BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

Definisi 2.1 (Anton, Howard. 2000). Matriks adalah suatu susunan bilangan berbentuk segi empat. Bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut *anggota* dalam matriks tersebut.

Ukuran (*size*) suatu matriks dinyatakan dalam jumlah baris (arah horizontal) dan kolom (arah vertikal) yang dimilikinya. Suatu matriks yang hanya terdiri dari satu kolom disebut matriks kolom (atau vektor kolom) dan suatu matriks yang hanya terdiri dari satu baris disebut matriks baris (atau vektor baris). Cara yang biasa digunakan untuk menuliskan sebuah matriks dengan m baris dan n kolom adalah

$$\begin{array}{ccc} & \text{Kolom } j & \\ A = & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & \text{Baris } i \end{array}$$

Matriks *A* dikatakan berukuran $m \times n$ dan a_{ij} adalah unsur matriks *A* berada pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j*. Matriks *A* dan *B* dikatakan sama jika $a_{ij} = b_{ij}$ dengan kata lain ukurannya sama dan mempunyai unsur yang sama.

Definisi 2.2 (Anton Rorres, 2004). Jika *A* dan *B* adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka jumlah (*sum*) $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada *B* dengan entri-entri yang bersesuaian pada *A* dan selisih (*differen*) $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada A dengan entri-entri yang bersesuaian pada B. matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

Definisi 2.3 (Charles G. Cullen, 1993)**.** Jika A adalah matriks $m\ x\ r$ dan B adalah matriks berukuran $r \times n$, maka hasil kali (*product*) AB adalah matriks C berukuran $m \times n$ yang unsur-unsurnya adalah

$$C_{ij} = \text{Baris}_i(A)\ \text{Kol}_j(B)$$

$$= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Perhatikan bahwa perkalian matriks didefinisikan hanya jika banyaknya kolom matriks yang pertama sama dengan banyaknya baris matriks yang kedua.

Suatu matriks bujursangkar A adalah matriks simetrik (*symmetric*) jika $A = A^T$ kita dapat mengenali matriks-matriks simetrik dengan mudah hanya dengan melalui inspeksi. Entri-entri pada diagonal utamanya mungkin sebarang, tetapi entri-entri yang berseberangan terhadap diagonal utama harus setara. Ini mengacu pada fakta bahwa mentranspos matriks bujur sangkar dapat diselesaikan dengan mempertukarkan entri-entri yang posisinya simetris terhadap diagonal utama. Dinyatakan dalam bentuk entri individual, suatu matriks $A = a_{ij}$ adalah simetrik, jika dan hanya jika $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua nilai i dan j. Untuk lebih jelasnya, berikut contoh matriks simetrik

Contoh 2.1

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

Matriks-matriks di atas adalah simetrik, karena masing-masing setara dengan transposnya.

Kita dapat mengenali matriks-matriks simetrik dengan mudah hanya dengan melalui inspeksi. Entri-entri pada diagonal utamanya mungkin sebarang, tetapi sebagaimana ditunjukkan pada matriks dibawah, dari entri-entri yang berseberangan terhadap diagonal utama harus setara. Dinyatakan dalam bentuk entri individual, suatu matriks $A = a_{ij}$ adalah simetrik, jika dan hanya jika $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua nilai i dan j. Sebagaimana diilustrasikan pada contoh 1, semua matriks diagonal adalah simetrik.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

2.2 Determinan Matriks

Determinan adalah nilai real yang dihitung berdasarkan nilai elemen-elemennya, menurut rumus tertentu yang ditulis dengan symbol det (*A*) atau $|A|$

2.1.1 Fungsi Determinan

Definisi 2.4 (Anton Rorres, 2004)**.** Suatu permutasi dikatakan *genap* (*even*) jika total banyaknya inversi adalah integer genap dan dikatakan *ganjil* (*odd*) jika total banyaknya inversi adalah integer ganjil.

Contoh 2.2

Tabel berikut ini mengklasifikasikan berbagai permutasi dari {1, 2, 3} sebagai genap atau ganjil.

Tabel 2.1 Klasifikasi Permutasi dari {1, 2, 3}

Permutasi	**Banyaknya Inversi**	**Kasifikasi**
(1, 2, 3)	0	Genap
(1, 3, 2)	1	Ganjil
(2, 1, 3)	1	Ganjil
(2, 3, 1)	2	Genap
(3, 1, 2)	2	Genap
(3, 2, 1)	3	Ganjil

Definisi 2.5 (Anton Rorres, 2004)**.** *Determinan* suatu hasilkali elementer (*elementary product*) dari suatu matriks A, $n \times n$, adalah hasil kali dari n entri dari A, yang tidak satupun berasal dari baris atau kolom yang sama.

Di bawah ini merupakan contoh untuk mencari hasilkali elementer dari matriks 2×2 dan 3×3 yang dibuat dalam bentuk tabel.

Contoh 2.3

Buatlah daftar hasilkali elementer dari matriks-matriks

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Tabel 2.2 Hasilkali Elementer dari Matriks 2×2 dan 3×3

Hasilkali Elementer	**Permutasi Yang Berkaitan**	**Genap atau Ganji**	**Hasilkali Eementer**
			Bertanda
$a_{11}a_{22}$	(1, 2)	genap	$a_{11}a_{22}$
$a_{12}a_{21}$	(2, 1)	ganjil	$-a_{12}a_{21}$

Hasilkali Elementer	**Permutasi yang Berkaitan**	**Genap atau Ganjil**	**Hasilkali Elementer Bertanda**
$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1, 2, 3)	genap	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1, 3, 2)	ganjil	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2, 1, 3)	ganjil	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2, 3, 1)	genap	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3, 1, 2)	genap	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3, 2, 1)	ganjil	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Definisi 2.6 (Anton Rorres, 2004)**.** Misalkan *A* adalah suatu matriks bujur sangkar. *Fungsi determinan* (*determinan function*) dinotasikan dengan *det* dan kita mendefinisikan det(*A*) sebagai jumlah dari semua hasilkali elementer bertanda dari *A*. Angka det(*A*) disebut *determinan dari A* (*determinant of A*).

