BAB II

LANDASAN TEORI

Landasan teori terdiri atas beberapa teori pendukung yang akan dipergunakan dalam menyelesaikan konvergensi modifikasi metode king menggunakan fungsi kuadratik.

2.1 Orde Konvergensi

Kecepatan suatu metode konvergensi merupakan suatu ukuran keefektifan suatu metode numerik. Konvergensi adalah kecenderungan untuk memiliki galat (kesalahan), yang diakibatkan oleh pemenggalan, yang mendekati nilai nol. Orde konvergensi dari sebuah metode iterasi digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinier $f(x)=0$. Apabila suatu metode iterasi berorde dua maka metode iterasi ini akan konvergen secara kuadratik, dan apabila metode iterasi berorde tiga maka metode iterasi ini konvergen secara kubik, dan seterusnya. Definisi yang menerangkan tentang orde konvergensi adalah sebagai berikut:

Definisi 2.1 (Mathews, 1992) Misalkan terdapat sebuah bilangan konstanta $c \geq 0$, bilangan bulat $n_0 \geq 0$, untuk semua $n > n_0$ dan $p \geq 0$ maka barisan $\{x_n\}$ dikatakan konvergen ke $\sim$ dengan orde konvergensi p, jika memenuhi ketentuan

$$|x_{n+1} - \sim| \leq c|x_n - \sim|^p \tag{2.1}$$

Jika $p = 2$ atau 3 maka metode hampiran memiliki orde konvergensi kuadratik atau kubik, dan seterusnya. Apabila notasi $e_n = x_n - x$ merupakan notasi untuk nilai tingkat kesalahan pada iterasi ke-*n* pada suatu metode yang menghasikan suatu barisan $\{x_n\}$, maka suatu persamaan

$$e_{n+1} = ce_n^p + O(e_n^{p+1}), \tag{2.2}$$

disebut sebagai persamaan tingkat kesalahan, sedangkan nilai *p* pada persamaan (2.2) menunjukan orde konvergensinya.

Selanjutnya untuk menegaskan tingkat orde konvergensi suatu metode iterasi, bisa dilakukan dengan metode *Computational Order of Convergence* (COC).

Definisi 2.2 Computational Order Of Convergence (Werakoon, 2000).

Misalkan $\sim$ adalah akar dari $f(x)$, dan andaikan x_{n+1}, x_n dan x_{n-1} berturut-turut alalah iterasi yang dekat dengan $\sim$. Maka, *Computational Order of Convergence* (COC) $\circ$ dapat diaproksimasikan dengan menggunakan rumus

$$\circ \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1}-\sim)/(x_n-\sim)\right|}{\ln\left|(x_n-\sim)/(x_{n-1}-\sim)\right|} \tag{2.3}$$

oleh karena $x_{n+1}-\sim = e_{n+1}$, maka persamaan (2.3) dapat ditulis kembali menjadi

$$\circ \approx \frac{\ln\left|(e_{n+1})/(e_n)\right|}{\ln\left|(e_n)/(e_{n-1})\right|} \tag{2.4}$$

Contoh 2.1 Diberikan fungsi $f(x)=x^3-3x+2$, dengan menggunakan metode Newton. Tentukan iterasi untuk menghampiri akar tunggalnya, dengan mengambil $\sim=-2$ dan konvergensinya, dengan nilai awal $x_0=-2{,}4$, toleransi kesalahan $e=10^{-14}$.

Penyelesaian:

Diketahui metode Newton memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Untuk itu dengan mengambil p = 2 yang menunjukan bahwa orde konvergensi pada $\{x_n\}$ adalah kuadratik, sehingga diperoleh:

Tabel 2.1 Hasil Iterasi dan COC Metode Newton dengan Akar Tunggal

Iterasi	x_n	e_n	*COC*
0	-2,400000000	0,400000000	1,841369970
1	-2,076190476	0,076190476	1,977127907
2	-2,003596011	0,003596011	1,999411292
3	-2,000008589	0,000008589	-
4	-2,000000000	0,000000000	-

Tabel 2.1 menunjukkan bahwa metode Newton dengan akar tunggal memiliki konvergensi kuadratik dengan $° \approx 2$.

