BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Distribusi Peluang

Definisi 2.1 (Walpole dan Myers, 1995) Jika X adalah suatu variabel random kontinu, maka fungsi densitas peluangnya adalah suatu fungsi yang memenuhi kondisi:

i. $f(x) \geq 0$; untuk $x \in (-\infty,\infty)$

ii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

iii. $p(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$ (2.1)

Definisi 2.2 (Walpole & Myers, 1989) Fungsi distribusi kumulatif variabel X dinotasikan sebagai F_x dan didefinisikan sebagai $F_x(x) = p(X \leq x)$ untuk seluruh x yang riil. Jika X adalah kontinu, maka :

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \quad (2.2)$$

2.2 Fungsi Quantil

Definisi 2.3: Misalkan F fungsi distribusi dari suatu distribusi probabilitas pada himpunan bilangan real R jika $\alpha \in (0,1)$ maka terdapat dengan tunggal $X_\alpha \in R$ sehingga $F(X_\alpha) = \alpha$ maka disebut kuantil- α dari F.Kuantil- α dari F digunakan notasi $F^{-1}(\alpha)$.

Fungsi kuantil dari F didefinisikan sebagai:

$$F^{-1}(\alpha) = \inf \{x \mid F(x) \geq \alpha\}$$

dengan $\alpha \in (0,1)$ artinya $F^{-1}(\alpha)$ adalah nilai terkecil dari x dengan $F(x) \geq \alpha$.

Misalkan x mempunyai distribusi F dan fungsi distribusi dari $y = a + bx$, maka dapat dinyatakan sebagai:

$$Fy(x) = F(b^{-1}(x - a)) \quad a \in R, b > 0$$

Sehingga fungsi quantil itu sering dikenal dengan istilah invers dari kumulatif.

2.3 Diskrit Binomial

Percobaan binomial adalah percobaan yang memiliki ciri-ciri berikut:

a. Percobaannya terdiri atas n ulangan.

b. Dalam setiap ulangan, hasilnya dapat digolongkan sebagai berhasil “P” atau gagal “Q” .

c. Peluang berhasil, yang dilambangkan dengan P, untuk setiap ulangan adalah sama, tidak berubah-ubah.

d. Ulangan-ulangan itu bersifat bebas.

Definisi 2.4 (Ari Pani Desvina, M.Sc, 2012) Jika suatu ulangan binomial mempunyai peluang keberhasilan P dan peluang gagal $q = 1 - P$, maka sebaran peluang bagi peubah acak binomial X, yaitu banyaknya keberhasilan dalam n ulangan yang bebas, adalah:

$$b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, untuk\ x = 0,1,2,\dots,n$$

2.4 Distribusi Peluang Kontinu

2.4.1 Distribusi Weibull

Distribusi Weibull diambil dari nama seorang fisikawan yang berasal dari Swedia bernama Waloddi Weibull pada Tahun 1939. Distribusi Weibull merupakan distribusi yang sering digunakan karena menggambarkan keseluruhan data secara jelas terutama dalam pengujian dan memodelkan data, sehingga distribusi Weibull sering diaplikasikan untuk pemodelan antara lain pemodelan dibidang teknologi, kecepatan angin, unsur-unsur kimia dan juga dibidang hidrologi. Karakteristik dari distribusi Weibull yaitu dicirikan oleh dua parameter yaitu m dan α, dimana $m > 0$ dan $\alpha > 0$ (Rinne, 2009).

Distribusi Weibull termasuk distribusi acak kontinu yang juga mempunyai fungsi densitas peluang sebagai berikut :

$$f(y) = \frac{c(x-a)^{c-1}}{b^c} e^{\frac{-(x-a)^c}{b^c}} \tag{2.3}$$

sedangkan fungsi distribusi kumulatifnya adalah :

$$F(y) = 1 - e^{\frac{-(x-a)^c}{b^c}} \tag{2.4}$$

2.4.2 Distribusi Peluang gamma

Difinisi 2.5 (Rado Yendra, M.Sc, 2008) Variabel acak Y dikatakan memiliki distribusi gamma dengan parameter $\alpha > 0$ *dan* $\theta > 0$ jika dan hanya jika fungsi densitas dari Y adalah