Berikut ini diberikan contoh untuk mencari determinan dari matriks 2×2 dan 3×3 yang mengacu pada contoh 2.3

Contoh 2.4

Mengacu pada contoh 2.1, kita memperoleh

$$(a)\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$(b)\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Untuk lebih jelasnya dalam menentukan nilai determinan matriks berordo 2×2 dapat dilakukan dengan mengalikan elemen-elemen pada panah yang mengarah ke kanan dan mengurangkan hasilkali elemen-elemen pada panah yang mengarah kiri, sehingga menghitung determinan ordo 2×2 secara langsung melibatkan perhitungan 2! = 2 hasilkali elementer bertanda. Adapun rumus yang digunakan adalah:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

(a) Determinan dari matriks 2×2

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

(b) Determinan dari matriks 3×3

Gambar 2.1 Rumus untuk Menghitung Determinan Matriks 2×2 dan 3×3

Contoh di bawah ini merupakan metode untuk menggunakan determinan matriks 2×2 dan 3×3

Contoh 2.5

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ dan } \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode pada Gambar 2.1.*a* kita memperoleh

$$\det(A) = (3)(-2) - (1)(4) = -10$$

Dengan menggunakan metode pada Gambar 2.1.*b* kita memperoleh

$$\det(B) = (45) + (84) + (96) - (105) - (-48) - (-72) = 240$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 6 & -4 & 5 \\ 7 & -8 & 9 & 7 & -8 \end{array}\right.$$

Perlu di tekankan bahwa metode yang ditunjukkan pada Gambar 2.1. tidak dapat digunakan untuk menghitung determinan dari matriks 4×4 atau matriks yang lebih besar.

Selanjutnya perlu di tekankan bahwa simbol $|A|$ adalah notasi alternatif untuk $\det(A)$. Sebagai contoh, determinan dari suatu matriks 3×3 dapat di tulis sebagai

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Determinan dari matriks A pada contoh 2.5 dengan menggunakan notasi kedua dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = -10$$

jadi, dapat di simpulkan bahwa determinan dari A dapat ditulis sebagai simbolis sebagai berikut.

$$\det(A) = \sum \pm a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

dimana $\sum$ menunjukkan bahwa suku-suku harus dijumlahkan untuk semua permutasi $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ dan tanda + atau – dipilih untuk setiap suku tergantung pada apakah permutasinya genap atau ganjil.

2.2.2 Sifat-Sifat Determinan dengan Reduksi Baris

Teorema 2.1 (Anton Rorres, 2004)**.** Misalkan *A* adalah suatu matriks bujur sangkar.

(1) Jika *a* memiliki satu baris atau satu kolom bilangan nol, maka $\det(A) = 0$

(2) $\det(A) = \det(A^T)$.

Teorema berikut menunjukkan bagaimana operasi baris elementer terhadap suatu matriks mempengaruhi mempengaruhi nilai determinannya.

Teorema 2.2 (Anton Rorres, 2004)**.** Misalkan *A* adalah suatu matriks $n \times n$.

(1) Jika *B* adalah matriks yang diperoleh ketika satu baris atau satu kolom dari *A* dikalikan dengan suatu scalar k, maka $\det(B) = k\det(A)$.

(2) Jika *B* adalah matriks yang diperoeh ketika dua baris atau dua kolom dari *A* dipertukarkan, maka $\det(B) = -\det(A)$.

(3) Jika *B* adalah matriks yang diperoleh ketika kelipatan dari satu baris *A* ditambahkan ke baris lainnya atau ketika kelipatan dari satu kolom ditambahkan ke kolom yang lain, maka $\det(B) = \det(A)$.

Contoh 2.6 Teorema 2.2 diterapkan untuk Determinan 3×3

Hubungan	Operasi
$\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ $\det(B) = k\det(A)$	Baris pertama dari *A* dikalikan dengan k
$\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ $\det(B) = -\det(A)$	Baris pertama dan kedua dari *A* dipertukarkan.

$\begin{bmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ $\mathbf{d}et(B) = \det(A)$	Suatu kelipatan dari baris kedua dari A ditambahkan ke baris pertama.

Sedangkan untuk menghitung determinan suatu matriks dengan menggunakan reduksi baris dapat di lihat pada contoh di bawah ini.

Contoh 2.7

Hitunglah $\det(A)$ di mana

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Kita akan mereduksi A menjadi bentuk eselon baris (yaitu segitiga atas) dan menerapkan teorema 2.2:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$ Baris pertama dan kedua dari A dipertukarkan.

$$= -3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$ Suatu faktor bersama yaitu 3 dari baris pertama dikeuarkan melewati tanda determinan

$$= -3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix}$$ -2 kali baris pertama ditambahkan ke baris ketiga

$$= -3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -55 \end{bmatrix}$$ -10 kali baris kedua ditambahkan ke baris ketiga.

$$= (-3)(-55)\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ suatu faktor bersama yaitu -55 dari baris terakhir dikeluarkan melewati tanda determinan.

$$= (-3)(-55)(1) = 165$$

Jadi, diperoleh hasil dari determinan dengan menggunakan reduksi baris adalah 165.