BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Sistem Persamaan diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang di dalamnya terdapat turunan-turunan. Jika terdapat variabel bebas tunggal, turunannya merupakan turunan biasa dan persamaannya disebut persamaan diferensial biasa. Sedangkan jika terdapat dua atau lebih variabel bebas, maka turunannya adalah turunan parsial dan persamaannya disebut persamaan diferensial parsial (Ayres, 1999).

Contoh 2.1:

Diberikan persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 9$$

dengan *y* adalah variabel terikat dan *x* variabel bebas

Sistem persamaan differensial adalah persamaan yang terdiri dari beberapa persamaan differensial. Diberikan sistem persamaan differensial :

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

dengan $\dot{x} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_n}{dt}\right)^T$, $f = (f_1, f_2, \dots f_n)^T$, dan $x = (x_1, x_2, \dots x_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

Sistem persamaan differensial (2.1) dapat ditulis dalam bentuk sistem persamaan berikut :

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots x_n) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots x_n) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots x_n)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Dengan f_i adalah fungsi dari $x_1, x_2, \dots, x_n$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, n$

Sistem (2.2) dikatakan linear jika $f_{1,}f_2, \ldots\ f_3$ masing-masing linear pada $x_{1,}x_2, \ldots\ x_n$ dan sebaliknya jika masing-masing tidak linear maka disebut persamaan differensial non linear. Jika sistem (2.2) linear maka bisa ditulis dalam bentuk :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{aligned} \tag{2.3}$$

Selanjutnya sistem dapat ditulis dalam bentuk :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax}$$

Dengan *A* matrik dengan ukuran *n* x *n*, dan $x = (x_{1,}x_2, \ldots\ x_n)^T$

Definisi 2.1 (Perko, 1991) diberikan E $\subseteq R^n$, E himpunan terbuka, dan $f_i \in C^1(E, R)$, $i = 1,2, \ldots, n$. Vektor $x(t) \in R^n$ disebut penyelesaian sistem (2.1) pada interval *I* jika $x(t)$ differensiabel pada *I* dan $\frac{dx}{dt} = f(x(t))$ untuk setiap $t \in I$ dan $x(t) \in E$.

2.2 Titik Kesetimbangan (*Equilibrium*)

Secara umum model penyebaran penyakit mempunyai dua titik kesetimbangan yakni titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit. Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah suatu kondisi yang menyatakan tidak ada individu yang terinfeksi penyakit, sedangkan titik kesetimbangan endemik penyakit adalah suatu kondisi yang menyatakan selalu ada individu yang terinfeksi penyakit. Untuk informasi yang menggambarkan perilaku sistem pada titik kesetimbangan maka akan dicari kestabilan titik kesetimbangannya. Di bawah ini definisi tentang kestabilan titik kesetimbangan (*equilibrium*):

Definisi 2.2 (Hale, 1991) Titik keseimbangan (*equilibrium*) $\bar{x} \in R^n$ dari sistem (2.1) dikatakan:

a. Stabil lokal jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk solusi sistem (2.1) $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta$ maka berakibat $\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \leq t_0$.

b. Stabil asimtotik lokal jika titik $equilibrium\, \bar{x} \in R^n$ stabil dan terdapat bilangan $\delta_0 > 0$ sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta_0$ berakibat $\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$

c. Tidak stabil jika titik *equilibrium* $\bar{x} \in R^n$ tak memenuhi (a).

Sedangkan kestabilan yang bersifat global, jika untuk sembarang titik awal, solusi sistem persamaan differensial $x(t)$ berada dekat titik $equilibrium\, \bar{x} \in R^n$, maka titik $equilibrium\, \bar{x} \in R^n$ stabil global. Namun jika titik $equilibrium\, \bar{x} \in R^n$ stabil global dan untuk t membesar menuju tak hingga $x(t)$ konvergan ke $\bar{x} \in R^n$, maka titik $equilibrium\, \bar{x} \in R^n$ stabil asimtotik global.

2.3 Matriks Jacobian

Definisi 2.3 (Hale, 1991) Diberikan $f = (f_1, \dots, f_n)$ pada sistem (2.1) di atas dengan $f_i \in c^1(E)$, $i = 1,2, \dots, n$.

$$J(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

dinamakan matriks jacobian dari f di titik x.

