

BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab ini dibahas tentang dasar-dasar teori yang digunakan untuk mengetahui kecepatan perambatan panas pada proses pasteurisasi pengalengan susu. Dasar-dasar teori tersebut meliputi persamaan diferensial parsial, metode beda hingga, skema beda hingga, perpindahan panas, hukum fourier tentang konduksi panas, persamaan panas pada silinder, dasar pasteurisasi, dan metode pasteurisasi pengalengan susu.

2.1 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan yang memuat satu atau lebih turunan-turunan parsial. Turunan parsial dinotasikan dengan subskrip sebagai berikut:

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x}, U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, U_{xy} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

Sebagai contoh sederhana dari persamaan differensial parsial dapat dilihat pada Persamaan (2.1) dengan $u = (x, y)$ adalah suatu fungsi dengan dua peubah bebas x dan y , dan c adalah konstanta.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = cu \tag{2.1}$$

Berdasarkan sifat kelinieran, persamaan diferensial parsial diklasifikasikan menjadi dua, yaitu linier dan nonlinier. Suatu persamaan diferensial parsial dalam u disebut linier jika semua suku-suku dari u dan turunan-turunannya dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linier dengan koefisien-koefisien yang bebas dari u . Dalam suatu persamaan diferensial parsial linier, koefisien-koefisiennya bisa tergantung kepada peubah-peubah bebas. Misalnya suatu persamaan diferensial parsial linier tingkat dua dengan dua peubah bebas seperti yang diberikan oleh persamaan berikut :

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + D \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + FT = G \tag{2.2}$$

Pada Persamaan (2.2) $A, B, C, D, E, F,$ dan G adalah konstanta-konstanta atau fungsi-fungsi dari variabel x dan y yang diberikan (Waluya, 2006).

Berdasarkan persamaan (2.2), persamaan diferensial parsial dapat dibedakan menjadi tiga tipe yaitu:

1. Persamaan Ellips jika $B^2 - 4AC < 0$
2. Persamaan Parabola jika $B^2 - 4AC = 0$
3. Persamaan Hiperbola jika $B^2 - 4AC > 0$

Persamaan ellips biasanya berhubungan dengan masalah keseimbangan atau kondisi permanen (tidak tergantung waktu) dan penyelesaiannya memerlukan kondisi batas di sekeliling daerah tinjauan. Persamaan parabola biasanya merupakan persamaan yang tergantung pada waktu (tidak permanen) dan penyelesaiannya memerlukan kondisi awal dan batas. Persamaan hiperbola biasanya berhubungan dengan getaran atau permasalahan dimana terjadi ketidak-kontinyuan (*discontinue*) dalam waktu.

2.2 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga merupakan salah satu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan persamaan diferensial parsial. Untuk menyelesaikan persamaan tersebut, metode beda hingga memanfaatkan deret Taylor dengan cara mengaproksimasi atau melalui pendekatan turunan-turunan persamaan diferensial parsial menjadi sistem persamaan linier.

Suatu fungsi dari variabel f dan dapat didiferensialkan sampai n kali dalam interval $[x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]$ dengan h lebih kecil, berdasarkan deret Taylor dapat diuraikan sebagai berikut :

$$f(x_0 + \Delta) = f(x_0) + \Delta f'(x_0) + \frac{\Delta^2}{2!} f''(x_0) + \dots \quad (2.3)$$

$$f(x_0 - \Delta) = f(x_0) - \Delta f'(x_0) + \frac{\Delta^2}{2!} f''(x_0) - \dots \quad (2.4)$$

$$f(x_0 + \Delta) - f(x_0 - \Delta) = 2\Delta f'(x_0) + 2\frac{\Delta^3}{3!} f'''(x_0) + \dots \quad (2.5)$$

Persamaan (2.3), (2.4) dan (2.5) diatur kembali, dengan $f'(x_0) = \frac{\partial f(x_0)}{\partial x}$

sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} - \dots \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} - \dots \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x^3} - \dots \quad (2.8)$$

Berdasarkan Persamaan (2.6), (2.7) dan (2.8) dibuat dengan pendekatan turunan pertama $f(x)$ di titik x_0 , yaitu :

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x} \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Jika sumbu x dibagi ke dalam beberapa interval $\Delta x = \Delta x$ yang panjangnya sama, maka absis titik kisi i dapat ditulis dalam bentuk $x_i = i\Delta x = i\Delta x$ sehingga bentuk pendekatan turunan pertama di titik kisi i menjadi :

