{-2}\Gamma\left(\frac{2}{\gamma}+1\right) - \left(\lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)\right)^2$$

$$= \lambda^{-2}\left(\Gamma\left(\frac{2}{\gamma}+1\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}\left(\Gamma\left(\frac{2}{\gamma}+1\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)^2\right)$$

2.6 Estimasi Parameter

Dalam menentukan model distribusi yang sesuai untuk suatu data, terlebih dahulu ditentukan parameter dari distribusi tersebut. Metode yang digunakan salah satunya adalah metode maksimum *likelihood*. Metode maksimum *likelihood* sering digunakan dalam penelitian karena prosedur atau langkah-langkahnya sangat jelas dan sesuai dalam menentukan parameter dari sebuah distribusi (Krishnamoorthy, 2006).

2.6.1 Fungsi *Likelihood*

Fungsi kepadatan peluang (FKP) bersama dari variabel acak $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yaitu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \theta)$ yang dievaluasi pada titik $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang disebut fungsi *likelihood* yang dinotasikan dengan $L(\theta; X)$ maka :

$$L(\theta;X) = f(X;\theta) \tag{2.16}$$

karena $f(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ \theta)$ adalah FKP bersama dari variabel acak yang saling bebas, sehingga :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1;\theta)\, f(x_2;\theta) \ldots f(x_n;\theta) \tag{2.17}$$

Selanjutnya persamaan (2.16) disubsitusikan ke persamaan (2.17) maka diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} L(\theta;X) &= f(x_1;\theta)\, f(x_2;\theta) \ldots f(x_n;\theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Contoh 2.1 Misalkan X memiliki FKP sebagai berikut :

$$f(x;\theta) = \theta X^{\theta-1}, \qquad 0 < x < 1, 0 < \theta < \infty$$

Jika $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah sampel acak dari distribusi tersebut, tentukanlah fungsi *likelihood* dari θ.

Penyelesaian :

Untuk menentukan fungsi *likelihoo*d digunakan persamaan (2.18) sehingga diperoleh fungsi *likelihood*nya adalah :

$$\begin{aligned} L(\theta;X) &= f(x_1;\theta)\, f(x_2;\theta) \ldots f(x_n;\theta) \\ &= \theta {X_1}^{\theta-1}.\, \theta {X_2}^{\theta-1} \ldots \theta {X_n}^{\theta-1} \\ &= \theta^n \prod_{i=1}^{n} {X_i}^{\theta-1} \end{aligned}$$

2.6.2 Estimasi Maksimum *Likelihood*

Estimasi Maksimum *Likelihood* (EML) adalah suatu metode yang memaksimumkan fungsi *likelihood*. Prinsip estimasi maksimum *likelihood* adalah memilih $\hat{\theta}$ sebagai estimator titik untuk θ yang memaksimumkan $L(\theta;X)$. Metode EML dapat digunakan jika fungsi kepadatan peluang (FKP) atau distribusi dari variabel acak diketahui.

Misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah sampel acak dari suatu distribusi dengan FKP $f(X;\theta)$, kemudian dibentuk FKP bersama $x_1, x_2, \ldots, x_n$, setelah itu ditentukan fungsi *likelihood* dari θ yaitu $L(\theta;X)$.

Metode estimasi maksimum *likelihood* membuat fungsi *likelihood* $L(\theta;X)$ menjadi maksimum dan digunakan fungsi logaritma. Sehingga fungsi logaritma *likelihood* dinotasikan dengan $\ln L(\theta;X) = l(\theta;X)$, dimana $l(\hat{\theta};X) \geq l(\theta;X)$. Dengan menggunakan logaritma $L(\theta;X)$, maka estimator *likelihood* diperoleh dari turunan fungsi *likelihood* terhadap parameternya, yaitu $\frac{dl(\theta;X)}{d\theta} = 0$ (Lee & Wang, 2003).

Contoh 2.2 Dari contoh (2.1) diketahui fungsi *likelihood* sebagai berikut :

$$L(\theta;X) = \theta^n \prod_{i=1}^{n} X_i^{\theta-1}$$

dari fungsi tersebut, tentukanlah estimator dari $\hat{\theta}$.

Penyelesaian :

Untuk menentukan estimator dari $\hat{\theta}$, maka kita harus menjadikan fungsi *likelihood* tersebut menjadi logaritma *likelihood* atau $\ln L(\theta;X) = l(\theta;X)$, yaitu :

$$\begin{aligned} l(\theta;X) &= \ln \theta^n \prod_{i=1}^{n} X_i^{\theta-1} \\ &= \ln \theta^n + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i^{\theta-1}\right) \\ &= \ln \theta^n + \ln X_1^{\theta-1} + \ln X_2^{\theta-1} + \cdots + \ln X_n^{\theta-1} \\ &= n \ln \theta + (\theta - 1)\ln X_1 + (\theta - 1)\ln X_2 + \cdots + (\theta - 1)\ln X_n \\ &= n \ln \theta + (\theta - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln X_i \\ &= n \ln \theta + \theta \sum_{i=1}^{n} \ln X_i - \sum_{i=1}^{n} \ln X_i \end{aligned}$$

karena ,

$$\frac{dl(\theta;X)}{d\theta} = 0$$

sehingga ,

$$\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n} \ln X_i = 0$$

$$\frac{n}{\theta} = -\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$$

$$\theta = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$$

maka estimator maksimum *likelihood* untuk $\hat{\theta} = \theta$, dimana $\theta = \frac{-n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$.