Berdasarkan orde konvergensi dan banyaknya evaluasi fungsi yang digunakan suatu metode iterasi dapat ditentukan nilai *Efficiency Index*, yang nantinya bisa menunjukkan tingkat efisiensi suatu metode iterasi dalam menghampiri akar persamaan nonlinier.

Definisi 2.3 *Efficiency Index (I)* (Manoj Kumar Singh, 2009). Indeks efisiensi didefinisikan sebagai $p^{1/m}$, dimana p adalah orde konvergensi suatu metode dan m merupakan banyaknya evaluasi fungsi yang diperlukan suatu metode tersebut, termasuk turunannya.

Sebagai contoh, *Efficiency Index* untuk metode Newton adalah $\sqrt{2} \approx 1.414$, karena metode Newton memiliki orde konvergensi kuadratik dan memiliki dua evaluasi fungsi diantaranya $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$. Selanjutnya untuk metode Ostrowski memiliki *Efficiency Index* ialah $\sqrt[3]{4} \approx 1{,}587$, yang diperoleh dari metode Ostrowski sendiri memiliki konvergensi orde empat dan memiliki tiga evaluasi fungsi diantaranya $f(x_n)$, $f'(x_n)$ dan $f(y_n)$.

2.2 Deret Taylor

Deret taylor memegang peranan yang sangat penting dalam analisis numerik. Dengan deret taylor kita dapat menentukan nilai suau fungsi di titik x jika nilai fungsi dititk x_0 yang berdekatan dengan titik x diketahui. Teorema berikut ini dapat dipandang sebagai turunan dari teorema nilai rata-rata, yang memberikan rumus Taylor.

Teorema 2.1 Deret Taylor (Smith, 2002). Misalkan n adalah bilangan bulat positif dan fungsi f adalah fungsi yang terdiferensial hingga turunan ke- $n+1$ dengan f^{n+1} kontinu di semua nilai, maka

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x-c) + R_n(x) \tag{2.5}$$

dengan,

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\P)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1} \qquad (2.6)$$

Dimana terdapat titik ¶ antara x dan c.

Persamaan (2.6) merupakan galat dari persamaan taylor. Oleh karena itu, jika $p_n(x)$ adalah persamaan taylor maka,

$$p(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2!}f''(c)(x-c)^2 + \frac{1}{3!}f'''(c)(x-c)^3 + \dots$$

$$+\frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(x-c) \qquad (2.7)$$

Jadi persamaan (8) dapat ditulis lagi dalam bentuk

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x) \qquad (2.8)$$

Bukti : Misalkan sebuah polinimial berderajat n dengan fungsi f dan memiliki selang $(c-r, c+r)$ dimana r > 0, maka untuk setiap $x \in (c-r, c+r)$ maka diperoleh:

$$f(x) = b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + b_3(x-c)^3 + \dots + b_n(x-c)^n$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n \qquad (2.9)$$

Jika $f(x)$ diturunkan secara berurutan mulai dari $f'(x)$ sampai $f^n(x)$ maka diperoleh:

$$f'(x) = b_1 + 2b_2(x-c) + 3b_3(x-c)^2 + 4b_4(x-c)^3 + \dots + nb_n(x-c)^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} nb_n(x-c)^{n-1}$$

$$f''(x) = 2b_2 + 2\cdot 3b_3(x-c) + 3\cdot 4b_4(x-c)^2 + \dots + nb_n(n-1)(x-c)^{n-2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} nb_n(n-1)(x-c)^{n-2}$$

$$f'''(x) = 2\cdot 3b_3 + 2\cdot 3\cdot 4b_4(x-c) + \dots + nb_n(n-1)(n-2)(x-c)^{n-3}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} nb_n(n-1)(n-2)(x-c)^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = n!b_n$$

Subsitusikan $x = c$ maka,

$$f(x) = b_0$$
$$f'(x) = b_1$$
$$f''(x) = b_2$$
$$f'''(x) = b_3$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = n!b_n,$$

Sehingga,

$$b_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \tag{2.10}$$

Jika persamaan di atas ini disubstitusikan kedalam persamaan (2.6) maka:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Kemudian dapat diurai menjadi (2.5) yang disebut dengan deret taylor. Untuk itu membuktikan galatnya, defenisikan fungsi baru $R_n(x)$ pada ruang *I* dengan,