Teorema 2.1 (Hale, 1991)

a. Jika semua nilai eigen dari matriks jacobian $J(f(x))$ mempunyai bagian real negatif, maka titik $equilibrium\, \bar{x}$ dari sistem (2.1) stabil asimtotik.

b. Jika terdapat nilai eigen dari matriks jacobian $J(f(x))$ mempunyai bagian real positif, maka titik $equilibrium\, \bar{x}$ dari sistem (2.1) tidak stabil.

Teorema 2.2 (Widodo, 2007) Jika nilai eigennya imajiner murni maka titik *equilibrium* $\bar{x}$ dari sistem (2.1) stabil, tetapi tidak stabil asimtotik.

2.4 Model Pertumbuhan Logistik

Model pertumbuhan logistik adalah model pertumbuhan populasi dengan sumber daya lingkungan yang terbatas. Persamaan logistik pertama kali diperkenalkan oleh Pierre–Francais Verhulst pada tahun 1838 (Sari). Model pertumbuhan logistik disebut juga dengan model verhulst atau kurva pertumbuhan logistik. Pada model pertumbuhan logistik ini diasumsikan bahwa tidak ada penundaan waktu pada proses pertumbuhan populasi. Model ini termasuk model kontinu terhadap waktu, dan persamaannya adalah :

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad 1 - \frac{N}{k} \tag{2.4}$$

dengan,

N : jumlah populasi pada saat *t*

r : rata – rata pertumbuhan

k : kapasitas batas lingkungan.

Jika diselesaikan, maka persamaan logistik mempunyai solusi sebagai berikut:

Diketahui :

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad 1 - \frac{N}{k}$$

Sehingga,

$$\frac{dN}{N \ 1-\frac{N}{k}} = r\,dt$$

$$\frac{dN}{N \ 1-\frac{N}{k}} = \quad r\,dt$$

Karena $\frac{1}{N \ 1-\frac{N}{k}} = \frac{1}{N} + \frac{\frac{1}{k}}{1-\frac{N}{k}}$ maka diperoleh

$$\frac{1}{N}dN + \quad \frac{\frac{1}{k}}{1-\frac{N}{k}}dN = \quad r\,dt$$

$$\frac{1}{N}dN + \quad \frac{1}{k-N}dN = \quad r\,dt$$

$$\ln|N| - \ln|k - N| = rt + c$$

$$ln\ \frac{N}{k-N} = rt + c$$

$$\frac{N}{k-N} = e^{rt+c}$$

jika $N\ 0 = N_0$ maka $\frac{N_0}{k-N_0} = e^{r(0)+c}$

$$\frac{N_0}{k-N_0} = e^{c}$$

$$c = ln\ \frac{N_0}{k-N_0}$$

Selanjutnya,

$$ln\ \frac{N}{k-N} = rt + ln\ \frac{N_0}{k-N_0}$$

$$ln\ \frac{N}{k-N} - ln\ \frac{N_0}{k-N_0} = rt$$

$$ln\ \frac{N(k-N_0)}{N_0(k-N)} = rt$$

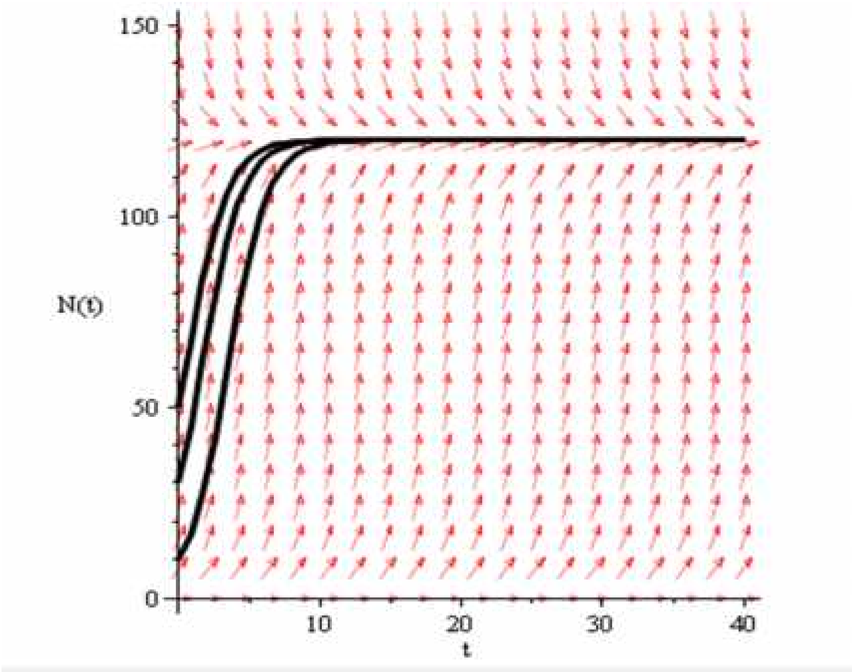
$$\frac{N}{k-N} = e^{rt}\frac{N_0}{k-N_0}$$