1. Pendekatan beda maju

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} \approx \frac{f_{x_{i+1}} - f_i}{\Delta x}$$

2. Pendekatan beda mundur

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} \approx \frac{f_i - f_{x_{i-1}}}{\Delta x}$$

3. Pendekatan beda pusat

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} \approx \frac{f_{x_{i+1}} - f_{x_{i-1}}}{\Delta x}$$

Bentuk pendekatan turunan kedua diperoleh dengan menjumlahkan Persamaan (2.9) dengan (2.10), yaitu :

$$\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2} \approx \frac{f_{x_{i+1}} - 2f_i + f_{x_{i-1}}}{\Delta x^2}$$

dengan $f_i = f(x_i)$, $x_i = i\Delta x = i\Delta$, $i = 1, 2, \dots, N$ (Ardian, tidak diterbitkan).

2.3 Skema Beda Hingga

Untuk mempelajari skema beda hingga, misal diberikan persamaan parabola yaitu persamaan perambatan panas satu dimensi, sebagai berikut:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad (2.11)$$

dengan syarat awal:

$$T(x, 0) = a_0(x), \quad 0 < x < L,$$

dan syarat batas :

$$T(0, t) = b_0(t), \quad t > 0,$$

$$T(L, t) = b_1(t), \quad t > 0,$$

(Yang, 2005).

Untuk menyelesaikan sistem persamaan di atas dengan skema beda hingga akan dihitung nilai pendekatan T (temperatur) pada jaringan titik (x_i, t_k) dengan domain komputasi didiskritkan baik pada arah x maupun arah t sebagai berikut :

$$t_k = k\Delta t, \quad t \geq 0$$

$$x_i = i\Delta x, \quad 0 \leq i \leq n$$

dengan n adalah banyak *grid*.

2.3.1 Skema Emplisit

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} &= \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.3.2 Skema Implisit

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} &= \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} \\ \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.3.3 Skema Metode- θ

Metode- θ kita membuat pernyataan lebih umum dengan mengartikan aproksimasi ini untuk penerapan pada beberapa titik yang lain dalam interval waktu.

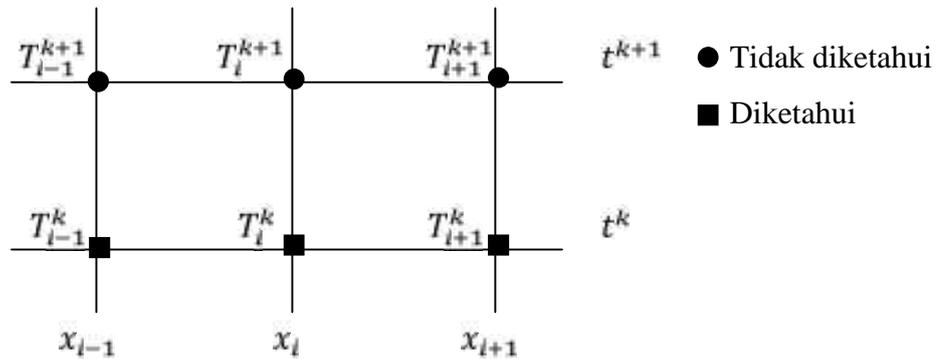
Sekarang anggap dua metode beda hingga yaitu implisit dan eksplisit, yang berbeda hanya dalam satu aproksimasi kedua jarak derivatif dengan tiga titik pada level waktu yang lama, yaitu t_k , dan yang lainnya menggunakan tiga titik pada level waktu yang baru, t_{k+1} . Secara umum aproksimasi dengan metode- θ menggunakan enam titik. Sehingga dapat dianggap bahwa kita mengambil rata-rata terbobot (*weighted*) pada dua formula. Bila waktu beda (*difference*) pada sisi kiri sama, kita dapatkan skema enam titik (Gambar 2.1).

Skema metode- θ dapat ditulis sebagai berikut :

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \theta \frac{T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1}}{\Delta x^2} + 1 - \theta \frac{T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k}{\Delta x^2}$$

$$T_i^{k+1} - T_i^k = \nu \theta T_{i+1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i-1}^{k+1} + (1 - \theta) T_{i+1}^k - 2T_i^k + T_{i-1}^k$$

dengan $\nu = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$



Gambar 2.1 Skema metode- θ

Kestabilan metode- θ dapat dinyatakan sebagai berikut :

- $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$, stabil jika dan hanya jika $\nu \leq \frac{1}{2}(1 - 2\theta)^{-1}$
- $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$, stabil untuk semua nilai ν

Kelebihan skema ini adalah untuk nilai Δx tertentu kesalahan pemotongan pada suku dalam Δt adalah lebih kecil daripada skema eksplisit dan skema implisit (Hidayat dan Pradjaningsih, 2002).