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

$$R_n(x) = f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) - \frac{1}{2!} f''(c)(x-2)^2 - \dots$$

$$- \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(x-n)^n \tag{2.11}$$

Misalkan x dan c konstanta, dan definisikan fungsi baru *h* pada ruang *I* dengan,

$$h(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{1}{2!} f''(t)(x-t)^2 - \dots - \frac{1}{n!} f^n(t)(x-t)^n$$

$$- R_n(x)\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-c)^{n+1}}$$

Subsitusikan t, maka $h(x) = 0$ dan

$$h(c) = f(x) - f(c) - f'(c)(x-c) - \frac{1}{2!} f''(c)(x-c)^2 - \ldots - \frac{1}{n!} f^n(c)(x-c)^n$$

$$- R_n(x)\frac{(x-c)^{n+1}}{(x-c)^{n+1}}$$

$$= f(x) - p_n(x) - R_n(x)$$
$$= R_n(x) - R_n(x) = 0$$

Oleh karena x dan c adalah titik pada ruang I yang menyebabkan $h(x) = h(c) = 0$, maka dapat digunakan Teorema Nilai Rata-rata untuk turunan. Karena itu, terdapat sebuah bilangan real $\P$ diantara x dan c sedemikian hingga $h'(\P) = 0$. Kemudian dengan menerapkan aturan perkalian dengan berulang kali, diperoleh turunan $h(t)$ dengan bentuk:

$$h'(t) = 0 - f'(t) - (f'(t)(-1) + (x-t) f''(t)) - \frac{1}{2!}[f''(t)(2)(x-t)(-1) + (x-t)^2$$

$$f'''(t)] - \ldots - \frac{1}{n!}(f^{(n)}(t)(n)(x-t)^{n-1}(-1) + f^{(n+1)}(t)(x-t)^n)$$

$$- R_n(x)\frac{(n+1)(x-t)^n(-1)}{(x-c)^{n+1}}$$

$$= -\frac{1}{n!}[f^{(n+1)}(t)(x-t)^n] - R_n(x)\frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-c)^{(n+1)}} \qquad (2.12)$$

Jadi, berdasarkan Teorema Nilai Rata-rata untuk turunan, terdapat suatu nilai $\P$ diantara x dan $\P$ sedemikian sehingga,

$$0 = g'(\P) = -\frac{1}{n!}(f^{(n+1)}(\P)(x-\P)^n) + R_n(x)\frac{(n+1)(x-\P)^2}{(x-c)^{n+1}}$$

Sehingga diperoleh,

$$R_n(x)\frac{(n+1)(x-\P)^2}{(x-c)^{n+1}} = \frac{1}{n!}(f^{(n+1)}(\P)(x-\P)^n)$$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}(f^{(n+1)}(\P)(x-\P)^n)\frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)(x-\P)^n}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\P)}{(n+1)!}(x-c)^{(n+1)} \qquad (2.13)$$

Jadi persamaan galat dari deret taylor terbukti.

2.3 Metode Newton dan Konvergensinya

Metode Newton merupakan metode yang paling sering digunakan diantara metode-metode pencarian akar persamaan yang lain. Metode ini sederhana, namun cukup handal dalam mendapatkan akar persamaan nonlinier. Metode Newton dan konvergensinya dapat diturunkan dari Deret Taylor Orde Pertama.

Misalkan fungsi *f* dapat diekspansi disekitar $x = x_n$ menggunakan deret taylor dengan x_n pendekatan $f(x) = 0$, jika $f(x)$ diekspansi di sekitar $x = x_n$ sampai orde pertama, maka diperoleh:

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) f'(x_n) \tag{2.14}$$

dengan $f(x_{n+1}) = 0$, sehingga persamaan (2.14) menjadi:

$$0 = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) f'(x_n)$$

$$(x_{n+1} - x_n) f'(x_n) = -f(x_n)$$

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.15}$$

persamaan diatas merupakan Metode Newton dan untuk menentukan orde konvergensinya dijelaskan pada teorema berikut.