2.6.3 Metode Newton-Raphson untuk Menghampiri Nilai Parameter

Metode Newton-Raphson adalah proses iterasi yang dilakukan dalam metode numerik yang dapat digunakan untuk mencari solusi atau pemecahan suatu persamaan tidak linier. Proses iterasi adalah suatu teknik penghampiran yang dilakukan secara berulang-ulang, dimana setiap pengulangan disebut iterasi. Pada umumnya para ahli statistik sering menggunakan metode Newton-Raphson untuk menghampiri nilai parameter dari suatu persamaan. Jika hampiran menghasilkan suatu nilai pemecahan yang sangat dekat dengan pemecahan persamaan yang tidak linier maka iterasi mengalami proses konvegen (John Wenyu Wang, 2001).

Metode Newton-Raphson untuk mencari pemecahan dari $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sehingga :

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$$
$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_p(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$$

kemudian misalkan a_{ij} adalah turunan parsial dari f_i terhadap x_j atau dapat ditulis sebagai $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Selanjutnya dibentuk ke dalam sebuah matriks yang disebut dengan matriks Jacobian, yaitu :

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

kemudian dicari invers dari persamaan (2.19), yaitu :

$$J^{-1} = \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & a_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{matrix} \qquad (2.20)$$

selanjutnya misalkan $x_1{}^k, x_2{}^k, \ldots, x_p{}^k$ adalah nilai-nilai hampiran pada iterasi ke *k*, dan misalkan $f_1{}^k, f_2{}^k, \ldots, f_p{}^k$ adalah nilai-nilai yang berhubungan dengan fungsi

$f_1, f_2, \ldots, f_p$, yaitu :

$$f_1{}^k = f_1 \; x_1{}^k, x_2{}^k, \ldots, x_p{}^k$$

$$f_2{}^k = f_2 \; x_1{}^k, x_2{}^k, \ldots, x_p{}^k$$

$$\vdots$$

$$f_p{}^k = f_p \; x_1{}^k, x_2{}^k, \ldots, x_p{}^k$$

dan misalkan $b_{ij}{}^k$ adalah elemen dari J^{-1} yang dihasilkan pada $x_1{}^k, x_2{}^k, \ldots, x_p{}^k$, maka hampiran iterasi selanjutnya dapat dibentuk secara umum, yaitu :

$$x_1{}^{k+1} = x_1{}^k - \; b_{11}{}^k f_1{}^k + b_{12}{}^k f_2{}^k + \cdots + b_{1p}{}^k f_p{}^k$$

$$x_2{}^{k+1} = x_2{}^k - \; b_{21}{}^k f_1{}^k + b_{12}{}^k f_2{}^k + \cdots + b_{2p}{}^k f_p{}^k \qquad (2.21)$$

$$\vdots$$

$$x_p{}^{k+1} = x_p{}^k - \; b_{p1}{}^k f_1{}^k + b_{p2}{}^k f_2{}^k + \cdots + b_{pp}{}^k f_p{}^k$$

Proses iterasi dapat dimulai dengan penentuan nilai-nilai awal terlebih dahulu. Nilai awal dapat dicari salah satunya dengan menghampiri fungsi kumulatif dan membentuk persamaan regresi linier sederhana. Selanjutnya, proses iterasi dapat dihentikan jika iterasi yang diperoleh menghasilkan nilai yang sama dengan iterasi sebelumnya (John Wenyu Wang, 2001).

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini adalah studi pustaka dengan mempelajari literatur-literatur yang berhubungan dengan pokok permasalahan. Pada bab ini juga dijelaskan mengenai jenis dan sumber data serta metode analisis data.

3.1 Jenis dan Sumber Data

a. Jenis Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data kecepatan angin di kelurahan Kulim kecamatan Tenayan Raya pada tahun 2009 – 2010 dan dapat lihat pada Lampiran A.

b. Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini tidak diambil secara langsung dari lapangan.

3.2 Metode Analisis Data

Langkah-langkah yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut :

Langkah 1 : Mengumpulkan data, kemudian data di urutkan dari yamg terkecil hingga yang terbesar, dan data di organisir sehingga dapat dianalisis.