2.4 Perpindahan Panas

Panas adalah suatu bentuk energi yang berpindah dari suatu badan (sistem) badan yang lain (sistem atau sekitarnya). Jadi panas dapat pindah melewati batas suatu sistem, menuju atau dari sistem. Perpindahan panas ini terjadi karena adanya perbedaan temperatur antara sistem dan sekitarnya (Hidayat, 2006). Perpindahan panas mengenal tiga cara pemindahan yang berbeda yaitu konduksi, konveksi, dan radiasi.

2.4.1 Konduksi atau Hantaran

Konduksi adalah proses perpindahan panas dari daerah bersuhu tinggi ke daerah bersuhu rendah dengan media penghantar panas tetap. Laju perpindahan panas dengan cara konduksi dapat dihitung dengan hubungan

$$q = -kA_x \frac{dT}{dx}$$

dengan q : laju perpindahan panas (w),

k : konduktivitas termal bahan (w/m^0C),

A : luas permukaan dimana panas mengalir (m^2), dan

dT/dx : gradien suhu pada penampang, atau laju perubahan suhu T terhadap jarak dalam arah aliran panas x (C/m).

2.4.2 Konveksi

Konveksi adalah perpindahan panas yang terjadi antara permukaan padat dengan fluida yang mengalir disekitarnya, dengan menggunakan media penghantar berupa fluida (cairan/gas). Laju perpindahan panas dengan cara konveksi dapat dihitung dengan hubungan

$$q = hA \Delta T ,$$

dengan h : koefisien perpindahan panas konveksi ($w/m^2 \text{ } ^0C$), dan

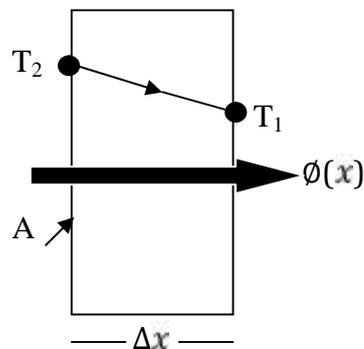
T : perubahan atau perbedaan suhu antara suhu permukaan T_s dan suhu fluida T di lokasi yang ditentukan (biasanya jauh dari permukaan) ($^{\circ}C$; $^{\circ}F$).

2.4.3 Radiasi atau Pancaran

Radiasi adalah perpindahan panas yang terjadi karena pancaran/ sinaran/ radiasi gelombang elektro-magnetik, tanpa memerlukan media perantara.

2.5 Hukum Fourier tentang Konduksi Panas

Perpindahan panas dengan cara konduksi, dalam keadaan *steady*, melewati dinding dengan ketebalan $\Delta x = L$, dan luas permukaan A seperti pada Gambar 2.2. Perubahan temperatur melalui dinding adalah $\Delta T = T_2 - T_1$ (Cengel, 1998). Pengertian *steady* adalah bila laju aliran panas dalam suatu sistem tidak berubah dengan waktu, yaitu laju tersebut konstan, maka suhu di titik manapun tidak berubah (Kreith, 1997).



Gambar 2.2 Ilustrasi Perpindahan Panas Melalui Dinding Datar

Laju konduksi panas yang melalui permukaan bidang berbanding lurus linier dengan perubahan temperatur yang melewati lapisan dan daerah perpindahan panas, tetapi berbanding terbalik dengan ketebalan dinding. Secara matematis diformulasikan oleh persamaan berikut:

$$\text{Laju Konduksi Panas} = \frac{\text{Luas Daerah} \times \text{Perubahan Temperatur}}{\text{Ketebalan dinding}}$$

