

mengurangkan entri-entri pada A dengan entri-entri yang bersesuaian pada B . matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

Definisi 2.3 (Charles G. Cullen, 1993). Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks berukuran $r \times n$, maka hasil kali (*product*) AB adalah matriks C berukuran $m \times n$ yang unsur-unsurnya adalah

$$C_{ij} = \text{Baris}_i(A) \text{ Kol}_j(B) \\ = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Perhatikan bahwa perkalian matriks didefinisikan hanya jika banyaknya kolom matriks yang pertama sama dengan banyaknya baris matriks yang kedua.

Suatu matriks bujursangkar A adalah matriks simetrik (*symmetric*) jika $A = A^T$ kita dapat mengenali matriks-matriks simetrik dengan mudah hanya dengan melalui inspeksi. Entri-entri pada diagonal utamanya mungkin sebarang, tetapi entri-entri yang berseberangan terhadap diagonal utama harus setara. Ini mengacu pada fakta bahwa mentranspos matriks bujur sangkar dapat diselesaikan dengan mempertukarkan entri-entri yang posisinya simetris terhadap diagonal utama. Dinyatakan dalam bentuk entri individual, suatu matriks $A = a_{ij}$ adalah simetrik, jika dan hanya jika $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua nilai i dan j . Untuk lebih jelasnya, berikut contoh matriks simetrik

Contoh 2.1

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

Matriks-matriks di atas adalah simetrik, karena masing-masing setara dengan transposnya.

Kita dapat mengenali matriks-matriks simetrik dengan mudah hanya dengan melalui inspeksi. Entri-entri pada diagonal utamanya mungkin sebarang, tetapi sebagaimana ditunjukkan pada matriks dibawah, dari entri-entri yang berseberangan terhadap diagonal utama harus setara. Dinyatakan dalam bentuk

entri individual, suatu matriks $A = a_{ij}$ adalah simetrik, jika dan hanya jika $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua nilai i dan j . Sebagaimana diilustrasikan pada contoh 1, semua matriks diagonal adalah simetrik.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

2.2 Determinan Matriks

Determinan adalah nilai real yang dihitung berdasarkan nilai elemen-elemennya, menurut rumus tertentu yang ditulis dengan symbol $\det(A)$ atau $|A|$

2.1.1 Fungsi Determinan

Definisi 2.4 (Anton Rorres, 2004). Suatu permutasi dikatakan *genap* (*even*) jika total banyaknya inversi adalah integer genap dan dikatakan *ganjil* (*odd*) jika total banyaknya inversi adalah integer ganjil.

Contoh 2.2

Tabel berikut ini mengklasifikasikan berbagai permutasi dari $\{1, 2, 3\}$ sebagai genap atau ganjil.

Tabel 2.1 Klasifikasi Permutasi dari $\{1, 2, 3\}$

Permutasi	Banyaknya Inversi	Kasifikasi
(1, 2, 3)	0	Genap
(1, 3, 2)	1	Ganjil
(2, 1, 3)	1	Ganjil
(2, 3, 1)	2	Genap
(3, 1, 2)	2	Genap
(3, 2, 1)	3	Ganjil

Definisi 2.5 (Anton Rorres, 2004). *Determinan* suatu hasilkali elementer (*elementary product*) dari suatu matriks A , $n \times n$, adalah hasil kali dari n entri dari A , yang tidak satupun berasal dari baris atau kolom yang sama.

Di bawah ini merupakan contoh untuk mencari hasilkali elementer dari matriks 2×2 dan 3×3 yang dibuat dalam bentuk tabel.

Contoh 2.3

Buatlah daftar hasilkali elementer dari matriks-matriks

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Tabel 2.2 Hasilkali Elementer dari Matriks 2×2 dan 3×3

Hasilkali Elementer	Permutasi Yang Berkaitan	Genap atau Ganji	Hasilkali Eementer Bertanda
$a_{11}a_{22}$	(1, 2)	genap	$a_{11}a_{22}$
$a_{12}a_{21}$	(2, 1)	ganjil	$-a_{12}a_{21}$

Hasilkali Elementer	Permutasi yang Berkaitan	Genap atau Ganjil	Hasilkali Elementer Bertanda
$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1, 2, 3)	genap	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1, 3, 2)	ganjil	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2, 1, 3)	ganjil	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2, 3, 1)	genap	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3, 1, 2)	genap	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3, 2, 1)	ganjil	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Definisi 2.6 (Anton Rorres, 2004). Misalkan A adalah suatu matriks bujur sangkar. *Fungsi determinan (determinan function)* dinotasikan dengan det dan kita mendefinisikan $det(A)$ sebagai jumlah dari semua hasilkali elementer bertanda dari A . Angka $det(A)$ disebut *determinan dari A (determinant of A)*.

