BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Deret Fourier

Dalam bab ini akan dibahas mengenai deret dari suatu fungsi periodik. Jenis fungsi ini sering muncul dalam berbagai persoalan fisika, seperti getaran mekanik, arus listrik bolak balik (AC), gelombang bunyi, gelombang elektromagnetik, hantaran panas dan sebagainya. Sama halnya pada uraian deret taylor, fungsi-fungsi periodik yang rumit dapat dianalisa secara sederhana yang dibangun oleh fungsi $sin\, x$ dan $cos\, x$ atau fungsi eksponensial. Uraian deret fungsi periodik ini disebut uraian Deret Fourier. Istilah ini digunakan untuk menghargai jasa matematikawan Perancis yang bernama Joseph Fourier, beliau adalah orang yang pertama merumuskan deret ini dalam sebuah makalah mengenai hantaran panas yang dilaporkannya kepada akademi ilmu pengetahuan perancis pada tahun 1807.

2.1.1 Fungsi Periodik

Fungsi f dikatakan *fungsi periodik* bila terdapat $p > 0$ sedemikian hingga untuk setiap x berlaku $f(x+p) = f(x)$. Nilai $p > 0$ terkecil yang memenuhi $f(x+p) = f(x)$. Untuk setiap x disebut periodik dari fungsi f.

Contoh-contoh

1. Fungsi-fungsi $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$ adalah fungsi periodik dengan periode 2π.
2. Fungsi-fungsi $F(x) = \sin(nx)$ dan $G(x) = \cos(nx)$, $n = 1,2, \ldots..$ adalah juga fungsi periodik dengan periode $2\pi/n$.
3. Fungsi $H(x) = \mathrm{tg}\, x$ adalah periodik dengan periode π.

2.1.2 Model Deret Fourier

Misalkan f adalah fungsi periodik dengan periode 2 L yang didefinisikan pada interval $-L, L$. Deret fourier dari f adalah:

$$f\ \ x\ \ = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\ \ a_n cos\ \ \frac{n\pi x}{L}\ \ + b_n sin\ \ \frac{n\pi x}{L} \quad (2.1)$$

Dimana koefisien-koefisien Fourier a_n dan b_n adalah

$$a_n = \frac{1}{L}\ \ {}_{-L}^{L} f\ \ x\ \ \cos\ \ \frac{n\pi x}{L}\ \ dx, n = 0,1,2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\ \ {}_{-L}^{L} f\ \ x\ \ \sin\ \ \frac{n\pi x}{L}\ \ dx, n = 1,2, \ldots$$

2.2 Fungsi Analisis Data

Fungsi Analisis Data diwakilkan oleh suatu kombinasi linear fungsi dasar yang dapat ditulis sebagai berikut:

$$f\ \ t\ \ = \sum_{k=1}^{K} \beta_k X_k\ \ t \quad (2.2)$$

Dengan β_k adalah koefisien fungsi dasar, X_k adalah fungsi dasar ke *k* yang diketahui pada sebarang waktu *t* dan *K* adalah maksimum bilangan dasar yang digunakan.

Dua fungsi dasar yang sering digunakan adalah Fourier dan B-spline. Asas Fourier digunakan untuk data yang berpriodik sedangkan B-spline digunakan untuk data yang tidak berperiodik. Data hujan adalah data yang digolongkan pada data yang berperiodik oleh sebab itu fungsi dasar fourier adalah fungsi yang paling tepat digunakan untuk penelitian ini. Fungsi Dasar fourier dapat dikembangkan seperti berikut:

$$f\ \ t\ \ = \beta_0 + \beta_1\, sin\, \omega t + \beta_2 \cos \omega t + \beta_3 \sin 2\omega t + \beta_4 \cos 2\omega t + \cdots \quad (2.3)$$

dengan fungsi dasarnya adalah $X_0\ \ t\ \ = 1, X_{2k-1}\ \ t\ \ = \sin k\omega t, X_{2k}\ \ t\ \ = \cos k\omega t$ dan parameter ω menentukan periodik yang diselidiki $2\pi/T$. Fungsi Dasar Fourier selalu mempunyai bilangan dasar yang ganjil, yaitu fungsi konstanta ditambah dengan fungsi dasar sinus dan kosinus. Koefisien dasar Fourier β_k dapat ditentukan dengan menggunakan metoda kuadrat terkecil