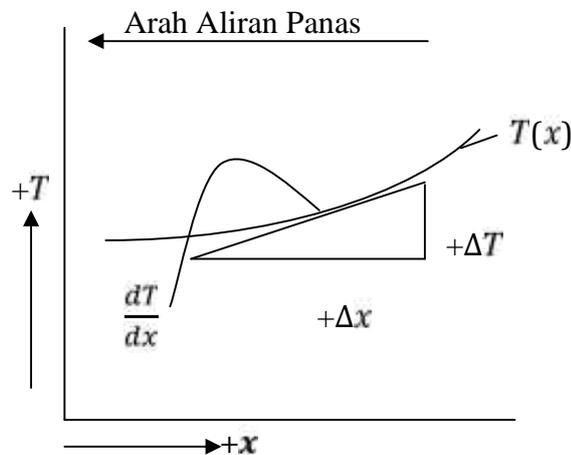
atau

$$\dot{Q} \approx KA \frac{\Delta T}{\Delta x} \approx KA \frac{dT}{dx}$$

dengan K adalah konduktivitas termal, yang diukur dari kemampuan material untuk menghantarkan panas, $\frac{dT}{dx}$ adalah gradien temperatur. Dengan pendekatan $\Delta x \rightarrow 0$, persamaan diatas diubah menjadi :

$$\dot{Q} = -KA \frac{dT}{dx} \quad (2.15)$$

Persamaan (2.15) merupakan *Hukum Fourier* untuk konduksi panas, setelah J. Fourier yang mengekspresikan pertama kali dalam teks perpindahan panasnya pada tahun 1822 (Cengel, 1998). Hubungan di atas menunjukkan bahwa laju konduksi panas berbanding lurus terhadap gradien temperatur dalam arah itu (Gambar 2.3). Tanda negatif dalam Persamaan (2.15) menunjukkan bahwa aliran konduksi panas dari daerah temperatur tinggi ke daerah temperatur rendah berlawanan dengan arah gradien temperatur (Hidayat, 2006).



Gambar 2.3 Sketsa Aliran Panas Konduksi

2.6 Persamaan Panas pada Silinder

Persamaan konduksi panas satu dimensi secara umum diformulasikan sebagai berikut :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \dot{q} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad 2.16$$

Pada penelitian ini, kaleng yang digunakan dianggap sebagai sebuah silinder tanpa ada pembangkitan panas ($\dot{q} = 0$), sehingga persamaan (2.16) menjadi :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \text{atau}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r K \frac{\partial T}{\partial r} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.17)$$

dengan r adalah jari-jari kaleng, K adalah konduktivitas termal, C adalah kalor jenis bahan, dan ρ adalah massa jenis bahan. Sedangkan syarat awal dan syarat batasnya dinyatakan oleh persamaan berikut:

Syarat awal

Syarat awal atau kondisi awal didefinisikan dengan menuliskan distribusi temperatur yang diketahui melewati silinder pada waktu nol dengan suhu awalnya adalah T_0

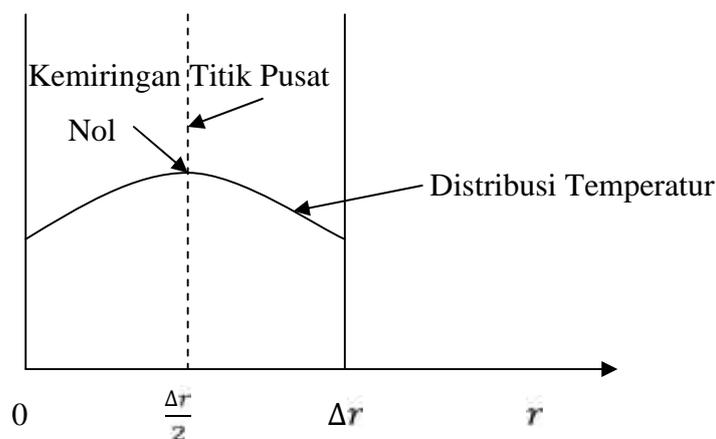
$$T(r, 0) = T_0 \quad \forall r \in [0, R].$$

Syarat batas

1. Syarat Batas Pusat (*Center Boundary Condition*)

Substraksi atau pengurangan antara ϕ_{masuk} dan ϕ_{ketuar} di pusat silinder adalah nol, karena tidak ada ϕ_{masuk} maupun ϕ_{ketuar} pada $r = 0$ (lihat Gambar 2.4), sehingga gradien temperturnya juga nol.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=0} = 0.$$



