BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Fungsi Densitas

Definisi 2.1 (Walpole & Myers, 1989) Fungsi $f(x)$ adalah fungsi kepadatan peluang peubah acak kontinu X, yang biasanya disebut fungsi densitas,yang didefinisikan di atas himpunan semua bilangan real R, bila:

1. $f(x) \geq 0$, untuk semua $x \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
3. $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$ (2.1)

Contoh 2.1:

Misalkan peubah acak X mempunyai fungsi densitas $f(x) = \frac{x^2}{3}, -1 < x < 2$ buktikan bahwa fungsi tersebut adalah fungsi densitas dan hitung $p(0 < x < 1) = \int_{0}^{1} f(x)\,dx$

Jawab

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$= \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3} dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^{2} x^2 dx$$

$$= \frac{1}{9} x^3]_1^2$$

$$= \frac{1}{9}(2)^3 - \frac{1}{9}(-1)^3 = 1$$

$$untuk\, p(0 < x < 1) = \int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{x^2}{3} dx$$

$$= \frac{1}{9} x^3]_0^1 = \frac{1}{9}$$

2.2 Fungsi Kumulatif

Definisi 2.2 (Walpole & Myers, 1989) Distribusi peluang kumulatif F(x) suatu peubah acak kontinu x dengan fungsi densitas f(x) diberikan:

$$F(x) = P(X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \qquad (2.2)$$

Akibat persamaan diatas,maka:

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a) \qquad (2.3)$$

dan $f(x) = dF(x)/dx$

2.3 Fungsi Kuantil

Definisi 2.3: Misalkan F fungsi distribusi dari suatu distribusi probabilitas pada himpunan bilangan real R jika $\alpha \in (0,1)$ maka terdapat dengan tunggal $X_\alpha \in R$sehingga $F(X_\alpha) = \alpha$ maka disebut kuantil- α dari F.Kuantil- α dari F digunakan notasi $F^{-1}(\alpha)$.

Fungsi kuantil dari F didefinisikan sebagai:

$$F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \mid F(x) \geq \alpha\} \qquad (2.4)$$

dengan $\alpha \in (0,1)$ artinya $F^{-1}(\alpha)$ adalah nilai terkecil dari x dengan $F(x) \geq \alpha$. Misalkan x mempunyai distribusi F dan fungsi distribusi dari $y = a + bx$, maka dapat dinyatakan sebagai:

$$Fy(x) = F(b^{-1}(x - a)) \quad a \in R, b > 0 \qquad (2.5)$$

Fungs**i** kuantil juga didefinisikan sebagai invers dari kumulatif.

2.4 Statistik Berurut

Secara umum, misalkan $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ varibel acak kontinu yang saling bebas dengan fungsi distribusi kumulatif $F(y)$ dan fungsi densitas $f(y)$. Notasi variabel acak yang terurut Y_i yaitu $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ dimana $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \cdots \leq Y_{(n)}$.

dimana :

$$Y_1 = Min(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)\ (variabel\ acak\ minimum\ dari\ Y_i)$$
$$Y_{(n)} = Max(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)\ (variabel\ acak\ maksimum\ dari\ Y_i)$$

Fungsi densitas peluang untuk $Y_i\ dan\ Y_n$ dapat ditentukan dengan menggunakan metode fungsi distribusi kumulatif. Pertama kali kita akan menentukan fungsi densitas dari Y_n. Karena Y_n adalah maksimum dari

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, maka peritiwa $P(Y_{(n)} \leq y)$ akan terjadi jika dan hanya jika $(Y_i \leq y)$ terjadi, untuk setiap $i = 1,2, \ldots, n, yaitu$:

$$P\left(Y_{(n)} \leq y\right) = P(Y_1 \leq y, Y_2 \leq y, \ldots, Y_n \leq y) \tag{2.6}$$

Karena Y_i adalah saling bebas dan $P\left(Y_i \leq y\right) = F\left(y\right)$ $untuk\ i = 1,2, \ldots, n$, hal ini menyatakan bahwa funsi distribusi kumulatif dari $Y_{(n)}$ adalah sebagai berikut:

$$F_{Y_n}\left(y\right) = P\left(Y_n \leq y\right) = P\left(Y_1 \leq y\right) P\left(Y_2 \leq y\right) \ldots P\left(Y_n \leq y\right) = (F(y))^n \tag{2.7}$$

Misal $g_{(n)}\left(y\right) = n[F(y)]^{n-1} f(y)$ dengan cara yang sama kita akan dapat menentukan fungsi densitas untuk $Y_{(1)}$ sebagai berikut :

$$F_{Y_1}\left(y\right) = P\left(Y_{(1)} \leq y\right) = 1 - P(Y_{(1)} > y) \tag{2.8}$$