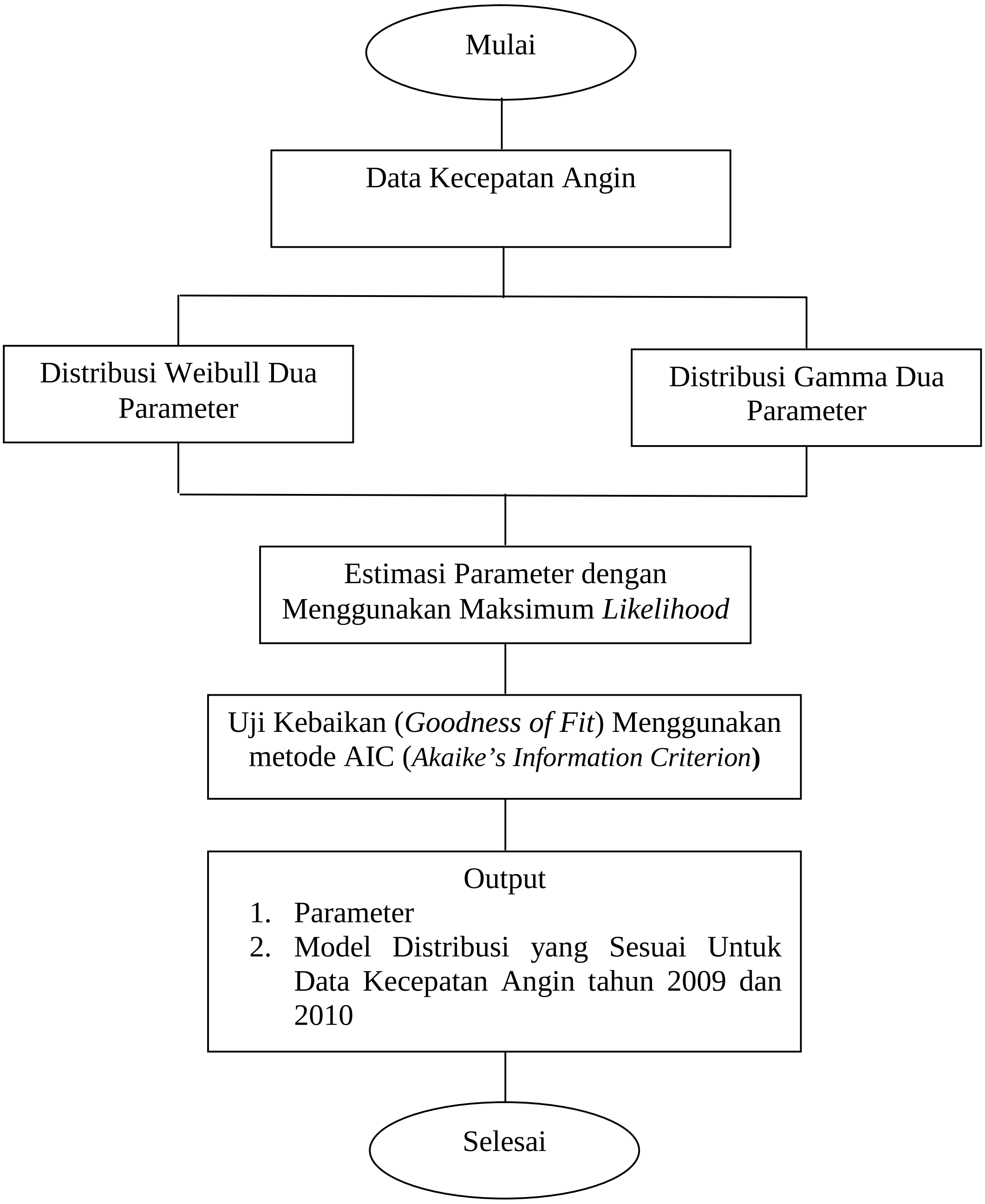
Langkah 2 : Menentukan parameter dari distribusi Gamma dan Weibull dengan menggunakan metode maksimum *likelihood*.

Langkah 3 : Menentukan model distribusi dari data yang ada.

Langkah 4 : Menguji kebaikan (*Goodness of Fit*) dari distribusi tersebut dengan menggunakan uji AIC.

Langkah 5 : Menetapkan distribusi yang sesuai berdasarkan uji yang telah dilakukan pada langkah 4.

Langkah-langkah di atas juga dapat dilihat pada *flowchart* berikut ini :



Gambar 3.1 *Flowchart* Metodologi Penelitian

BAB IV

PEMBAHASAN DAN HASIL

Bab ini berisikan tentang estimasi parameter menggunakan metode maksimum *likelihood*, menentukan nilai parameter, model distribusi untuk data kecepatan angin di kelurahan Kulim kecamatan Tenayan Raya Tahun 2009–2010 pada tiap–tiap bulan.