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X'X^{-1}X'y}$$

dengan **β** adalah vektor dari koefisien β_k sedangkan matrik X merupakan nilai dasar X_k t yang ditulis sebagai:

$$\mathbf{X} = \begin{matrix} 1 & sin\,\omega t_1 & cos\,\omega t_1 \ldots & sin\,k\omega t_1 & cos\,k\omega t_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \ldots & \vdots & \vdots \\ 1 & sin\,\omega t_T & cos\,\omega t_T \ldots & sin\,k\omega t_T & cos\,k\omega t_T \end{matrix}$$

2.3 Analisis Regresi

Analisis regresi digunakan untuk menggambarkan garis yang menunjukan arah hubungan antar variabel, serta dipergunakan untuk melakukan prediksi. Analisa ini dipergunakan untuk menelaah hubungan antara dua variabel atau lebih, terutama untuk menelusuri pola hubungan yang modelnya belum diketahui dengan sempurna. Regresi yang terdiri dari satu variabel bebas (*predictor*) dan satu variabel terikat (*Response/Criterion*) disebut regresi linier sederhana (*bivariate regression*), sedangkan regresi yang variabel bebasnya lebih dari satu disebut Regresi Berganda (*Multiple regression/multivariate regression),* yang dapat terdiri dari dua prediktor (regresi ganda) maupun lebih. Analisis regresi merupakan salah satu analisis statistika yang sering digunakan untuk menganalisa hubungan antara dua variabel atau lebih. Hubungan yang didapat pada umumnya dinyatakan dalam bentuk persamaan matematika yang menyatakan hubungan fungsional antara variabel bebas (independen variabel) x dan variabel tak bebas (dependen variabel) y.

Definisi 2.1 (Mendenhall & Mc Clave, 1996) Analisis regresi merupakan suatu cabang metodologi statistika (statistical methodology) mengenai hubungan sebuah reaksi y terhadap sekelompok variabel bebas atau *predictor* $x_1, x_2, \dots, x_k$. secara umum model regresi linear dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$y_i = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + \cdots b_kX_k + \varepsilon \tag{2.4}$$

Keterangan:

y_i adalah variabel tidak bebas untuk pengamatan ke-i, untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

$b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$ adalah parameter.

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_k$ adalah variabel bebas

ε adalah sisa *(error)*

2.3.1 Analisis Regresi sederhana

Ciri dari regresi linear sederhana yaitu:

a. Hanya melibatkan satu variabel bebas dan satu variabel terikat.
b. Perubahan yang terjadi pada variabel bebas digunakan untuk memprediksi perubahan pada variabel terikat.

Adapun model regresi linear sederhana yaitu sebagai berikut:

$$\hat{y} = a + bx$$

a dan b disebut koefisien regresi yang nilainya ditentukan dari data, sedangkan $\hat{y}$ menyatakan prediksi (taksiran) dari y.

2.3.2 Analisis Regresi Berganda

Bentuk umum model regresi linier berganda dengan *p* variabel bebas adalah seperti pada persamaan berikut (Kutner, Nachtsheim dan Neter, 2004).

$$y_i = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \cdots b_kX_k + \varepsilon$$

1. Asumsi-asumsi model regresi linear berganda

   Menurut Gujarati (2003) asumsi-asumsi pada model regresi linier berganda adalah sebagai berikut:

a. Model regresinya adalah linier dalam parameter.
b. Nilai rata-rata dari *error* adalah nol.
c. Variansi dari *error* adalah konstan (homoskedastik).
d. Tidak terjadi autokorelasi pada *error*.
e. Tidak terjadi multikolinieritas pada variabel bebas.
f. *Error* berdistribusi normal.