Karna $Y_{(1)}$ adalah minimum dari $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, maka hal ini menyatakan bahwa peristiwa $Y_{(1)} > y)$ terjadi jika dan hanya jika peristiwa $\left(Y_i \leq y\right)$ terjadi untuk $i = 1,2, \ldots, n$. Karena Y_i saling bebas dan $P\left(Y_i \leq y\right) = 1 - F(y)$ untuk $i = 1,2, \ldots, n$, kita lihat bahwa :

$$\begin{aligned} F_{Y_i} &= P\left(Y_{(1)} \leq y\right) = 1 - P(Y_{(1)} > y) \\ &= 1 - P(Y_1 > y, Y_2 > y, \ldots, Y_n > y) \\ &= 1 - P\left(Y_1 > y\right) P\left(Y_2 > y\right) \ldots P(Y_n > y) \\ &= 1[1 - F(y)]^n \end{aligned} \tag{2.9}$$

Misal $g_{(1)}(y)$ adalah fungsi densitas $Y_{(1)}$, dengan menurunkan fungsi densitas kumulatif akan di peroleh :

$$g_{(1)}\left(y\right) = n[1 - F(y)]^{n-1} f(y) \tag{2.10}$$

2.5 Distribusi Peluang

Definisi 2.4 (Walpole & Myers, 1989) Fungsi $f(x)$ adalah fungsi kepadatan peluang peubah acak kontinu X, yang didefinisikan pada himpunan semua bilangan real R, bila :

1. $f(x) \geq 0$, untuk semua $x \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right) dx = 1$

3. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$ (2.11)

2.6 Metode L-Moment

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah observasi dari n sampel acak dengan populasi kontinu dan memiliki fungsi kumulatif dan $F(x)$ fungsi kuantil $x(F)$. Sederetan $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ adalah statistik berurut. L-Moment ke-r ditulis sebagai λ_r bagi populasi, didefinisikan sebagai:

$$\lambda_r = \frac{1}{r}\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j \binom{r-1}{j} E\left(X_{r-j:r}\right), \quad r = 1,2, \ldots \tag{2.12}$$

dengan $X_{r-j:r}$ merupakan variabel acak bagi statistik berurut ke-$(r-j)$ dari r observasi dan

$$E\left(X_{r:n}\right) = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!}\int_0^1 x(F)\,[F(x)]^{r-1}\,[1-F(x)]^{n-r}\,dF \tag{2.13}$$

atau $E\left(X_{r:n}\right)$ juga dapat tulis dalam notasi β_r :

$$E\left(X_{r:n}\right) = n\binom{n-1}{r-1}\sum_{j=0}^{n-r}\binom{n-r}{j}(-1)^{n-r-j}\beta_{n-1-j} \tag{2.14}$$

dengan β_r didefinisikan sebagai:

$$\beta_r = \int_0^1 x(F)\,F^r\,dF \tag{2.15}$$

dengan $xs(F)$ adalah fungsi kuantil. Dengan menggantikan persamaan (2.15) ke dalam persamaan (2.12), L-momen dalam notasi kombinasi linier gabungan linear β_r, boleh ditulis sebagai:

$$\lambda_{r+1} = \sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\binom{r+j}{j}\beta_j \tag{2.16}$$

Empat L-momen rata (λ_1), variasi (λ_2), skewness (λ_3) dan kurtosis (λ_4) ialah

$$\lambda_1 = \beta_0$$
$$\lambda_2 = 2\beta_1 - \beta_0$$
$$\lambda_3 = 6\beta_2 - 6\beta_1 + \beta_0$$
$$\lambda_4 = 20\beta_3 - 30\beta_2 + 12\beta_1 - \beta_0$$

dan rasio L-momen diperoleh sebagai berikut:

L-koefisien variasi (LCV), $\tau = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

L-koefisien skewness (LCS), $\tau_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$

L-koefisien kurtosis (LCK), $\tau_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_2}$

Persamaan (2.12) hingga (2.19) adalah L-momen untuk populasi. Sedangkan Untuk sampel, misalkan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah observasi dari *n* sampel acak. L-momen sampel dapat ditulis sebagai berikut:

$$\hat{\lambda}_{r+1} = \sum_{j=0}^{r} -1^{\,r-j} \binom{r}{j} \binom{r+j}{j} \hat{\beta}_j; \qquad r = 0,1,\ldots,n-1$$

dengan estimasi β_r sebagai berikut :

$$\hat{\beta}_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)(i-2)\ldots(i-r)}{(n-1)(n-2)\ldots(n-r)} x_{i:n}$$

Empat estimasi untuk L-momen untuk sampel dalam bentuk β_r, dapat ditulis sebagai berikut :