4.1 Estimasi Parameter Menggunakan Metode Maksimum *Likelihood*

Metode maksimum *likelihood* adalah salah satu metode yang digunakan dalam menentukan parameter dari sebuah distribusi. Dalam penelitian ini akan digunakan metode tersebut untuk menentukan parameter dari distribusi Gamma dan Weibull. Metode ini akan lebih mudah untuk diselesaikan dalam mencari parameter dengan angka bernumerik,terutama dengan menggunakan dengan menggunakan metode Newton Raphson.

a. Distribusi Gamma

Parameter dari fungsi kepadatan peluang Gamma (α, β) pada persamaan (2.8) dapat ditunjukkan sebagai berikut :

$$f\ x,\alpha,\beta\ = \frac{x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma\ \alpha},\ x \geq\ 0$$

maka fungsi *likelihood* :

$$L\ =\ f\ x_1\ f\ x_2\ \ldots\ f\ x_n$$

$$= \frac{x_1^{\alpha-1}\exp\ -\frac{x_1}{\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma\ \alpha} \cdot \frac{x_2^{\alpha-1}\exp\ -\frac{x_2}{\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma\ \alpha} \cdots \frac{x_n^{\alpha-1}\exp\ -\frac{x_n}{\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma\ \alpha}$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1}\exp\ -\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\beta}}{\beta^{\alpha n}\ \Gamma(\alpha)\ ^{n}} \tag{4.1}$$

Setelah diperoleh fungsi *likelihood*, selanjutnya akan ditentukan maksimum *likelihood* dari persamaan di atas dengan menjadikan fungsi *likelihood* tersebut menjadi logaritma *likelihood*, yaitu :

$$l\ =\ \log L$$

$$= \log \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1} + \log \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\beta}\right) - \log \left(\beta^{\alpha n} - \log \Gamma(\alpha)\right)^n$$

$$= (\alpha - 1) \sum_{i=1}^{n} \log x_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\beta} - n\alpha \log \beta - n \log \Gamma(\alpha)$$

$$= (\alpha - 1) \sum_{i=1}^{n} \log x_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\beta} - n\alpha \log \beta - \log n - \log \Gamma(\alpha) \qquad (4.2)$$

Dalam menentukan nilai estimasi parameter α dan β , persamaan (4.2) diturunkan secara parsial terhadap kedua parameter tersebut sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} \log x_i - n \log \beta - \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = 0 \qquad (4.3)$$

selanjutnya,

$$\frac{\partial l}{\partial \beta} = \frac{1}{\beta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n\alpha}{\beta} = 0 \qquad (4.4)$$

b. Distribusi Weibull

Parameter dari fungsi kepadatan peluang Weibull (λ, γ) pada persamaan (2.15) dapat ditunjukkan sebagai berikut :

$$f(x, \lambda, \gamma) = f(x) = \lambda\gamma(\lambda x)^{\gamma-1} e^{-(\lambda x)^{\gamma}} \quad ; \lambda > 0 ; \gamma > 0$$

maka fungsi *likelihood* :

$$L = f(x_1)\, f(x_2) \ldots f(x_n)$$

$$= \gamma\lambda^{\gamma} x_1^{\gamma-1} e^{-(\lambda x_1)^{\gamma}} \cdot \gamma\lambda^{\gamma} x_2^{\gamma-1} e^{-(\lambda x_2)^{\gamma}} \cdots \gamma\lambda^{\gamma} x_n^{\gamma-1} e^{-(\lambda x_n)^{\gamma}}$$

$$= \gamma^n \lambda^{n\gamma} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\gamma-1} \exp \sum_{i=1}^{n} -(\lambda x_i)^{\gamma} \qquad (4.5)$$

Setelah diperoleh fungsi *likelihood*, selanjutnya akan ditentukan maksimum *likelihood* dari persamaan di atas dengan menjadikan fungsi *likelihood* tersebut menjadi logaritma *likelihood*, yaitu :

$$l = \log L$$

$$= \log \gamma^n \lambda^{n\gamma} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\gamma-1} \exp \sum_{i=1}^{n} -(\lambda x_i)^{\gamma}$$

$$l = \log(\gamma^n) + \log(\lambda^{n\gamma}) + \log\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\gamma-1}\right) + \log \exp\left(\sum_{i=1}^{n} -(\lambda x_i)^{\gamma}\right)$$

$$= n \log \gamma + n\gamma \log \lambda + \sum_{i=1}^{n} \left((\gamma - 1) \log x_i - \lambda^{\gamma} x_i^{\gamma}\right) \qquad (4.6)$$

karena,

$$\frac{\partial(\lambda;\gamma)}{\partial \lambda} = 0$$

sehingga,

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda} = n - \lambda^{\gamma} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\gamma} = 0 \qquad (4.7)$$

selanjutnya,

$$\frac{\partial l}{\partial \gamma} = \frac{n}{\gamma} + n \log \lambda + \sum_{i=1}^{n} \log x_i - \lambda^{\gamma} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\gamma} \ \log \lambda + \log x_i \ = 0 \qquad (4.8)$$

4.2 Menentukan Nilai Parameter Awal

Setelah diperoleh persamaan parameter dari distribusi Gamma dan Weibull, akan ditentukan nilai parameter tersebut dari data kecepatan angin sebagaimana yang terdapat pada Lampiran A.