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{y^{\alpha-1} e^{-\frac{y}{\theta}}}{\theta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, & 0 \le y < \infty \\ 0, & untuk\ \ yang\ \ lainya \end{cases}$$

Dimana $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy$

Kuantitas $\Gamma(\alpha)$ dikenal dengan fungsi gamma. Integral secara langsung akan menghasilkan bahwa $\Gamma(1) = 1$. Dan secara terus-menerus integral akan menghasilkan bahwa $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$ $untuk\ \alpha > 1$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ dan juga yang dihasilkan jika n adalah bilangan bulat. Hal di atas dapat ditunjukkan seperti berikut:

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy \\ &= \left[-y^{\alpha-1} e^{-y}\right]_0^\infty + \int_0^\infty (\alpha-1)\, y^{\alpha-2} e^{-y}\, dy \\ &= (\alpha - 1)\int_0^\infty y^{\alpha-2} e^{-y}\, dy = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \end{aligned}$$

Contoh2.1 : Tentukan $\Gamma(6) = (6-1)! = 5$ x 4 x 3 x 2 x 1=120.

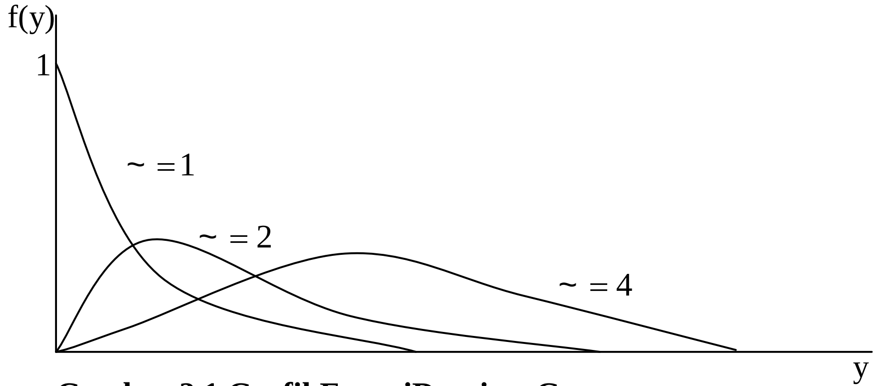
Selanjutnya akan dibuktikan bahwa fungsi densitas peluang distribusi gamma akan ditunjukkan memenuhi sifat distribusi peluang kontinu, seperti berikut :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dx = \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1} e^{\frac{-y}{\theta}}}{\Gamma(\alpha)\,\theta^{\alpha}}\, dy$$

$$misal\, x = \frac{y}{\theta}$$

$$\int_0^\infty \frac{(\theta x)^{\alpha-1} e^{-x}}{\Gamma(\alpha)\,\theta^{\alpha}}\, \theta\, dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = 1$$

Grafik fungsi densitas gamma untuk $\sim = 1,2$ *dan* 4 *serta* $= 1$, diberikan pada gambar berikut:



Gambar 2.1 GrafikFungsiDensitas Gamma

Gambar 2.1 menunjukkan bentuk dari densitas gamma berbeda untuk nilai $\sim$ yang berbeda. Untuk alasan ini kadang-kadang alpa disebut dengan parameter bentuk yang dihubungakan dengan distribusi gamma. Parameter secara umum disebut dengan parameter skala, karena mengalikan sebuah variabel acak yang didistribusikan dengan gamma dengan bilangan positif (dengan demikian mengubah skala pada pengukuran dibuat) menghasilkan variabel acak yang juga mempunyai distribusi gamma dengan nilai $\sim$ yang sama tetapi nilai parameter berubah.