Teorema 2.3 Misalkan $f(x)$ adalah fungsi bernilai rill yang mempunyai turunan pertama, kedua dan ketiga pada interval (*a*,*b*). Jika $f(x)$ mempunyai akar $\sim$ pada interval (*a*,*b*) dan x_0 adalah nilai tebakan awal yang cukup dekat ke $\sim$, maka metode iterasi pada persamaan (18) memenuhi persamaan error

$$e_{n+1} = C_2 e_n^2 + O(e_n^3)$$

di mana $e_n = x_n - \sim$ dan $C_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\sim)}{f'(\sim)}$ $k = 1,2,3,\cdots$

Bukti : Misalkan $\sim$ adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\sim)=0$. Asumsikan $f'(x)\neq 0$ dan $x_n=\sim+e_n$, dan dengan menggunakan rumus ekspansi Taylor untuk mengaproksimasi fungsi *f* di sekitar x_n, diperoleh

$$
\begin{aligned}
f(x_n) &= f(\sim+e_n)\\
&= f(\sim)+f'(\sim)e_n+\frac{1}{2!}f''(\sim)e_n^2+\frac{1}{3!}f'''(\sim)e_n^3+O(e_n^4) \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

karena $f(\sim)=0$, maka dengan melakukan manipulasi aljabar pada persamaan (2.16) diperoleh

$$
\begin{aligned}
f(x_n) &= f'(\sim)\left(e_n+\frac{1}{2!}\frac{f''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)}+\frac{1}{3!}\frac{f'''(\sim)e_n^3}{f'(\sim)}+\frac{O(e_n^4)}{f'(\sim)}\right)\\
&= f'(\sim)\left(e_n+\frac{1}{2!}\frac{f''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)}+\frac{1}{3!}\frac{f'''(\sim)e_n^3}{f'(\sim)}+O(e_n^4)\right)\\
&= f'(\sim)(e_n+c_2e_n^2+c_3e_n^3+O(e_n^4) \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

Jika untuk $f'(x_n)$ dilakukan ekspansi Taylor di sekitar $x=\sim$ maka

$$
\begin{aligned}
f'(x_n) &= f'(\sim)\left(1+\frac{f''(\sim)e_n}{f'(\sim)}+\frac{1}{2!}\frac{f'''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)}+\frac{O(e_n^3)}{f'(\sim)}\right)\\
&= f'(\sim)\left(1+\frac{f''(\sim)e_n}{f'(\sim)}+\frac{1}{2!}\frac{f'''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)}+O(e_n^3)\right)\\
&= f'(\sim)\left(1+2C_2e_n+3C_3e_n^2+O(e_n^3)\right) \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

Apabila persamaan (2.17) dibagi dengan persamaan (2.18) diperoleh

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= \frac{f'(\sim)\left(e_n+C_2e_n^2+C_3e_n^3+O(e_n^4)\right)}{f'(\sim)\left(1+2C_2e_n+3C_3e_n^2+O(e_n^3)\right)}\\
&= \frac{\left(e_n+C_2e_n^2+C_3e_n^3+O(e_n^4)\right)}{\left(1+2C_2e_n+3C_3e_n^2+O(e_n^3)\right)}\\
&= \left(e_n+C_2e_n^2+C_3e_n^3+O(e_n^4)\right)\times(1-\left(2C_2e_n+3C_3e_n^2+O(e_n^3)\right)\\
&\quad +\left(2C_2e_n+3C_3e_n^2+O(e_n^3)\right)^2-\ldots\\
&= \left(e_n+C_2e_n^2+C_3e_n^3+O(e_n^4)\right)\times\left(1-\left(2C_2e_n+3C_3e_n^2+O(e_n^3)\right)+\left(4C_2^2e_n^2+\ldots\right)\right)\\
&= \left(e_n+C_2e_n^2+C_3e_n^3+O(e_n^4)\right)\times\left(1-2C_2e_n+\left(4C_2^2-3C_3\right)e_n^2+O(e_n^3)\right)
\end{aligned}
$$

$$= e_n - C_2 e_n^2 + O(e_n^3) \tag{2.19}$$

Selanjutnya persamaan (2.19) substitusikan ke persamaan (2.15) dan diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \left(e_n - C_2 e_n^2 + O(e_n^3)\right)$$

$$e_{n+1} + \sim \; = e_n + \sim - e_n + C_2 e_n^2 + O(e_n^3))$$

$$e_{n+1} = C_2 e_n^2 + O(e_n^3) \tag{2.20}$$

Jadi teorema 2 tentang persamaan orde metode newton terbukti dengan orde konvergensi kudratik.