a. Distribusi Gamma

Nilai parameter dari distribusi Gamma diperoleh dengan cara menggunakan metode Newton-Raphson untuk menghampiri nilai parameternya, karena metode Newton-Raphson memerlukan nilai awal, maka terlebih dahulu akan dicari nilai awal dengan menggunakan hubungan nilai rata–rata dan variansi dari data awal, yaitu sebagai berikut:

misalkan;

$E\ x\ = \alpha\beta$,

maka

$$\alpha = \frac{E(x)}{\beta}$$

selanjutnya jika dimisalkan;

$V\ x\ = \alpha\beta^2$

sehingga diperoleh:

$$\beta = \frac{V(x)}{E(x)}$$

Oleh karena perhitungannya yang cukup rumit, maka untuk mempermudah proses perhitungan data bulan Januari 2009 dibuat tabel perhitungan, sehingga diperoleh :

$$\alpha^0 = \frac{E(x)}{\beta}$$

$$= 1.789717$$

$$\beta^0 = \frac{V(x)}{E(x)}$$

$$= 0.4768929$$

Setelah diperoleh nilai awal, selanjutnya dapat dilakukan beberapa iterasi yang menghampiri nilai parameternya,dengan menggunakan metode Newton Raphson yaitu sebagai berikut:

- Iterasi Pertama

Terlebih dahulu akan ditentukan nilai $f_1{}^0$ dan $f_2{}^0$ dengan cara menggunakan turunan parsial pada fungsi log-*likelihood* pada persamaan (4.2) terhadap dua parameter yang dimilikinya dengan mensubstitukan nilai awal yang telah diperoleh sebelumnya untuk mencari iterasi pertama, yaitu :

$$f_1{}^0 \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} \log x_i - n \log \beta - \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$f_2{}^0 \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial \beta} = \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^{n} \log x_i - \frac{n\alpha}{\beta}$$

selanjutnya dicari matriks Jacobian menggunakan persamaan (2.21), yaitu :

$$J = \begin{matrix} \frac{\partial f_1{}^0}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_1{}^0}{\partial \beta} \\ \frac{\partial f_2{}^0}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_2{}^0}{\partial \beta} \end{matrix}$$

dimana,

$$\frac{\partial f_1{}^0}{\partial \alpha} = n \quad \frac{\Gamma' \ \alpha \ \Gamma \ \alpha \ - \Gamma' \ \Gamma \ \Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)^2}$$

$$\frac{\partial f_1{}^0}{\partial \beta} = -\frac{n}{\beta}$$

$$\frac{\partial f_2{}^0}{\partial \alpha} = -\frac{n}{\beta}$$

$$\frac{\partial f_2{}^0}{\partial \beta} = \frac{-2 \log y_i}{\beta^3} - \frac{n\alpha}{\beta^2}$$

sehingga,

$\alpha^1 = 1.637092$

$\beta^1 = 0.4768932$

Setelah diperoleh nilai iterasi pertama, nilai iterasi berikutnya dapat dicari menggunakan langkah-langkah yang sama dengan sebelumnya. Jika dalam melakukan proses iterasi diperoleh nilai yang sama dengan nilai iterasi sebelumnya, maka proses iterasi dihentikan.

- Iterasi Kedua

  $\alpha^2 = 1.474191$

  $\beta^2 = 0.6295194$

- Iterasi Ketiga

  $\alpha^3 = 1.866864$

  $\beta^3 = 0.5111289$

- Iterasi Keempat

  $\alpha^4 = 1.840825$

  $\beta^4 = 0.354106$

- Iterasi Kelima

  $\alpha^5 = 1.870821$

  $\beta^5 = 0.3141028$

b. Distribusi Weibull

Nilai parameter dari distribusi Weibull diperoleh dengan cara menggunakan metode Newton-Raphson untuk menghampiri nilai parameternya, karena metode Newton-Raphson memerlukan nilai awal, maka terlebih dahulu akan dicari nilai awal dengan menghampiri fungsi kumulatifnya pada persamaan (2.15), yaitu :

$$F(x, \lambda, \gamma) = 1 - e^{-(\lambda x)^{\gamma}}$$

misalkan :

$$\lambda = \frac{1}{\beta}$$

sehingga,

$$F(x) = 1 - e^{-(\lambda x)^{\gamma}}$$

$$e^{-(\lambda x)^{\gamma}} = 1 - F(x)$$

$$\log\left(e^{-(\lambda x)^{\gamma}}\right) = \log\left(1 - F(x)\right)$$

$$\log x = \log\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\gamma}\log\left(\log\frac{1}{1-F(x)}\right) \tag{4.9}$$

persamaan di atas membentuk persamaan regresi linier sederhana, yaitu :

$$y = a + bx$$

dengan menggunakan nilai hampiran $F(x) = \frac{i-0{,}5}{n}, i = 1,2,\ldots,n$

misalkan :

$$y = \log x$$

$$a = \log\frac{1}{\lambda}$$

$$b = \frac{1}{\gamma}$$

$$x = \log\left(\log\frac{1}{1-F(x)}\right)$$

Selanjutnya akan dicari nilai *a* dan *b* dengan menggunakan persamaan regresi linier untuk memperoleh nilai awalnya, yaitu :