Pada kasus tertentu ketika $\sim$ adalah bilangan bulat, distribusi fungsi dari variabel acak yang didistribusikan secara gamma dapat digambarkan sebagai jumlah dari peluang poisson tertentu. Jika $\sim$ tidak bilangan bulat dan $0 < c < d < \infty$, tidak memungkinkan untuk memberikan gambaran yang tepat untuk

$$ {}_{c}^{d} \frac{y^{\alpha-1} e^{\frac{-y}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma\ \alpha}\, dy $$

Teorema 2.1 (RadoYendra, M.Sc, 2008) Jika Y mempunyai distribusi gamma dengan parameter $\sim$ *dan* , maka

$$ « = E(Y) = \sim \quad dan\ \pm^{2} = V(Y) = \sim \quad {}^{2} $$

Bukti : Seperti yang diketahui bahwa

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y)\, dy = \int_{0}^{\infty} y \left[\frac{y^{\sim -1} e^{-\frac{y}{\ }}}{{}^{\sim}\Gamma(\sim)} \right] dy$$

Dari sifat yang telah dibuktikan sebelumnya diketahui bahwa

$$\int_{0}^{\infty} \frac{y^{\sim -1} e^{-y/}}{{}^{\sim}\Gamma(\sim)}\, dy = 1$$

Karena itu

$$\int_{0}^{\infty} y^{\sim -1} e^{-\frac{y}{\ }}\, dy = \ {}^{\sim}\Gamma(\sim)$$

Sehingga

$$E(Y) = \int_{0}^{\infty} y \left[\frac{y^{\sim -1} e^{-\frac{y}{\ }}}{{}^{\sim}\Gamma(\sim)} \right] dy = \frac{1}{{}^{\sim}\Gamma(\sim)} \int_{0}^{\infty} y^{\sim} e^{-\frac{y}{\ }}\, dy \qquad 2$$

$$= \frac{1}{{}^{\sim}\Gamma(\sim)} \left[\ {}^{\sim+1}\Gamma(\sim +1) \right] = \frac{\sim\Gamma(\sim)}{\Gamma(\sim)} = \sim$$

Selanjutnya untuk menentukan variansi distribusi gamma, tentukan terlebih dahulu nilai harapan berikut:

$$E\left(Y^{2}\right) = \int_{0}^{\infty} y^{2} \left[\frac{y^{\sim -1} e^{-\frac{y}{\ }}}{{}^{\sim}\Gamma(\sim)} \right] dy = \frac{1}{{}^{\sim}\Gamma(\sim)} \int_{0}^{\infty} y^{\sim +1} e^{-\frac{y}{\ }}\, dy$$

$$= \frac{1}{{}^{\sim}\Gamma(\sim)} \left[\ {}^{\sim+2}\Gamma(\sim +2) \right] = \frac{{}^{2}\sim(\sim +1)\Gamma(\sim)}{\Gamma(\sim)} = \sim(\sim +1)\ \ {}^{2}$$

Sehingga variansi distribusi gamma dapat ditentukan sebagai

$$V(Y) = E\left(Y^{2}\right) - [E(Y)]^{2}$$

$$= \sim(\sim +1)\ \ {}^{2} - (\sim\ \ )^{2} = \sim\ \ {}^{2}$$

2.4.3 DistribusiPeluang Beta

Fungsi densitas beta fungsi densitas berparameter dua didefinisikan pada interval tutup $0 \le y \le 1$. Ini sering digunakan sebagai model untuk proporsi, seperti proporsi ketakmurnian produk kimia atau proporsi waktu sebuah mesin diwaktu perbaikan.

Definisi 2.6 (RadoYendra, M.Sc, 2008) Variabel acak Y dikatakan mempunyai distribusi peluang beta dengan parameter $\sim > 0 \; dan \quad > 0$, jika dan hanya jika fungsi densitas dari Y adalah

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{y^{\sim -1}(1-y)^{\ \ -1}}{B(\sim ,\ \ )}, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & untuk\ lainnya \end{cases}$$