Maka diperoleh nilai *N* yaitu :

$$N = \frac{kN_0}{k-N_0\ +e^{rt}N_0}e^{rt}$$

$$N = \frac{k}{\frac{k-N_0}{N_0e^{rt}}\ +1}$$

Untuk r = 0,7 dan k = 120 maka diperoleh grafik sebagai berikut :



Gambar 2.1 Grafik Model Logistik

2.5 Model SIRS

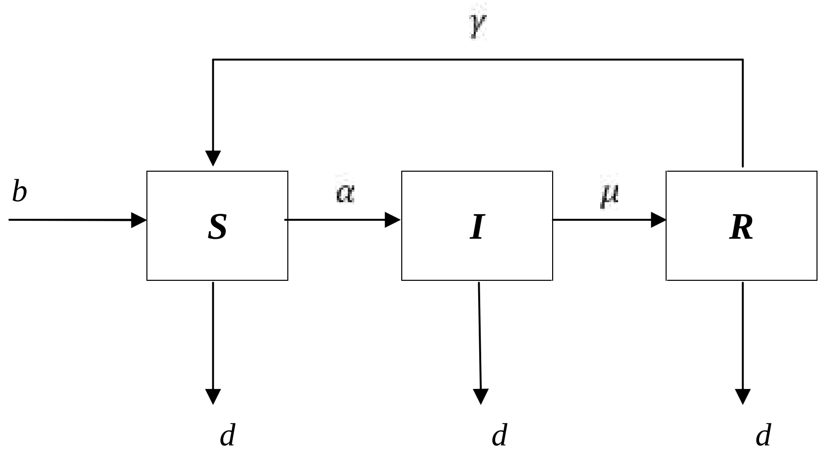
Pada model SIRS, populasi dibagi menjadi tiga kelompok yaitu *suspectible* (S) kelas yang berisikan individu yang rentan terhadap penyakit yang dibicarakan, *invertible* (I) kelas yang berisikan individu yang telah terinfeksi penyakit dan mampu menularkan, dan yang terakhir kelas *recovered* (R) yakni kelas yang sembuh terhadap penyakit yang dibicarakan. Pada model SIRS individu hanya mengalami kekebalan sementara, dengan kata lain setelah individu memasuki kelas *recovered* (R) ia akan masuk kembali pada kelas rentan atau kelas *suspectible* (S).

Pada model SIRS ini diperlukan asumsi-asumsi sebagai berikut:

a. Populasi tertutup (tidak ada proses imigrasi).
b. Terjadi kelahiran dan kematian pada populasi, dengan laju kelahiran dan kematian sama, yaitu $b = d$.
c. Penyakit dapat disembuhkan.
d. Laju penularan diperhatikan, dinyatakan dengan $\alpha > 0$.
e. Laju penyembuhan diperhatikan, dinyatakan dengan $\mu > 0$.

f. Individu yang sembuh dari penyakit yang dibicarakan masuk kembali ke kelas rentan atau *suspectible* (S), dinyatakan dengan $\gamma > 0$.
g. Individu yang sembuh hanya mengalami kekebalan sementara.
h. Hanya ada satu jenis penyakit.

Berdasarkan asumsi di atas maka didapat diagram alir dari model SIRS seperti di bawah ini:



Gambar 2.2 Diagram Alir Model SIRS

Sesuai Gambar di atas maka didapat sistem persamaan differensial sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = b - \alpha SI - dS + \gamma R \qquad (2.5.a)$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - dI - \mu I \qquad (2.5.b)$$

$$\frac{dR}{dt} = \mu I - dR - \gamma R \qquad (2.5.c)$$

$$S + I + R = N \qquad (2.5.d)$$

Nilai R dapat ditentukan apabila nilai S dan I ditentukan ini karena $R = N - S - I$. Selanjutnya akan ditentukan titik kesetimbangannya dan titik kestabilannya.