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

Oleh karena perhitungannya yang cukup rumit, maka untuk mempermudah proses perhitungan data bulan Januari 2009 dibuat tabel perhitungan, maka diperoleh :

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$$= 0.9907349$$

dan,

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

$= -0.1019597$

Sehingga nilai parameter awalnya adalah :

$$a = \log\frac{1}{\lambda}$$

$$\lambda^0 = e^a = e^{-0.1019597} = 1.107339$$

dan,

$$b = \frac{1}{\gamma}$$

$$\gamma^0 = \frac{1}{b} = \frac{1}{0.9907349} = 1.009352$$

Setelah diperoleh nilai parameter awal, kemudian dilanjutkan dengan mencari nilai hampiran parameter λ dan γ menggunakan metode Newton-Raphson dengan iterasi seperti pada persamaan (2.21), yaitu sebagai berikut :

$$x_1{}^{k+1} = x_1{}^k - \; b_{11}{}^k f_1{}^k + b_{12}{}^k f_2{}^k + \cdots + b_{1p}{}^k f_p{}^k$$

$$x_2{}^{k+1} = x_2{}^k - \; b_{21}{}^k f_1{}^k + b_{12}{}^k f_2{}^k + \cdots + b_{2p}{}^k f_p{}^k$$

$$\vdots$$

$$x_p{}^{k+1} = x_p{}^k - \; b_{p1}{}^k f_1{}^k + b_{p2}{}^k f_2{}^k + \cdots + b_{pp}{}^k f_p{}^k$$

- Iterasi Pertama

Terlebih dahulu akan ditentukan nilai $f_1{}^0$ dan $f_2{}^0$ dengan cara menggunakan turunan parsial pada fungsi log-*likelihood* pada persamaan (4.6) terhadap dua parameter yang dimilikinya dengan mensubstitukan nilai awal yang telah diperoleh sebelumnya untuk mencari iterasi pertama, yaitu :

$$f_1{}^0 \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial \lambda} = n - \lambda^\gamma \sum_{i=1}^{n} x_i^\gamma$$

$$= 22.6916$$

$$f_2{}^0 \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial \gamma} = \frac{n}{\gamma} + n\log\lambda + \sum_{i=1}^{n}\log x_i - \lambda^\gamma \sum_{i=1}^{n} x_i^\gamma \; \log\lambda + \log x_i$$

$$= 77.08196$$

selanjutnya dicari matriks Jacobian menggunakan persamaan (2.21), yaitu :

$$J = \begin{matrix} \frac{\partial f_1{}^0}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_1{}^0}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial f_2{}^0}{\partial \lambda} & \frac{\partial f_2{}^0}{\partial \gamma} \end{matrix}$$

dimana,

$$\frac{\partial f_1{}^0}{\partial \lambda} = -\gamma\lambda^{\gamma-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\gamma} = -372.1777$$

$$\frac{\partial f_1{}^0}{\partial \gamma} = -\lambda^{\gamma} \log \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^{\gamma} + \lambda^{\gamma} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\gamma} \log(x_i) = 20.48918$$

$$\frac{\partial f_2{}^0}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \gamma\lambda^{\gamma-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\gamma}(\log \lambda + \log x_i) + \lambda^{\gamma} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{\gamma}}{\lambda} = 701.0123$$

$$\frac{\partial f_2{}^0}{\partial \gamma} = -\frac{n}{\gamma^2} - \lambda^{\gamma} \log \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^{\gamma} (\log \lambda + \log x_i)$$

$$+ \lambda^{\gamma} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\gamma} \log x_i (\log \lambda + \log x_i)$$

$$= -270.3019$$

sehingga,

$$J = \begin{matrix} -372.1777 & 20.48918 \\ 701.0123 & -270.3019 \end{matrix}$$

dan diperoleh matriks invers dari matriks Jacobian pada persamaan (2.20), yaitu :

$$J^{-1} = \begin{matrix} -0.003134401 & -0.000237591 \\ -0.008128888 & -0.004315746 \end{matrix}$$

sehingga,

$$\lambda^1 = \lambda^0 - \quad b_{11}{}^0 f_1{}^0 + b_{12}{}^0 f_1{}^0$$

$$= 1.173072$$

$$\gamma^1 = \gamma^0 - \quad b_{21}{}^0 f_2{}^0 + b_{22}{}^0 f_2{}^0$$

$$= 1.303276$$

Setelah diperoleh nilai iterasi pertama, nilai iterasi berikutnya dapat dicari menggunakan langkah-langkah yang sama dengan sebelumnya. Jika dalam melakukan proses iterasi diperoleh nilai yang sama dengan nilai iterasi sebelumnya, maka proses iterasi dihentikan.