Dimana

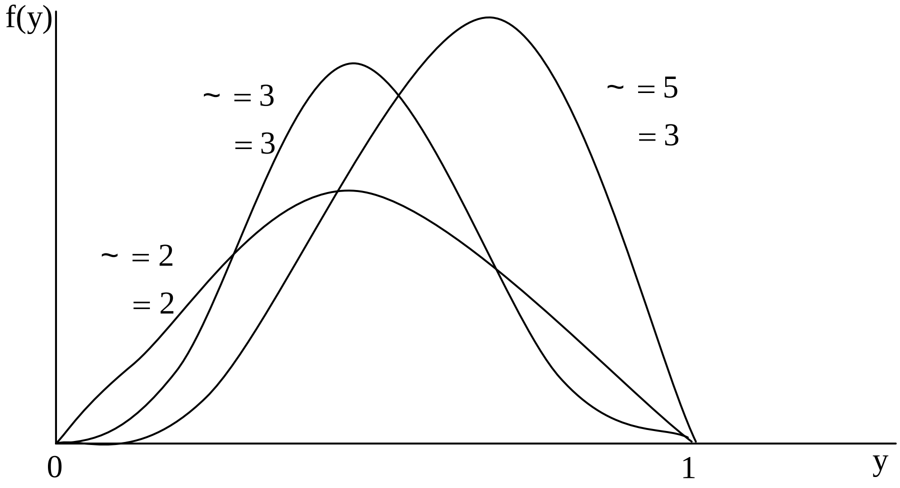
$$B(\sim ,\ \ ) = \int_0^1 y^{\sim -1}(1-y)^{\ \ -1}\, dy = \frac{\Gamma(\sim)\Gamma(\ \ )}{\Gamma(\sim + \ \ )}$$

Grafik fungsi densitas beta mengasumsikan perbedaan yang lebar dari bentuk untuk berbagai nilai dari dua parameter $\sim \; dan \quad$. Beberapa diantaranya akan digambarkan seperti pada gambar dibawah.

Sebagai catatan mendefinisikan y pada interval $0 \le y \le 1$tidak membatasi penggunaan distribusi beta. Jika $c \le y \le d$, maka $y^* = (y-c)/(d-c)$ mendefinisikan variabel baru sehingga $0 \le y^* \le 1$. Jadi fungsi densitas beta dapat dipakai untuk variabel acak yang didefinisikan pada interval $c \le y \le d$ dengan translasi dan pertukaran skala.

Fungsi distribusi kumulatif untuk variabel acak beta lazim disebut fungsi beta taklengkap dan dinotasikan dengan

$$F(y) = \int_0^y \frac{t^{\sim -1}(1-t)^{\ \ -1}}{B(\sim ,\ \ )}\, dt = I_y(\sim ,\ \ )$$



Gambar 2.2 Grafik Fungsi Densitas Beta

Jika $\sim$ *dan* kedua-duanya bilangan bulat positif, $I_y(\sim,\ )$ dihubungkan dengan fungsi peluang binomial. Integral dengan mempartisi dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa untuk $0 < y < 1$ dan kedua-duanya bilangan bulat

$$F(y) = \int_0^y \frac{t^{\sim-1}(1-t)^{\ -1}}{B(\sim,\ )}\, dt = \sum_{i=\sim}^{n} \binom{n}{i} y^i (1-y)^{n-i}$$

Dimana $n = \sim + \ -1$. Catat bahwa jumlah sisi sebelah kanan dari gambaran di atas hanya menjumlahkan peluang yang dihubungkan dengan variabel acak binomial dengan $n = \sim + \ -1$ dan $p = y$

Teorema 2.2 (RadoYendra, M.Sc, 2008) Jika Y adalah variabel acak yang didistribusikan dengan parameter $\sim > 0$ *dan* > 0 maka $« = E(Y) = \frac{\sim}{\sim +\ }$ dan

$$\pm^2 = V(Y) = \frac{\sim}{(\sim +\ )^2(\sim +\ +1)}$$

Bukti : Dengan definisi

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y)$$

$$= \int_0^1 y \frac{y^{\sim -1}(1-y)^{\;\,-1}}{B(\sim,\;\,)}\, dy$$

$$= \frac{1}{B(\sim,\;\,)} \int_0^1 y^{\sim} (1-y)^{\;\,-1}\, dy$$

$$= \frac{B(\sim +1,\;\,)}{B(\sim,\;\,)}$$

$$= \frac{\Gamma(\sim +\;\,)}{\Gamma(\sim)\Gamma(\;\,)} \times \frac{\Gamma(\sim +1)\Gamma(\;\,)}{\Gamma(\sim +\;\,+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\sim +\;\,)}{\Gamma(\sim)\Gamma(\;\,)} \times \frac{\sim\Gamma(\sim)\Gamma(\;\,)}{(\sim +\;\,)\Gamma(\sim +\;\,)} = \frac{\sim}{\sim +\;\,}$$

Untuk menentukan variansi dari distribusi beta, pertama sekali tentukan nilai harapan dari bentuk berikut