Gambar 2.4 Sketsa Perpindahan Panas pada Syarat Batas Pusat

2. Syarat Batas *Interface* (*Interface Boundary Condition*)

Dalam proses perpindahan panas, panas akan mengalir secara kontinu sehingga lapisan (*layer*) dengan konduktivitas panas yang berbeda dapat dipandang sebagai suatu sistem dengan nilai konduktivitas panas yang konstan diantara dua lapisan yang berbeda diberikan syarat batas *interface*. Misalkan *interface* pada grid x_0 yang terletak antara dua titik grid 0 dan $x_N = L$ seperti yang terlihat pada Gambar 2.5. Dengan menggunakan prinsip keseimbangan panas pada *interface*, maka ;

$$\phi_{masuk} = \phi_{ketuar} \quad (2.18)$$

dengan

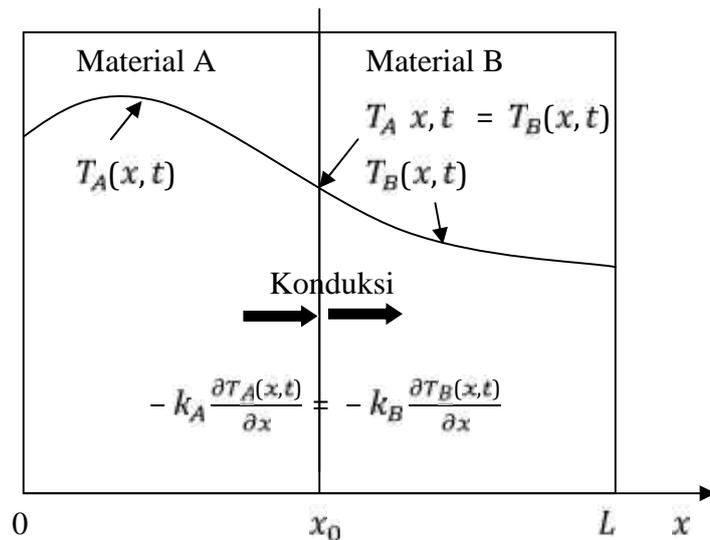
$$\phi_{masuk} = -K_1 A \frac{\partial T_A}{\partial x} \quad (2.18a)$$

$$\phi_{ketuar} = -K_2 A \frac{\partial T_B}{\partial x} \quad (2.18b)$$

jika (2.18a) dan (2.18b) disubstitusikan ke Persamaan (2.18), maka diperoleh ;

$$-K_1 \frac{\partial T_A}{\partial x} + K_2 \frac{\partial T_B}{\partial x} = 0 \quad (2.19)$$

dengan K_1 adalah sifat fisik material A, K_2 adalah sifat fisik material B.



Gambar 2.5 Sketsa Perpindahan Panas pada Syarat Batas *Interface*

3. Syarat Batas Luar (*Outer Boundary Condition*)

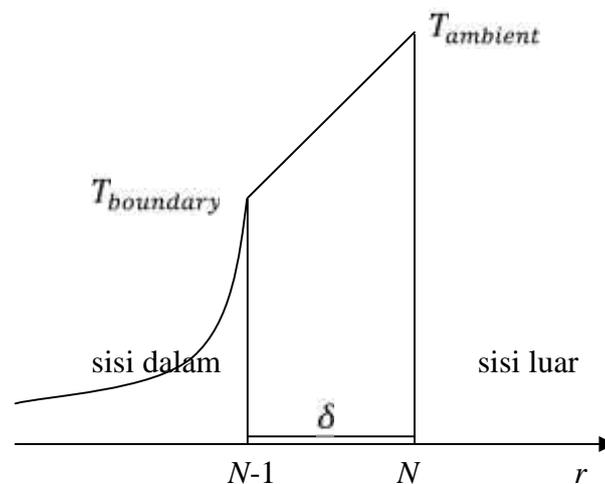
Dalam proses perpindahan panas, bagian yang paling luar akan mengadakan kontak langsung terhadap sumber panas. Bagian yang paling luar disebut sebagai batas luar dan panas dari luar disebut temperatur lingkungan ($T_{ambient}$). Misalkan pada permukaan benda yang berbentuk silinder terdapat suatu lapisan yang tipis (*film*) dengan ketebalan δ . Jika indeks i menyatakan bagian dalam dan indeks o bagian luar, maka dengan menggunakan prinsip keseimbangan panas $\phi_{masuk} = \phi_{keluar}$, dimana ϕ_{masuk} adalah hasil kali antara konduktivitas panas dari luar dengan selisih temperatur lingkungan ($T_{ambient}$) dan temperatur pada syarat batas ($T_{boundary}$) dibagi dengan ketebalan lapisan tipis (*film*) yang merupakan gradien temperatur di permukaan (lihat Gambar 2.6). Secara matematik dirumuskan dalam berikut :

$$\begin{aligned}
 -\lambda_i \frac{\partial T}{\partial r} \text{ boundary} &= \frac{\lambda_o}{\delta} T_{boundary} - T_{ambient} \\
 \frac{\partial T}{\partial r} \text{ boundary} &= \frac{\lambda_o}{\lambda_i \delta} T_{ambient} - T_{boundary}
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

dengan λ_o : konduktivitas panas dari luar,

λ_i : konduktivitas panas dari dalam,

δ : ketebalan lapisan tipis/kaleng.