Berikut ini diberikan contoh untuk mencari determinan dari matriks 2×2 dan 3×3 yang mengacu pada contoh 2.3

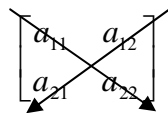
Contoh 2.4

Mengacu pada contoh 2.1, kita memperoleh

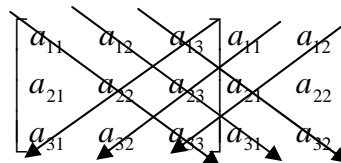
$$(a) \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$(b) \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Untuk lebih jelasnya dalam menentukan nilai determinan matriks berordo 2×2 dapat dilakukan dengan mengalikan elemen-elemen pada panah yang mengarah ke kanan dan mengurangkan hasil kali elemen-elemen pada panah yang mengarah kiri, sehingga menghitung determinan ordo 2×2 secara langsung melibatkan perhitungan $2! = 2$ hasil kali elementer bertanda. Adapun rumus yang digunakan adalah:



(a) Determinan dari matriks 2×2



(b) Determinan dari matriks 3×3

Gambar 2.1 Rumus untuk Menghitung Determinan Matriks 2×2 dan 3×3

Contoh di bawah ini merupakan metode untuk menggunakan determinan matriks 2×2 dan 3×3

Contoh 2.5

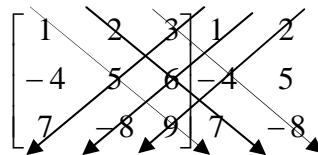
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode pada Gambar 2.1.a kita memperoleh

$$\det(A) = (3)(-2) - (1)(4) = -10$$

Dengan menggunakan metode pada Gambar 2.1.b kita memperoleh

$$\det(B) = (45) + (84) + (96) - (105) - (-48) - (-72) = 240$$



Perlu di tekankan bahwa metode yang ditunjukkan pada Gambar 2.1. tidak dapat digunakan untuk menghitung determinan dari matriks 4×4 atau matriks yang lebih besar.

Selanjutnya perlu di tekankan bahwa simbol $|A|$ adalah notasi alternatif untuk $\det(A)$. Sebagai contoh, determinan dari suatu matriks 3×3 dapat di tulis sebagai

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ atau } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Determinan dari matriks A pada contoh 2.5 dengan menggunakan notasi kedua dapat ditulis sebagai

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

jadi, dapat di simpulkan bahwa determinan dari A dapat ditulis sebagai simbolis sebagai berikut.

$$\det(A) = \sum \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

dimana menunjukkan bahwa suku-suku harus dijumlahkan untuk semua permutasi (j_1, j_2, \dots, j_n) dan tanda + atau - dipilih untuk setiap suku tergantung pada apakah permutasinya genap atau ganjil.

2.2.2 Sifat-Sifat Determinan dengan Reduksi Baris

Teorema 2.1 (Anton Rorres, 2004). Misalkan A adalah suatu matriks bujur sangkar.

- (1) Jika a memiliki satu baris atau satu kolom bilangan nol, maka $\det(A) = 0$
- (2) $\det(A) = \det(A^T)$.

Teorema berikut menunjukkan bagaimana operasi baris elementer terhadap suatu matriks mempengaruhi nilai determinannya.

Teorema 2.2 (Anton Rorres, 2004). Misalkan A adalah suatu matriks $n \times n$.

- (1) Jika B adalah matriks yang diperoleh ketika satu baris atau satu kolom dari A dikalikan dengan suatu scalar k , maka $\det(B) = k \det(A)$.
- (2) Jika B adalah matriks yang diperoleh ketika dua baris atau dua kolom dari A dipertukarkan, maka $\det(B) = -\det(A)$.
- (3) Jika B adalah matriks yang diperoleh ketika kelipatan dari satu baris A ditambahkan ke baris lainnya atau ketika kelipatan dari satu kolom ditambahkan ke kolom yang lain, maka $\det(B) = \det(A)$.

Contoh 2.6 Teorema 2.2 diterapkan untuk Determinan 3×3

Hubungan	Operasi
$\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ $\det(B) = k \det(A)$	Baris pertama dari A dikalikan dengan k
$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ $\det(B) = -\det(A)$	Baris pertama dan kedua dari A dipertukarkan.

$\begin{bmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ $\det(B) = \det(A)$	<p>Suatu kelipatan dari baris kedua dari A ditambahkan ke baris pertama.</p>
---	---

Sedangkan untuk menghitung determinan suatu matriks dengan menggunakan reduksi baris dapat di lihat pada contoh di bawah ini.

Contoh 2.7

Hitunglah $\det(A)$ di mana

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Kita akan mereduksi A menjadi bentuk eselon baris (yaitu segitiga atas) dan menerapkan teorema 2.2:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \text{ Baris pertama dan kedua dari } A$$

dipertukarkan.

$$= -3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \text{ Suatu faktor bersama yaitu 3 dari baris pertama}$$

dikeuarkan melewati tanda determinan

$$= -3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix} \text{ -2 kali baris pertama ditambahkan ke baris ketiga}$$

$$= -3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -55 \end{bmatrix} \text{ -10 kali baris kedua ditambahkan ke baris ketiga.}$$

$$= (-3)(-55) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{suatu faktor bersama yaitu } -55 \text{ dari baris terakhir}$$

dikeluarkan melewati tanda determinan.

$$= (-3)(-55)(1) = 165$$

Jadi, diperoleh hasil dari determinan dengan menggunakan reduksi baris adalah 165.