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y)$$

$$= \int_0^1 y^2 \frac{y^{\sim -1}(1-y)^{\;\,-1}}{B(\sim,\;\,)}\, dy$$

$$= \frac{1}{B(\sim,\;\,)} \int_0^1 y^{\sim +1} (1-y)^{\;\,-1}\, dy$$

$$= \frac{B(\sim +2,\;\,)}{B(\sim,\;\,)}$$

$$= \frac{\Gamma(\sim +\;\,)}{\Gamma(\sim)\Gamma(\;\,)} \times \frac{\Gamma(\sim +2)\Gamma(\;\,)}{\Gamma(\sim +\;\,+2)}$$

$$= \frac{\Gamma(\sim +\;\,)}{\Gamma(\sim)\Gamma(\;\,)} \times \frac{(\sim +1)\sim\Gamma(\sim)\Gamma(\;\,)}{(\sim +\;\,+1)(\sim +\;\,)\Gamma(\sim +\;\,)} = \frac{\sim(\sim +1)}{\sim +\;\,+1(\sim +\;\,)}$$

Sehingga variansi dari distribusi beta adalah

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$= \frac{\sim(\sim +1)}{(\sim +\;\,+1)(\sim +\;\,)} - \left[\frac{\sim}{\sim +\;\,}\right]^2 = \frac{\sim}{(\sim +\;\,)^2(\sim +\;\,+1)}$$

2.5 StatistikBerurut

Secara formal, misal $Y_{1,}Y_2, \ldots, Y_n$ variabel acak kontinu yang saling bebas dengan fungsi distribusi komulatif F(y) dan fungsi densitas f(y). Notasi variabel acak yang terurut Y_i yaitu $Y_{(1),}Y_{(2),} \ldots, Y_{(n)}$ dimana $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \ldots \leq Y_{(n)}$

$$Y_{(1)} = \min (Y_{1,}Y_2, \ldots, Y_n)$$

Adalah variabel acak minimum dari Yi

$$Y_{(n)} = \max (Y_{1,}Y_2, \ldots, Y_{n)}$$

Adalah variabel acak maksimum dari Y_i

Fungsi densitas peluang untuk Y_i dan Y_n dapat ditentukan dengan menggunakan metoda fungsi distribusi kumulatif. Pertama sekali kita akan menentukan fungsi densitas dari Y_n. Karena Y_n adalah maksimum dari $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, Maka peristiwa ($Y_{(n)} \leq y$) akan terjadi jika dan hanya jika ($Y_i \leq y$) terjadi, untuk setiap i = 1,2,. . .,n, yakni

$$P\left(Y_{(n)} \leq y\right) = P\left(Y_1 \leq y, Y_2 \leq y, \ldots, Y_n \leq y\right)$$

Karena Y_i adalah saling bebas dan $P\left(Y_i \leq y\right) = F\left(y\right)\ untuk\ i = 1,2,\ldots,n$, hal ini menyatakan bahwa fungsi distribusi kumulatif dari $Y_{(n)}$ diberikan oleh

$$F_{Y_n}\left(y\right) = P\left(Y_n \leq y\right) = P\left(Y_1 \leq y\right)P\left(Y_2 \leq y\right)\ldots P\left(Y_n \leq y\right) = \left(F\left(y\right)\right)^n$$

Misal $g_n(y)$ notasi fungsi densitas dari$Y_{(n)}$ dengan menurunkan fungsi distribusi kumulatif di atas akan ditentukan

$$g_{(n)}\left(y\right) = n\left[F\left(y\right)\right]^{n-1} f\left(y\right)$$

Dengan cara yang sama kita dapat menentukan fungsi densitas untuk $Y_{(1)}$ sebagai berikut:

$$F_{Y_{(1)}}\left(y\right) = P\left(Y_{(1)} \leq y\right) = 1 - P\left(Y_{(1)} > y\right)$$