- Iterasi Kedua

  $\lambda^2 = 1.074237$

  $\gamma^2 = 1.187029$

- Iterasi Ketiga

  $\lambda^3 = 1.120663$

  $\gamma^3 = 1.125877$

- Iterasi Keempat

  $\lambda^4 = 1.13034$

  $\gamma^4 = 1.165694$

- Iterasi Kelima

  $\lambda^5 = 1.115513$

  $\gamma^5 = 1.131817$

Nilai iterasi yang dihasilkan pada tiap iterasi hampir sama, dan nilai parameter kedua model dapat dilihat pada Tabel 4.1 berikut ini:

Tabel 4.1 Nilai Parameter awal dari Kedua Model Distribusi

Tahun	Bulan	Distribusi Gamma		Distribusi Weibull	
		α^0	β^0	λ^0	γ^0
2009-2010	Januari	3.435115	1.0370767	2.138229	2.015804
	Februari	3.573812	1.0744312	1.9691317	2.069877
	Maret	3.149224	1.0961911	2.2083811	2.177262
	April	1.996341	0.4983397	0.9207401	1.098284

	Mei	1.709797	0.5180639	1.061176	1.087406
	Juni	3.759636	1.0888596	1.8054547	2.430526
	Juli	3.530793	1.096267	1.9736117	2.0862177
	Agustus	3.288633	1.1512153	2.0098303	2.127606
	September	3.084353	1.145159	2.185941	2.1626431
	Oktober	3.17055	1.1776443	2.044482	2.099118
	November	3.298481	1.2335808	1.8473266	2.115007
	Desember	3.923698	1.0964535	1.7508462	2.319366

Berdasarkan tabel diatas dapat diketahui nilai awal dari kedua distribusi, selanjutnya dapat dicari iterasi-iterasi berikutnya dengan menggunakan metode Newton Raphson seperti langkah-langkah yang telah dijelaskan sebelumnya, sehingga nilai parameter pada iterasi kelima dari kedua distribusi dapat dilihat pada Tabel 4.2 berikut:

Tabel 4.2 Nilai Parameter setelah iterasi dari Kedua Model Distribusi

Tahun	Bulan	Distribusi Gamma		Distribusi Weibull	
		α^5	β^5	λ^5	γ^5
2009-2010	Januari	3.762394	0.7566498	1.532567	1.6644604
	Februari	3.447776	1.4809247	1.812768	2.683007
	Maret	4.885954	0.463881	2.158272	2.625664
	April	1.883324	1.441308	1.267184	1.79122
	Mei	1.88739	0.3249504	0.586079	1.081767
	Juni	4.624766	1.7937435	2.714628	1.9209707
	Juli	3.595924	2.0681376	2.286439	2.605487
	Agustus	3.504133	1.7403876	1.690583	2.522238
	September	2.6342756	1.4892492	1.783601	2.2179898
	Oktober	3.778014	0.9556239	1.726932	2.28001
	November	2.890962	1.3266601	1.870303	2.864217
	Desember	2.309153	1.1932215	2.532718	1.9026773

4.3 Uji Kebaikan (*Goodness of Fit*)

Uji kebaikan dilakukan untuk memperoleh model distribusi yang sesuai untuk data kecepatan angin di kelurahan Kulim kecamatan Tenayan Raya pada tahun 2009 dan 2010. Pada penelitian ini akan digunakan uji kebaikan, yaitu uji *Akaike's Information Criterion* (AIC), dengan terlebih dahulu menentukan log *likelihood* nya seperti persamaan (4.2) dan persamaan (4.6), sehingga nilai AIC dapat ditentukan dengan menggunakan rumus yaitu:

$$AIC = -2l + 2p$$

dengan,

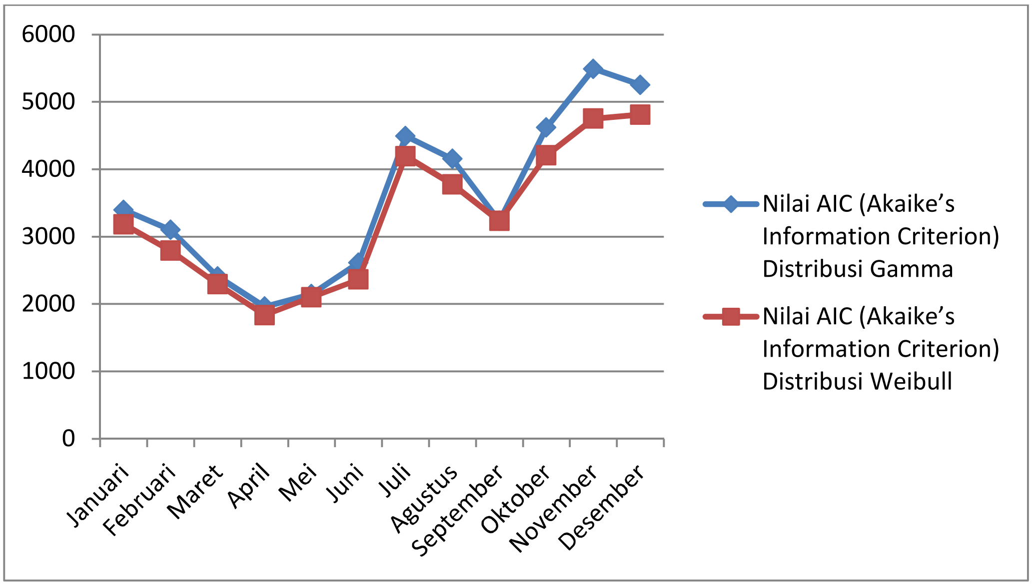
p = jumlah parameter.