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i:n}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)}{(n-1)} x_{i:n}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)(i-2)}{(n-1)(n-2)} x_{i:n}$$

$$\hat{\beta}_3 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)} x_{i:n}$$

dan seterusnya, empat L-moment sampel dlm bentuk λ_r dapat ditulis sebagai

$$\hat{\lambda}_1 = \hat{\beta}_0$$

$$\hat{\lambda}_2 = 2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0$$

$$\hat{\lambda}_3 = 6\hat{\beta}_2 - 6\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_0$$

$$\hat{\lambda}_4 = 20\hat{\beta}_3 - 30\hat{\beta}_2 + 12\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0$$

rasio L-momen sampel $\hat{\lambda}_r$ adalah estimasi bagi λ_r. Adalah sebagai berikut:

L-koefisien variasi (LCV), $\hat{\tau} = \frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_2}$

L-koefisien kepencongan (LCS), $\hat{\tau}_3 = \frac{\hat{\lambda}_3}{\hat{\lambda}_2}$

L-koefisien kurtosis (LCK), $\hat{\tau}_4 = \frac{\hat{\lambda}_4}{\hat{\lambda}_2}$

2.7 L-Moment untuk Generalized Pareto

Distribusi generalized pareto memiliki fungsi peluang densitas sebagai berikut:

$$f(x) = \alpha^{-1} e^{-(1-k)\left[-k^{-1}\log\left(1-\frac{k(x-\xi)}{\alpha}\right)\right]}$$

dan memiliki fungsi kuantil sebagai berikut:

$$x(F) = \xi + \alpha\left(1 - \frac{(1-F)^k}{k}\right) = \xi + \frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha}{k}(1-F)^k.$$

Selanjutnya kita akan menentukan β_r untuk distribusi generalized pareto:

$$\beta_r = \int_0^1 x(F)\,F^r = \int_0^1 \left(\xi + \frac{\alpha}{k}\right) F^r dF - \frac{\alpha}{k}\int_0^1 (1-F)^k F^r dF$$

$$= \frac{1}{r+1}\left(\xi + \frac{\alpha}{k}\right) - \frac{\alpha}{k}\int_0^1 (1-F)^k F^r dF. \tag{2.17}$$

misalkan:

$u = 1 - F \Rightarrow du = -dF$

$F = 1 - u$

Kemudian,

$$\int_0^1 (1-F)^k F^r dF = -\int_0^1 u^k (1-u)^r du = -\int_0^1 u^k \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} u^j du$$

$$= -\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \int_1^0 u^{k+j} du = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{1}{k=j+1} \binom{r}{j}. \tag{2.18}$$

Subsitusikan persamaan (2.17) ke persamaan (2.18), maka didapatkan:

$$\beta_r = \frac{1}{r+1}\left(\xi + \frac{\alpha}{k}\right) - \frac{\alpha}{k}\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{1}{k=j+1} \binom{r}{j}. \tag{2.19}$$

Sekarang untuk β_0,

$$\beta_0 = \xi + \frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha}{k}\ \frac{1}{k+1}$$

$$= \xi + \frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha}{k(k+1)}$$

$$= \xi + \frac{\alpha}{k+1}$$

Kemudian untuk λ_1:

$$\lambda_1 = \beta_0 = \xi + \frac{\alpha}{k+1}$$

Selanjutnya untuk β_1:

$$\beta_1 = \frac{1}{2}\ \xi + \frac{\alpha}{k+1}\ - \frac{\alpha}{k}\ \frac{1}{k+1}\binom{1}{0} - \frac{1}{k+2}\binom{1}{1}$$

$$= \frac{1}{2}\xi + \frac{\alpha}{2k} - \frac{\alpha}{k}\ \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k=2}$$

$$= \frac{1}{2}\xi + \frac{\alpha(k+3)}{2\ k+1\ (k+2)}$$

Kemudian untuk $\lambda_2 dan\ \beta_2$:

$$\lambda_2 = 2\beta_1 - \beta_0$$

$$= 2\ \frac{1}{2}\xi + \frac{\alpha(k+3)}{2\ k+1\ (k+2)}$$

$$= \frac{\alpha}{k+1\ (k+2)}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{3}\ \xi + \frac{\alpha}{k}\ - \frac{\alpha}{k}\sum_{j=0}^{2}(-1)^j \frac{1}{k+j+1}\binom{2}{j}$$

$$= \frac{1}{3}\xi + \frac{1}{3}\frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha}{k}\ \frac{1}{k+1}\binom{2}{0} - \frac{1}{k+2}\binom{2}{1} + \frac{1}{k+3}\binom{2}{2}$$

$$= \frac{1}{3}\xi + \frac{1}{3}\frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha}{k}\ \frac{1}{k+1} - \frac{2}{k+2} + \frac{1}{k+3}$$

$$= \frac{1}{3}\xi + \frac{1}{3}\frac{\alpha}{k} - \frac{2\alpha}{k\ k+1\ \ k+2\ (k+3)}$$