Karena $Y_{(1)}$ adalah minimum dari $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, hal ini menyatakan bahwa peristiwa ($Y_{(1)} > y$) terjadi jika dan hanya jika peristiwa ($Y_i > y$) terjadi untuk i = 1,2,…,n. Karena Y_i saling bebas dan P ($Y_i > y$) = 1 – F(y) untuk i = 1,2,3,. . .,n, kita lihat bahwa

$$
\begin{aligned}
F_{Y_1} = P\left(Y_{(1)} \le y\right) &= 1 - P\left(Y_{(1)} > y\right) \\
&= 1 - P\left(Y_1 > y, Y_2 > y, \ldots, Y_n > y\right) \\
&= 1 - \left(P\left(Y_1 > y\right)P\left(Y_2 > y\right)\ldots P\left(Y_n > y\right)\right) \\
&= 1 - \left[1 - F(y)\right]^n
\end{aligned}
$$

Misal$g_{(1)}$ (y) adalah fungsi densitas dari $Y_{(1)}$, dengan menurunkan fungsi distribusi kumulatif akan diperoleh

$$g_{(1)}(y) = n\left[1 - F(y)\right]^{n-1} f(y)$$

Contoh 2.2.

Komponen-komponen elektronik dari tipe tertentu mempunyai panjang hidup Y, dengan densitas peluang diberikan oleh

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{100} e^{-y/100}, & y > 0 \\ 0, \; untuk \;\; yang \;\; lainnya & \end{cases}$$

Andaikan bahwa dua komponen dioperasikan secara bebas dan system dirangkai secara seri (karena system gagal ketika komponen lain gagal). Tentukan fungsi densitas untuk X.

Penyelesaian:

Karena system gagal pada komponen utama gagal X = min (Y_1,Y_2) dimana Y_1 dan Y_2 adalah variabel acak dengan diberikan fungsi densitas. Karena

$$
\begin{aligned}
&F(y) = 1 - e^{-y/100}, \; untuk \;\; y \ge 0 \\
&f_X(y) = g_{(1)}(y) = n\left[1 - F(y)\right]^{n-1} f(y) \\
&\qquad = \begin{cases} 2e^{-y/100}\left(1/100\right)e^{-y/100}, & y > 0 \\ 0, \quad untuk \;\; yang \;\; lainnya & \end{cases}
\end{aligned}
$$

Dan itu menyatakan secara sederhana bahwa

$$f_X(y) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{50}\right) e^{-y/50}, & y > 0 \\ 0, \; untuk \;\; yang \;\; lainnya & \end{cases}$$

Contoh 2.3.

Andaikan komponen di rangkai secara parallel (karena system tidak akan gagal sampai kedua komponen gagal). Tentukan fungsi densitas untuk X.

Penyelesaian :

Sekarang X = max (Y_1,Y_2) dan

$$f_X(y) = g_{(2)}(y) = n[F(y)]^{n-1} f(y)$$

$$= \begin{cases} 2\left(1-e^{-y/100}\right)(1/100)e^{-y/100}, & y>0 \\ 0, & untuk\ \ yang\ \ lainnya \end{cases}$$

dan oleh sebab itu

$$f_X(y) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{50}\right)\left(e^{-y/100} - e^{-y/50}\right), & y>0 \\ 0, & untuk\ \ yang\ \ lainnya \end{cases}$$

2.6 Peluang Moment Berbobot (PMB)

Definisi2.7 (Greenwood dan Kawan-kawan, 1979) Peluang moment berbobot di defenisikan sebagai:

$$M_{l,j,k} = E\ X^l F^j\ 1 - F\ ^k = {}_0^1 x\ F\ ^l F\ x\ ^j\ 1 - F\ x\ \ ^k dF\ x \qquad (2.5)$$

Dimana

$x\ F$ = fungsi kuantil atau invers distribusi

$F\ x$ = distribusi fungsi kumulatif

l, j, k = bilangan real.

Untuknilai$j = k = 0$ dan l adalah bilangan bulat tidak negatif,maka berdasarkan defenisi 2.10 dapat ditulis sebagai:

$$M_{l,0,0} = E\ x^l = {}_0^1 x\ F\ ^l\, dF\ x$$

Atau dikenalsebagai moment ke $-l$ suatu distribusi, dan jika $l = 1$ maka bentuk diatas adalah moment ke -1 atau rata-rata suatu distribusi fungsi, dengan bentuk seperti:

$$M_{1,0,0} = E\ x = {}_0^1 x\ F\ dF\ x$$

Untuk statistik berurut $x_1, x_2, \ldots, x_r, \ldots x_n$, diketahui distribusi fungsi kumulatif untuk ke r dengan sampel berukuran n.