2.5.1 Titik *Equilibrium* Bebas Penyakit

Titik *equilibrium* bebas penyakit berarti dalam populasi tersebut tidak ada individu yang terinfeksi atau sakit. Titik *equilibrium* bebas penyakit ini di notasikan dengan $(S^{\square}, I^{\square})$. Untuk mendapatkan titik *equilibrium* bebas penyakit, dari persamaan (2.5.a) maka dilakukan penyelesaian sebagai berikut:

$$b - \alpha S^{\square} I^{\square} - dS^{\square} + \gamma R = 0$$

$$b - \alpha S^{\square}(0) - dS^{\square} + \gamma R = 0$$

$$b - dS^{\square} + \gamma R = 0$$

$$-dS^{\square} = -\gamma R - b$$

$$S^{\square} = \frac{\gamma R + b}{d}$$

Jadi diperoleh $S^{\square} = \frac{\gamma R + b}{d}$ dan $I^{\square} = 0$ maka titik *equilibrium* bebas penyakitnya adalah $(S^{\square}, I^{\square}) = \frac{\gamma R + b}{d}, 0$

2.5.2 Titik *Equilibrium* Endemik Penyakit

Titik *equilibrium* endemik penyakit ini adalah jika dalam suatu populasi selalu terdapat individu yang terinfeksi penyakit yang dibicarakan. Titik *equilibrium* endemik penyakit ini dinotasikan dengan $(\hat{S}, \hat{I})$. Dari persamaan (2.5.b) diperolah penyelesaian sebagai berikut :

$$\alpha \hat{S}\hat{I} - d\hat{I} - \mu\hat{I} = 0$$

$$\hat{I}(\alpha\hat{S} - d - \mu) = 0$$

karena $(\hat{I} \neq 0)$ maka $(\alpha\hat{S} - d - \mu) = 0$

$$\alpha\hat{S} = d + \mu$$

$$\hat{S} = \frac{d+\mu}{\alpha}$$

substitusikan kepersamaan (2.5.a), sehingga:

$$b - \alpha\hat{S}\hat{I} - d\hat{S} + \gamma R = 0$$

$$\alpha \ \frac{d+\mu}{\alpha} \ \hat{I} = b - d \ \frac{d+\mu}{\alpha} \ + \gamma R$$

$$(d+\mu)\hat{I} = b - d \ \frac{d+\mu}{\alpha} \ + \gamma R$$

$$\hat{I} = \frac{b - d \ \frac{d+\mu}{\alpha} \ + \gamma R}{(d+\mu)}$$

$$\hat{I} = \frac{b}{(d+\mu)} - \frac{d(d+\mu)}{(d+\mu)\alpha} + \frac{\gamma R}{(d+\mu)}$$

$$\hat{I} = \frac{b}{(d+\mu)} - \frac{d}{\alpha} + \frac{\gamma R}{(d+\mu)}$$

jadi diperoleh titik *equilibrium* endemik penyakitnya adalah

$$\hat{S},\hat{I} \;=\; \frac{d+\mu}{\alpha},\frac{b}{(d+\mu)}-\frac{d}{\alpha}+\frac{\gamma R}{(d+\mu)}$$

2.5.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Setelah diperoleh titik kesetimbangannya, selanjutnya akan diselidiki kestabilan titik kesetimbangannya dengan mencari matriks jacobian terlebih dulu.

$$f\ S,I \;=\; b-\alpha SI-dS+\gamma R$$

$$g\ S,I \;=\; \alpha SI-dI-\mu I$$

Kemudian dicari turunan parsialnya terhadap variabel pada fungsi tersebut

a) Fungsi $f\ S,I$ diturunkan terhadap variabel S :

$$\frac{\partial f}{\partial S}=\frac{\partial\ b-\alpha SI-dS+\gamma R}{\partial S}$$

$$=-\alpha I-d$$

b) Fungsi $f\ S,I$ diturunkan terhadap variabel I :

$$\frac{\partial f}{\partial I}=\frac{\partial\ b-\alpha SI-dS+\gamma R}{\partial I}$$

$$=-\alpha S$$

c) Fungsi $g\ S,I$ diturunkan terhadap variabel S :

$$\frac{\partial g}{\partial S}=\frac{\partial\ \alpha SI-dI-\mu I}{\partial S}$$

$$=\alpha I$$

d) Fungsi $g\ S,I$ diturunkan terhadap variabel I :

$$\frac{\partial g}{\partial I}=\frac{\partial\ \alpha SI-dI-\mu I}{\partial I}$$

$$=\alpha S-d-\mu$$

Matriks jacobiannya adalah :

$$J\ S,I \;=\; \begin{matrix}\frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial I}\\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial I}\end{matrix}$$

$$J\ S,I \;=\; \begin{matrix}-\alpha I-d & -\alpha S\\ \alpha I & \alpha S-d-\mu\end{matrix} \tag{2.6}$$