2.4 Metode King dan Orde Konvergensi

Metode King merupakan metode yang ditemukan oleh F. King Richard pada tahun 1973 dalam jurnalnya yang berjudul *A Family of Fourth Order Methods for Nonlinier Equation* dengan bentuk

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(x_n) + \quad f(y_n)}{f(x_n) + (\quad - 2) f(y_n)} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \tag{2.21}$$

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.22}$$

Misalkan *f* (x) = 0 dan $\sim$ adalah akar dari fungsi *f* (x) tersebut, maka *f* $(\sim) = 0$ dan asumsikan bahwa $f\ (\sim) \neq 0$. Dengan menggunakan exspansi deret taylor untuk $f(x_n)$ disekitar $x = \sim$ diperoleh

$$f(x_n) = f(\sim + e_n)$$

$$= f(\sim) + f'(\sim)e_n + \frac{1}{2!} f''(\sim)e_n^2 + \frac{1}{3!} f'''(\sim)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.23}$$

Karena $f(\sim) = 0$ maka dengan melakukan manipulasi aljabar pada persamaan (2.23) diperoleh

$$f(x_n) = f'(\sim)(e_n + \frac{1}{2!} f''(\sim)e_n^2 + \frac{1}{3!} f'''(\sim)e_n^3 + O(e_n^4))$$

$$= f'(\sim)(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.24}$$

Sedangkan untuk $f'(x_n)$ dapat diperoleh dengan mengekpansi di sekitar $x = \sim$ sehingga

$$f'(x_n) = f'(\sim)(1 + \frac{f''(\sim)e_n}{f'(\sim)} + \frac{1}{2!}\frac{f'''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + O(e_n^3)$$

$$= f'(\sim)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3) \qquad (2.25)$$

untuk

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\sim)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4))}{f'(\sim)(1 + 2c_2e_n + c_3e_n^3 + O(e_n^3))} \qquad (2.26)$$

Sehingga

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$y_n = \sim + e_n - (e_n - c_2e_n^2 + 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 + O(e_n^4)) \qquad (2.27)$$

$$y_n = \sim + c_2e_n^2 - 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 + O(e_n^4)$$

Dan dengan mengekspansi $f(y_n)$ dengan deret Taylor dapat diperoleh :

$$f(y_n) = f'(\sim)(c_2e_n^2 + 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 + O(e_n^4)) \qquad (2.28)$$

Untuk persamaan

$$f(x_n) + \quad f(y_n) = f'(\sim)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3) + \quad f'(\sim)(c_2e_n^2 + 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= f'(\sim)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + \quad (c_2e_n^2 + 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (2.29)$$

$$= e_n f'(\sim)(1 + c_2e_n + c_3e_n^2 + \quad (c_2e_n + 2(c_2^2 - c_3)e_n^2 + O(e_n^3)$$

untuk

$$f(x_n) + (\quad - 2) f(y_n) = f'(\sim)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3) + (\quad - 2) f'(\sim)(c_2e_n^2 +$$

$$2(c_2^2 - c_3)e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= f'(\sim)(e_n - c_2e_n^2 + 5c_3e_n^3 + \quad c_2e_n^2 + 2\quad c_2^2e_n^3 - 2\quad c_3e_n^3 - 4c_2^2e_n^3 \qquad (2.30)$$

$$= e_n f'(\sim)(1 - c_2e_n + 5c_3e_n^2 + \quad c_2e_n + 2\quad c_2^2e_n^2 - 2\quad c_3e_n^2 - 4c_2^2e_n^2$$

Sehingga

$$\frac{f(x_n) + \quad f(y_n)}{f(x_n) + (\quad - 2) f(y_n)} = \frac{e_n f'(\sim)(1 + c_2e_n + c_3e_n^2 + \quad (c_2e_n + 2(c_2^2 - c_3)e_n^2 + O(e_n^3)}{e_n f'(\sim)(1 - c_2e_n + 5c_3e_n^2 + \quad c_2e_n + 2\quad c_2^2e_n^2 - 2\quad c_3e_n^2 - 4c_2^2e_n^2}$$