$$F_{r,n}(x) = \sum_{i=r}^{n} \binom{n}{i} [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i} \tag{2.6}$$

Bentuk yang muncul setelah tanda $\sum_{i=r}^{n}$ adalah bentuk fungsi peluang binomial tepat ke–i untuk $x_1, x_2, \ldots, x_n$. David (1970) telah menghasilkan hubungan diantara penjumlahan binomial dan fungsi beta taklengkap.

$$F_{r,n}(x) = I_{F(x)}(r, n - r + 1) \tag{2.7}$$

Dimana

$I_p(\alpha,\beta) = \int_0^p \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt}{B(\alpha,\beta)}$ adalah fungsi beta taklengkap, sedangkan

$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1 - t)^{\beta-1}\,dt$ adalah fungsi beta untuk $\alpha > 0$, $\beta > 0$

Oleh sebabitu:

$$F_{r,n}(x) = \int_0^{F(x)} \frac{t^{r-1}(1-t)^{(n-r+1)-1}dt}{B(r,n-r+1)}$$

Maka

$$F_{r,n}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\int_0^{F(x)} t^{r-1}(1 - t)^{n-r}dt \tag{2.8}$$

Karena $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{(\alpha-1)!(\beta-1)!}{(\alpha+\beta-1)!}$

Seterusnya ambil turunan dari persamaan (2.13), yang merupakan fungsi densitas peluang dari $x_{r,n}$:

$$f_{r,n}(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\int_0^{F(x)} t^{r-1}(1 - t)^{n-r}dt\right]$$

$$f_{r,n}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-1)!}[F(x)]^{r-1}[1 - F(x)]^{n-r}f(x). \tag{2.9}$$

Berikutnya nilai ekspektasi dari $x_{r,n}$ dapatditulis:

$$E(x_{r,n}) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{r,n}(x)\,dx$$

$$E(x_{r,n}) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\int_0^1 x(F)[F(x)]^{r-1}[1 - F(x)]^{n-r}dF(x). \tag{2.10}$$

Dimana $f(x)\,dx = dF(x)$, $0 \leq F(x) \leq 1$

Dengan menggunakan bentuk ini, maka moment ke $-i$ untuk urutan ke r dari sampel berukuran n, dapat dihitung

$$E\left(x_{r,n}^{l}\right) = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-1)!}\int_{0}^{1} x(F)^{l} F(x)^{r-1}\left(1-F(x)\right)^{n-r} dF(x) \qquad (2.11)$$

Oleh sebab itu moment ke $-l$ untuk urutan ke -$(j+1)$ dari ukuran sampel $j+k+1$ dapat dihitung:

$$E\left(X_{j+1,j+k+1}^{l}\right) = \frac{(j+k+1)!}{j!k!}\int_{0}^{1} x(F)^{l} F(x)^{j}\left(1-F(x)\right)^{k} dF(x) \qquad (2.12)$$

Dari bentuk diatas maka bentuk peluang moment berbobot untuk statistik berurut, dapat dibentuk seperti:

$$M_{l,j,k} = \frac{j!k!}{(j+k+1)!} E\left(X_{j+1,j+k+1}^{l}\right) \qquad (2.13)$$

Dua bentuk peluang moment berbobot yang sangat perlu diperhatikan adalah untuk $l = 1,2$, $j = 0,1,2,3$, dan $k = 0$. Dua bentuk ini dapat ditentukan seperti:

$$M_{1,j,0} = \frac{1}{j+1} E\left(X_{j+1,j+1}\right) \qquad j = 0,1,2,\ldots \qquad (2.14)$$

$$M_{2,j,0} = \frac{1}{j+1} E\left(X_{j+1,j+1}^{2}\right) \qquad j = 0,1,2,\ldots \qquad (2.15)$$