Dengan definisi dasar angka reproduksi:

$$R_0=\frac{\alpha\ \gamma R+b}{d\ d+\mu} \tag{2.7}$$

a. Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit $(S^{*}, I^{*}) = \left(\frac{\gamma R+b}{d}, 0\right)$

Teorema 2.3 : (Risna Lesmana) Titik kesetimbangan bebas penyakit $(S^{*}, I^{*}) = \left(\frac{\gamma R+b}{d}, 0\right)$ stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$.

Bukti :

Berdasarkan matriks jacobian (2.6) bahwa:

$$J(S, I) = \begin{pmatrix} -\alpha I - d & -\alpha S \\ \alpha I & \alpha S - d - \mu \end{pmatrix}$$

Setelah dimasukkan nilai S^{*} dan I^{*} maka matriks di atas menjadi

$$J(S^{*}, I^{*}) = \begin{pmatrix} -\alpha(0) - d & -\alpha\left(\frac{\gamma R+b}{d}\right) \\ \alpha(0) & \alpha\left(\frac{\gamma R+b}{d}\right) - d - \mu \end{pmatrix}$$

$$J(S^{*}, I^{*}) = \begin{pmatrix} -d & -\alpha\left(\frac{\gamma R+b}{d}\right) \\ 0 & \alpha\left(\frac{\gamma R+b}{d}\right) - d - \mu \end{pmatrix}$$

Kemudian dicari nilai eigen dari matriks di atas

$$\det\left(\lambda I - J(S^{*}, I^{*})\right) = 0$$

$$\det\left(\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -d & -\alpha\left(\frac{\gamma R+b}{d}\right) \\ 0 & \alpha\left(\frac{\gamma R+b}{d}\right) - d - \mu \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -d & -\alpha\left(\frac{\gamma R+b}{d}\right) \\ 0 & \alpha\left(\frac{\gamma R+b}{d}\right) - d - \mu \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} \lambda + d & \alpha\left(\frac{\gamma R+b}{d}\right) \\ 0 & \lambda - \left(\alpha\left(\frac{\gamma R+b}{d}\right) - d - \mu\right) \end{pmatrix} = 0$$

Berdasarkan determinan matriks di atas maka diperoleh persamaan:

$$(\lambda + d)\left(\lambda - \left(\alpha\left(\frac{\gamma R+b}{d}\right) - d - \mu\right)\right) = 0$$

Diperoleh,

$$\lambda_1 = -d < 0$$

$$\lambda_2 = \alpha\left(\frac{\gamma R+b}{d}\right) - d - \mu$$

$$= \frac{\frac{\alpha}{d}\left(\gamma R+b\right)}{d+\mu} - 1$$

$$= \frac{\alpha\left(\gamma R+b\right)}{d\left(d+\mu\right)} - 1$$

$$= R_0 - 1 \qquad \blacksquare$$

Jika $R_0 < 1$ maka λ_2 bernilai real negatif, sehingga Teorema (2.3) terbukti titik kesetimbangan $(S^*, I^*) = \left(\frac{\gamma R+b}{d}, 0\right)$ stabil asimtotik lokal, jika $R_0 < 1$.

b. Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik Penyakit $\left(\hat{S}, \hat{I}\right) = \left(\frac{d+\mu}{\alpha}, \frac{b}{(d+\mu)} - \frac{d}{\alpha} + \frac{\gamma R}{(d+\mu)}\right)$

Teorema 2.4 (Risna Lesmana) :Titik Kesetimbangan Endemik Penyakit $\left(\hat{S}, \hat{I}\right) = \left(\frac{d+\mu}{\alpha}, \frac{b}{(d+\mu)} - \frac{d}{\alpha} + \frac{\gamma R}{(d+\mu)}\right)$ stabil asimtotik lokal jika $R_0 > 1$.