Gambar 2.6 Sketsa Perpindahan Panas pada Syarat Batas Luar

2.7 Dasar Pasteurisasi

Dasar pasteurisasi adalah ketahanan bakteri patogen *Mycobacterium tuberculosis* yang dianggap resisten terhadap pemanasan. Atas dasar ini proses pasteurisasi dilakukan pada suhu 140°F selama 30 menit atau 160°F selama 15 detik, ternyata dengan standar pemanasan tersebut masih ada bakteri patogen yang belum dapat dimusnahkan yaitu *Coxiella burnetii* yang menyebabkan *Q fever*. Oleh karena itu standar suhu pemanasan pada proses pasteurisasi ditingkatkan.

Pasteurisasi adalah pemanasan susu pada suhu dan waktu tertentu, dengan tujuan membunuh bakteri patogen dan tidak mengubah cita rasa serta komposisi susu. Produk olahan susu dari suatu perusahaan susu, sangat tergantung dari keadaan susu segar sebagai bahan dasar, terutama mikrobiologi disini pengawasan harus ketat. Setelah proses pasteurisasi sebaiknya susu segera didinginkan dengan tujuan untuk menghambat pertumbuhan mikroorganisme yang masih hidup dan mencegah rekontaminasi. Dalam usaha pengawetan atau mempertahankan kualitas susu, maka dilakukan pengolahan susu, untuk menghilangkan atau menginaktifkan mikroorganisme dengan cara pemanasan dan pada umumnya dengan pasteurisasi.

Proses pasteurisasi sepertinya sederhana, tetapi dari segi teknik banyak yang harus diperhatikan yaitu :

- 1) Disain alat, agar alat efisien baik dalam proses pemanasan ataupun pendinginan, dan dicegah adanya kebocoran pada klep, ujung mati dan menjamin lancarnya aliran selama proses pasteurisasi.
- 2) Mencegah terjadinya buih selama proses, buih yang terbentuk pada permukaan susu biasanya mempunyai suhu lebih rendah dari bagian lain, sehingga dimungkinkan bakteri yang berada dalam buih tidak musnah, oleh sebab itu diusahakan selama proses pasteurisasi tidak terjadi buih.
- 3) Pengisian susu yang akan dipasteurisasi sebaiknya mempunyai permukaan lebih rendah dan air panas pada dinding pemanas,
- 4) Catatan suhu atau pengamatan pada termometer selama proses,
- 5) Sanitasi peralatan dan niang perlu diperhatikan.

2.8 Metode Pasteurisasi Pengalengan Susu

Metode pasteurisasi ada dua macam *batch pasteurization* sering disebut dengan *holding system* atau *low temperature long time* (LTLT) dan *flash pasteurization* atau sering disebut dengan *high temperature short time* (HTST), kemudian berkembang menjadi *ultra high temperature* (UHT), ada pula pasteurisasi dengan cara *vacuum*.

LTLT, pemanasan ini biasanya tidak langsung ke susu tetapi dengan sistem transfer panas. Menggunakan dinding rangkap baik untuk pemanasan ataupun untuk pendinginan. Suhu menggunakan suhu rendah dengan waktu yang lama (62°C selama 30 menit), pemanasan tidak boleh lebih dari 66°C karena di atas suhu tersebut akan timbul *flavor* dan mengurangi tebal lapisan krim.

HTST, adalah pemanasan pada suhu tinggi waktu singkat, suhu 71,7°C selama 15 detik, diharapkan pada pasteurisasi ini bebas dari *Mycobacterium tuberculosis*, berpengaruh kecil terhadap gizi dan flavor. Pemanasan dengan penghantar panas berupa plat atau air panas.

Standar susu pasteurisasi menyesuaikan dengan standar nasional dari Badan Standarisasi Nasional - BSN. SNI 01-3951-1995 meliputi syarat mutu, cara pengujian mutu, cara pengambilan contoh dan cara pengemasan susu pasteurisasi.