dan hasil nilai AIC dari kedua distribusi dapat dilihat pada Tabel 4.3 berikut:

Tabel 4.3 Nilai AIC dari Kedua Model Distribusi

Tahun	Bulan	Nilai AIC (*Akaike's Information Criterion*)	
		Distribusi Gamma	Distribusi Weibull
2009-2010	Januari	3396.1523	3182.5649
	Februari	3099.774	2789.743
	Maret	2408.8991	2293.7366
	April	1960.597	1834.425
	Mei	2143.927	2100.397
	Juni	2611.143	2363.4505
	Juli	4492.472	4193.864
	Agustus	4151.594	3776.24
	September	3232.7868	3232.7775
	Oktober	4616.796	4205.592
	November	5488.401	4749.889
	Desember	5251.585	4809.15

Berdasarkan nilai AIC yang telah diperoleh, maka dapat dilihat model distribusi Gamma dan Weibull seperti gambar berikut:



Gambar 4.1 grafik model kecepatan angin dengan distribusi Gamma dan Weibull.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan sebelumnya dari tugas akhir ini, dapat diambil kesimpulan bahwa model distribusi Weibull lebih sesuai untuk data kecepatan angin di kelurahan Kulim kecamatan Tenayan Raya, dibandingkan dengan distribusi Gamma dua parameter. Hal ini ditunjukkan oleh nilai AIC yang diperoleh dari distribusi Weibull lebih kecil dibandingkan distribusi Gamma.

5.2 Saran

Tugas akhir ini membahas tentang menentukan model distribusi yang sesuai untuk data kecepatan angin di kelurahan Kulim kecamatan Tenayan Raya pada tahun 2009 dan 2010, dengan menggunakan dua distribusi yaitu distribusi Gamma dua parameter dan Weibull. Bagi pembaca yang berminat melanjutkan tugas akhir ini, penulis sarankan untuk menggunakan distribusi statistik yang lain dengan karakteristik yang mendukung untuk data tersebut dalam menentukan model yang sesuai bagi data kecepatan angin di kelurahan Kulim kecamatan Tenayan Raya.

DAFTAR PUSTAKA

Alam, M.M dan A.K Azad. 2010. "*Statistical Analysis of Wind Power Potential in Pakshey River Delta Region Bangladesh*." Jurnal Proceeding of the 13th Asian Congress of Fluid Mechanics.

Brain, L.J and M. Engelhardt. 1987. *Introduction to Probability end Mathematical Statistics. 2nd ed.* California : Duxbury Press.

E Walpole, Ronald dan Raymond H Mayers. 1989. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Bandung : ITB Bandung.

Herinaldi, M. Eng. 2005. *Prinsip–Prinsip Statistic untuk Teknik dan Sains*. Jakarta : Erlangga.

J Dudewicz, Edward, dan Satya, N. Mishra. 1988. *Modern Mathematical Statistics*. John Wiley and Sons, Inc.

J.Supranto. 1990. *Statistik Teori dan Aplikasi Edisi Kelima*. Jakarta : Erlangga.

Lapan. 2009. *Dampak Perubahan Iklim*. (http://iklim.dirgantara-lapan.or.id/index.php?option=com_content&view=article&id=60&Itemid=37).

Martono, K. 1999. *Kalkulus*. Bandung : Erlangga.

Raharjo, Swasono dan Pramono Sidi. 2002. *"Kombinasi Poisson Gamma untuk Menaksir Kredibilitas pada Model Morris-Van Slyke."* Jurnal Matematika, Sains dan Teknologi vol.3 No.2.

Soenarmo. 2003. (http://organisasi.org/definisi-pengertian-angin-dan-teori-proses-terjadinya-angin-ilmu-pengetahuan-alam).

Tjasjono. 1995. (http://id.shvoong.com/exact-sciences/astronomy/2174614-jenis-jenis-angin-definisi-dan/#ixzz2KP84af8N).

Wang, John Wenyu dan Elisa T. Lee. 2001. "Statistical *Methods for Survival Data Analysis edisi 3*. John Wiley and Sons, Inc.

Warpole, R.E. 1995. *Pengantar Statistik edisi 3*. Jakarta : PT. Gramedia.