Maka, dengan menggunakan ekspansi deret dalam sehingga bentuk

$$\frac{f(x_n)+\quad f(y_n)}{f(x_n)+(\quad -2)f(y_n)} = (1+c_2e_n + c_3e_n^2 + \quad (c_2e_n + 2(c_2^2 - c_3)e_n^2 + O(e_n^3))$$

$$\times (1 + c_2e_n - 5c_3e_n^2 - \quad c_2e_n - 2\quad c_2^2e_n^2 + 2\quad c_ne_n^3$$

$$+4c_2^2e_n^2 + (-c_2e_n + 5c_3e_n^2 + \quad c_2e_n + 2\quad c_2^2e_n^2 - 2\quad c_ne_n^3$$

$$-4c_2^2e_n^2)^2)$$

$$= e_n + 2c_2e_n^2 + \quad (-2c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (2.31)$$

Selanjutnya, dengan cara yang sama bagi persamaan (2.27) dengan persamaan (2.25) sehingga di peroleh:

$$\frac{f(y_n)}{f'(x_n)} = c_2e_n^2 + (2c_3 - 4c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (2.32)$$

selanjutnya dengan mengalikan persamaan (2.32) dengan persamaan (2.31) maka di peroleh:

$$\frac{f(x_n)+\quad f(y_n)}{f(x_n)+(\quad -2)f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f'(x_n)} = e_n + 2c_2e_n^2 + \quad (-2c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$\times (c_2e_n^2 + (2c_3 - 4c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4))$$

$$= c_2e_n^3 + (-2c_3 + 2c_2^2)e_n^4 + (-4c_2c_3)$$

$$+ \quad (-2c_3 + 2c_2^2)c_2))e_n^5 + o(e_n^6) \qquad (2.33)$$

Kemudian persamaan (2.27) dan persamaan (2.33) substitusikan ke dalam persamaan (2.21) dan di peroleh

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(x_n)+\quad f(y_n)}{f(x_n)+(\quad -2)f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}$$

$$= \sim + c_2e_n^2 - 2(c_2^2 - c_3)e_n^3 + O(e_n^4) - c_2e_n^3 + (-2c_3 + 2c_2^2)e_n^4$$

$$+ (-4c_2c_3 + \quad (-2c_3 + 2c_2^2)c_2))e_n^5 + o(e_n^6)$$

$$= \sim + c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3 - c_2)e_n^3 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^4 + (4c_2c_3$$

$$- \quad (2c_2^2 - 2c_3)c_2))e_n^5 + O(e_n^6) \qquad (2.34)$$

Dari persamaan (2.34), sehingga diperoleh orde konvergensi persamaan (2.21) adalah

$$x_{n+1} = \sim + c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3 - c_2)e_n^3 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^4 + O(e_n^5)$$

$$e_{n+1} + \sim = \sim + c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3 - c_2)e_n^3 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^4 + O(e_n^5)$$

$$e_{n+1} = \sim - \sim + c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3 - c_2)e_n^3 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^4 + O(e_n^5)$$

$$e_{n+1} = c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3 - c_2)e_n^3 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^4 + O(e_n^5) \tag{2.35}$$

2.5 Fungsi Kuadratik

Sebagaimana telah diketahui persamaan adalah sebuah pernyataan bahwa dua kuantitas setara dan menyelesaikan suatu persamaan berarti menentukan nilai-nilai dari faktor yang tidak diketahui nilainya. Nilai dari faktor-faktor yang tidak diketahui disebut sebagai akar dari persamaan. Persamaan kuadrat adalah persamaan pangkat yang tertinggi dari kuantitas yang tidak diketahui adalah 2. yang berbentuk

$$\text{¤}(x) = ax^2 + bx + c \tag{2.36}$$

Turunan pertama persamaan (2.36) yang menginterpolasi dititk $(x_n, f(x_n))$ adalah

$$\text{¤}'(x) = 2ax + b \tag{2.37}$$

Misalkan $x = x_n$ maka persamaan (2.37)

$$\text{¤}'(x_n) = 2ax_n + b \tag{2.38}$$

Berdasarkan persamaan (2.38) maka $\text{¤}'(x_n) = f'(x_n)$

Sehingga

$$\text{¤}'(x_n) = f'(x_n)$$

$$2ax_n + b = f'(x_n)$$

$$b = f'(x_n) - 2ax_n \tag{2.39}$$

Substitusikan persamaan (2.39) kedalam persamaan (2.37) diperoleh

$$\text{¤}'(x) = 2ax + f'(x_n) - 2ax_n$$