Bukti :

Berdasarkan matriks jacobian (2.6) bahwa:

$$J\left(S, I\right) = \begin{bmatrix} -\alpha I - d & -\alpha S \\ \alpha I & \alpha S - d - \mu \end{bmatrix}$$

Setelah dimasukkan nilai $\hat{S}$ dan $\hat{I}$ maka matriks di atas menjadi

$$J\left(\hat{S}, \hat{I}\right) = \begin{bmatrix} -\alpha\left(\frac{b}{(d+\mu)} - \frac{d}{\alpha} + \frac{\gamma R}{(d+\mu)}\right) - d & -\alpha\left(\frac{d+\mu}{\alpha}\right) \\ \alpha\left(\frac{b}{(d+\mu)} - \frac{d}{\alpha} + \frac{\gamma R}{(d+\mu)}\right) & \alpha\left(\frac{d+\mu}{\alpha}\right) - d - \mu \end{bmatrix}$$

$$J\left(\hat{S}, \hat{I}\right) = \begin{bmatrix} -\alpha\left(\frac{b}{(d+\mu)} - \frac{d}{\alpha} + \frac{\gamma R}{(d+\mu)}\right) - d & -(d+\mu) \\ \alpha\left(\frac{b}{(d+\mu)} - \frac{d}{\alpha} + \frac{\gamma R}{(d+\mu)}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari nilai eigen dari matriks di atas

$$\det\left(\lambda I - J(\hat{S}, \hat{I})\right) = 0$$

$$\det\left(\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\alpha\left(\frac{b}{(d+\mu)} - \frac{d}{\alpha} + \frac{\gamma R}{(d+\mu)}\right) - d & -(d+\mu) \\ \alpha\left(\frac{b}{(d+\mu)} - \frac{d}{\alpha} + \frac{\gamma R}{(d+\mu)}\right) & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-\alpha\left(\frac{b}{(d+\mu)}-\frac{d}{\alpha}+\frac{\gamma R}{(d+\mu)}\right)-d & -(d+\mu)\\ \alpha\left(\frac{b}{(d+\mu)}-\frac{d}{\alpha}+\frac{\gamma R}{(d+\mu)}\right) & 0\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix}\lambda+\alpha\left(\frac{b}{(d+\mu)}-\frac{d}{\alpha}+\frac{\gamma R}{(d+\mu)}\right)+d & (d+\mu)\\ -\alpha\left(\frac{b}{(d+\mu)}-\frac{d}{\alpha}+\frac{\gamma R}{(d+\mu)}\right) & \lambda\end{bmatrix} = 0$$

Berdasarkan determinan matriks di atas diperoleh persamaan:

$$\left(\lambda+\alpha\left(\frac{b}{(d+\mu)}-\frac{d}{\alpha}+\frac{\gamma R}{(d+\mu)}\right)+d\right)\lambda-(d+\mu)\left(-\alpha\left(\frac{b}{(d+\mu)}-\frac{d}{\alpha}+\frac{\gamma R}{(d+\mu)}\right)\right)=0$$

Misalkan,

$$Z=\alpha\left(\frac{b}{(d+\mu)}-\frac{d}{\alpha}+\frac{\gamma R}{(d+\mu)}\right)$$

$$W=(d+\mu)$$

Maka persamaan di atas menjadi

$$\lambda^2+(Z+d)\lambda+WZ=0$$

$$\lambda_1=\frac{-(Z+d)+\sqrt{(Z+d)^2-4WZ}}{2}$$

$$\lambda_2=\frac{-(Z+d)-\sqrt{(Z+d)^2-4WZ}}{2}$$

Dengan,

$$\begin{aligned}WZ&=(d+\mu)\,\alpha\left(\frac{b}{d+\mu}-\frac{d}{\alpha}+\frac{\gamma R}{d+\mu}\right)\\ &=(d+\mu)\,\alpha\left(\frac{\gamma R+b}{d+\mu}-\frac{d}{\alpha}\right)\\ &=\alpha\left((\gamma R+b)-\frac{d(d+\mu)}{\alpha}\right)\\ &=\alpha\left(\frac{\alpha(\gamma R+b)}{d(d+\mu)}-1\right)\\ &=\alpha(R_0-1)\end{aligned}$$

■

Jika $R_0 > 1$ maka λ_1 dan λ_2 bernilai real negatif. Sehingga berdasarkan Teorema (2.4) terbukti titik kesetimbangan endemik penyakit $\hat{S}, \hat{I} = \frac{d+\mu}{\alpha}, \frac{b}{(d+\mu)} - \frac{d}{\alpha} + \frac{\gamma R}{(d+\mu)}$ stabil asimtotik jika $R_0 > 1$.