$$= \frac{1}{3}\xi + \frac{k^2+6k+11}{3\ k+1\ \ k+2\ \ k+3}$$

Selanjutnya untuk $\lambda_3, \beta_3\ dan\ \tau_3$:

$$\lambda_3 = 6\beta_2 - 6\beta_1 + \beta_0$$

$$= 6\ \ \frac{1}{3}\xi + \frac{k^2+6k+11}{3\ k+1\ \ k+2\ \ k+3}\ - 6\ \ \frac{1}{2}\xi + \frac{\alpha(k+3)}{2\ k+1\ (k+2)}\ + \xi + \frac{\alpha}{k+1}$$

$$= 2\xi + \frac{2k^2+12k+22}{k+1\ \ k+2\ (k+3)} - 3\xi - \frac{3\alpha(k+3)}{k+1\ (k+2)} + \xi + \frac{\alpha}{k+1}$$

$$= \frac{2k^2+12k+22-3(k+3)^2+(k+2)(k+3)}{k+1\ \ k+2\ (k+3)}\alpha$$

$$= \frac{1-k}{k+1\ \ k+2\ (k+3)}\alpha$$

$$\beta_3 = \frac{1}{4}\ \ \xi + \frac{\alpha}{k}\ \ - \frac{\alpha}{k}\sum_{j=0}^{3}(-1)^j \frac{1}{k+j+1}\ \binom{3}{j}$$

$$= \frac{1}{4}\xi + \frac{\alpha}{4k} - \frac{\alpha}{k}\ \frac{1}{k+1}\binom{3}{0} - \frac{1}{k+2}\binom{3}{1} + \frac{1}{k+3}\binom{3}{2} - \frac{1}{k+4}\binom{3}{3}$$

$$= \frac{1}{4}\xi + \frac{\alpha}{4k} - \frac{\alpha}{k}\ \frac{1}{k+1} - \frac{3}{k+2} + \frac{3}{k+3} - \frac{1}{k+4}$$

$$= \frac{1}{4}\xi + \frac{1}{4}\frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha}{k}\ \ \frac{6}{k+1\ \ k+2\ \ k+3\ \ k+4}$$

$$= \frac{1}{4}\xi + \frac{k^3+10k^2+35k+50}{4\ k+1\ \ k+2\ \ k+3\ \ k+4}\alpha$$

$$\tau_3 = \lambda_3/\lambda_2$$

$$= \frac{1-k}{k+1\ \ k+2\ (k+3)}\alpha / \frac{\alpha}{k+1\ (k+2)}$$

$$= \frac{1-k}{k+3}$$

Jadi untuk $\lambda_4\ dan\ \tau_4\ adala\square\ sebagai\ berikut$:

$$\lambda_4 = 20\beta_3 - 30\beta_2 + 12\beta_1 - \beta_0$$

$$= 20\ \ \frac{1}{4}\xi + \frac{k^3+10k^2+35k+50}{4\ k+1\ \ k+2\ \ k+3\ \ k+4}\alpha\ \ - 30\ \ \frac{1}{3}\xi + \frac{k^2+6k+11}{3\ k+1\ \ k+2\ \ k+3}\ \ +$$

$$12\ \ \frac{1}{2}\xi + \frac{\alpha(k+3)}{2\ k+1\ (k+2)}\ \ - \ \xi + \frac{\alpha}{k+1}$$

$$= 5\xi + \frac{5k^3+50k^2+175k+250}{k+1\ \ k+2\ \ k+3\ \ k+4}\alpha - 10\xi - \frac{10k^2+60k+110}{k+1\ \ k+2\ \ k+3\ \ k+4}\alpha + 6\xi +$$

$$\frac{6(k+3)\alpha}{k+1\ \ k+2} - \xi - \frac{\alpha}{k+1}$$

$$= \frac{k^2-3k+2}{k+1\ \ k+2\ \ k+3\ \ k+4}\alpha$$

$$= \frac{1-k\ \ 2-k}{k+1\ \ k+2\ \ k+3\ \ k+4}\alpha$$

$$\tau_4 = \lambda_4/\lambda_2$$

$$= \frac{1-k \quad 2-k}{k+1 \quad k+2 \quad k+3 \quad k+4}\,\alpha / \frac{\alpha}{k+1\ (k+2)}$$

$$= \frac{1-k \quad 2-k}{k+3 \quad k+4}$$

2.8 Hujan Ekstrim

Definisi 2.5: Hujan ekstrim adalah hujan maksimum pertahun. Data hujan maksimum pertahun diambil dari data hujan harian. Untuk mendapatkan data hujan maksimum pertahun atau data hujan ekstrim tersebut yaitu dengan melihat data yang paling maksimum pada data hujan harian pertahun.