2. Estimasi parameter model regresi linear berganda

Estimasi parameter ini bertujuan untuk mendapatkan model regresi linier berganda yang akan digunakan dalam analisa. Metode yang digunakan untuk mengestimasi parameter model regresi linier berganda adalah Metode Kuadrat Terkecil atau sering juga disebut dengan metode *ordinary least square* (OLS). Metode OLS ini bertujuan meminimumkan jumlah kuadrat *error*. Berdasarkan persamaan (2.4) dapat diperoleh penaksir (*estimator*) OLS untuk $\hat{\beta}$ adalah sebagai berikut (Kutner, *et.al*., 2004):

$$\hat{\beta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y \qquad (2.5)$$

Penaksir OLS pada persamaan (2.5) merupakan penaksir yang tidak bias, linier dan terbaik (*best linear unbiased estimator*/BLUE) (Sembiring, 2003; Gujarati, 2003; Greene, 2003 dan Widarjono, 2007).

2.3.3 Metode Kuadrat Terkecil

Salah satu metode penduga parameter dalam model regresi adalah metode kuadrat terkecil. Metode ini memerlukan beberapa asumsi klasik yang harus dipenuhi oleh komponen ε, yaitu memenuhi asumsi kenormalan, kehomogenan ragam, dan keacakan (tidak memiliki autokorelasi).

Metode kuadrat terkecil merupakan suatu metode untuk menaksir parameter regresi dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat kekeliruan (error) dari model regresi yang terbentuk.

Jumlah kuadrat kekeliruan (error) untuk persamaan regresi linear berganda yaitu:

$$J = \sum_{i=1}^{n} e_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} \; Y_i - \hat{Y}_i \;\; ^2 = \sum_{i=1}^{n} \; y_i - a - bx_i \;\; ^2 \qquad (2.6)$$

Perhatikan bahwa J sama dengan bentuk $\sum_{i=1}^{n} e_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} \; Y_i - \hat{Y}_i \;\; ^2$. Dalam persamaan (2.6), x_i dan y_i bilangan yang berasal dari pengamatan sedangkan α dan β berubah bila garis regresinya berubah. Dari segi kalkulus, ini berarti kita perlu mencari turunan J terhadap α dan β kemudian menyamakannya dengan nol. Jadi, bila J diturunkan terhadap α maka diperoleh

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = -2\sum_{i=1}^{n} \; y_i - \alpha - \beta x_i \;\; = 0$$

Atau

$$\sum y_i - n\alpha - \beta \sum xi = 0 \qquad (2.7)$$

Selanjutnya, turunkan J terhadap β dan samakan dengan nol,

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = -2\sum_{i=1}^{n} \; y_i - \alpha - \beta x_i \;\; x_i = 0$$

Atau

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i - \beta \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} = 0 \qquad (2.8)$$

Sekarang gantilah nilai α dan β pada persamaan (2.7) dan (2.8) dengan masing-masing taksirannya, a dan b. persamaan (2.7) dan (2.8) kemudian menjadi suatu sistem persamaan linear, disebut Persamaan Normal.

$$\sum_{i=1}^{n} a + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad (2.9)$$

Bila kita nyatakan $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$ dan $\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{n}$ maka, persamaan yang pertama dari (2.9) memberikan

$$a = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{n} - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n} = \bar{y} - b\bar{x} \qquad (2.10)$$

Dengan demikian bagian kedua (2.9) menjadi

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} = 0$$

Atau,

$$\sum y_i x_i - \quad \sum \frac{y_i}{n} - b \sum \frac{x_i}{n} \quad \sum x_i \quad - b \sum x_i{}^2 = 0$$

Atau,

$$\sum y_i x_i - \sum y_i \quad \frac{\sum x_i}{n} \quad - b \quad \sum x_i{}^2 - \frac{\sum x_i{}^2}{n} \quad = 0.$$

Jadi,

$$b = \frac{\sum y_i x_i - \frac{\sum y_i \ \sum x_i}{n}}{\sum x_i{}^2 - \frac{\sum x_i{}^2}{n}}$$

Rumus ini dapat disederhanakan menjadi

$$b = \frac{\sum y_i x_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i{}^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum y_i x_i - \bar{x}\sum y_i - \bar{y}\sum xi + n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i{}^2 - 2\bar{x}\sum xi + n\bar{x}^2} = \frac{\sum \ x_i - \bar{x} \ \sum \ y_i - \bar{y}}{\sum \ x_i - \bar{x} \ ^2} \tag{2.11}$$

Seterusnya, untuk mendapatkan koefisien pada persamaan regresi linear berganda, metode kuadrat terkecil akan digunakan untuk mendapatkan koefisien $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ pada regresi berganda berikut:

Misalkan penaksir dari $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ kita nyatakan dengan b_0, b_1, dan b_2. Menurut metode kuadrat terkecil penaksir tersebut dapat diperoleh dengan meminimumkan bentuk kuadrat,

$$J = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n} \ y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i1} \ ^2. \tag{2.12}$$

Seperti pada pembahasan sebelumnya, minimum itu diperoleh dengan mencari turunan J terdadap $\beta_0, \beta_1,$ dan β_2 langsung diganti dengan penaksiran b_0, b_1, dan b_2.

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_0} = -2\sum \ y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i1} \ = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_1} = -2\sum \ y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2} \ x_{i1} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \beta_2} = -2\sum \ y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \beta_2 x_{i2} \ x_{i2} = 0. \tag{2.13}$$

Atau, sesudah disederhanakan dan mengganti koefisien regresi dengan penaksirnya,

$$nb_0 + b_1 \sum x_{i1} + b_2 \sum x_{i2} = \sum y_i$$

$$b_0 \sum x_{i1} + b_1 \sum x_{i1}^2 + b_2 \sum x_{i1} x_{i2} = \sum y_i x_{i1}$$

$$b_0 \sum x_{i2} + b_1 \sum x_{i1} x_{i2} + b_2 \sum x_{i2}^2 = \sum y_i x_{i2}. \quad (2.14)$$

Untuk menaksir koefisien regresinya kita menggunakan matriks dibawah ini:

$$X = \begin{matrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{matrix} \qquad \acute{X} = \begin{matrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \ldots & x_{nn} \end{matrix}$$

$$b = \begin{matrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \qquad Y = \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix} \quad (2.15)$$

Langkah-langkah dalam perhitungan menggunakan matriks yaitu:

1. Bentuk matriks A, b, dan g

$$A = \acute{X}X \begin{matrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{matrix} \qquad b = \begin{matrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{matrix} \qquad g = \acute{X}Y = \begin{matrix} \sum Y_i \\ \sum X_{1i} Y_i \\ \sum X_{ni} Y_i \end{matrix}$$

Bentuk persamaan normal dalam bentuk matriks

Ab = g

$$\acute{X}Xb = \acute{X}Y$$

$$\begin{matrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{matrix} \begin{matrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{matrix} = \begin{matrix} \sum Y_i \\ \sum X_{1i} Y_i \\ \sum X_{ni} Y_i \end{matrix} \quad (2.16)$$

Selanjutnya matriks pada persamaan (2.16) dapat disederhanakan menjadi matriks berikut:

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{1i} Y_i \\ \sum X_{ni} Y_i \end{bmatrix}$$

Parameter b_0, b_1, b_2 adalah penduga nilai parameter $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$, sehingga matriks (15) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_{1i} Y_i \\ \sum X_{ni} Y_i \end{bmatrix} \qquad (2.17)$$

Dengan n adalah data jumlah pengamatan $i = 1, 2, \ldots, n$, x adalah variabel bebas, y adalah variabel tak bebas dan $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ adalah parameter dari persamaan regresi berganda.