2.7 Penentuan Perkiraan Untuk $M_{l,j,0}$

Andaikan n data untuk statistik berurut dari kecil kebesar $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(j)}, \ldots x_{(n)}$, dimana $x_{(n)}$ adalah data yang terbesar. Total jumlah pemilihan sampel bagian urutan $j+1$ dari n adalah:

$$N = \binom{n}{j+1} \qquad (2.16)$$

Jumlah sampel bagian berukuran $(j+1)$ dipilih dari n yang memuat $x_{(i)}$ sebagai data terbesar, maksudnya $x_{(i)}$ adalah anggota dari subsampel dan anggota lain harus dipilih dari data yang lebih kecil, $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(i-1)}$. Oleh sebab itu jumlah subsampel yang memuat $x_{(i)}$ sebagai anggota terbesar adalah:

$$N_i = \binom{i-1}{j} \tag{2.17}$$

Seterusnya dapat dibentuk

$$\frac{N_i}{N} = \frac{\binom{i-1}{j}}{\binom{n}{j+1}} \tag{2.18}$$

Maka dapat dihasilkan, rumus moment ke $-l$ untuk statistik berurut ke $(j+1)$ dari subsampel berukuran $(j+1)$ yang dipilih dari n adalah

$$E\left(\hat{x}^{l}{}_{j+1,j+1}\right) = \sum_{i=j+1}^{n} x^{l}{}_{i} \frac{\binom{i-1}{j}}{\binom{n}{j+1}} \tag{2.19}$$

Berdasarkan bentuk diatas dapat dihasilkan bentuk umum peluang moment berbobot untuk sampel adalah:

$$\widehat{M}_{l,j,0} = \frac{1}{j+1} E\left(x^{l}{}_{j+1,j+1}\right)$$

$$= \frac{1}{j+1}\sum_{i=j+1}^{n} x^{l}{}_{i} \left(\frac{\binom{i-1}{j}}{\binom{n}{j+1}}\right)$$

$$= \sum_{i=j+1}^{n} x^{l}{}_{i} \left(\frac{1}{j+1}\right)\left(\frac{\frac{(i-1)!}{(i-j-1)!\,j!}}{\frac{n!}{(n-j-1)!\,(j+1)!}}\right) \text{ dimana } \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\,\beta!}$$

$$= \sum_{i=j+1}^{n} x^{l}{}_{i} \left(\frac{1}{j+1}\right)\left(\frac{(i-1)!}{j!\,(i-j-1)!}\right)\left(\frac{(j+1)!\,(n-j-1)!}{n!}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=j+1}^{n} x^{l}{}_{i} \left(\frac{(i-1)!}{j!\,(i-j-1)!}\right)\left(\frac{j!\,(n-j-1)!}{(n-1)!}\right)$$

$$\widehat{M}_{l,j,0} = \frac{1}{n}\sum_{i=j+1}^{n} x^{l}{}_{i} \left(\frac{\binom{i-1}{j}}{\binom{n-1}{j}}\right). \tag{2.20}$$

Selanjutnya untuk membuktikan $\widehat{M}_{l,j,0}$, dari persamaan 2.20, sehingga nilainya menjadi:

$$E\left(\widehat{M}_{l,j,0}\right) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=j+1}^{n} x^{l}{}_{i} \left(\frac{\binom{i-1}{j}}{\binom{n-1}{j}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=j+1}^{n} x^{l}{}_{i} \left(\frac{\binom{i-1}{j}}{\binom{n-1}{j}}\right) E\left(x^{l}{}_{i}\right)$$

Kemudian dari persamaan (2.11),

$$E\left(\widehat{M}_{i,j,0}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=j+1}^{n} \frac{\frac{(i-1)!}{j!\,(i-j-1)!}}{\frac{(n-1)!}{(n-j-1)!\,j!}} \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}\int_0^1 x(F)^{i}\,F(x)^{i-1}\left(1-F(x)\right)^{n-i}\,dF$$

$$= \sum_{i=j+1}^{n} \frac{(n-j-1)!}{(i-j-1)!\,(n-1)!}\int_0^1 x(F)^{i}\,F(x)^{i-1}\left(1-F(x)\right)^{n-i}\,dF.$$

Jika $k = i - j - 1$ dan,sehingga, $i = k + j + 1$:

$$E\left(\widehat{M}_{i,j,0}\right) = \sum_{k=0}^{n-j-1} \frac{(n-j-1)!}{k!\,(n-k-j-1)!}\int_0^1 x(F)^{i}F(x)^{k+j}\left(1-F(x)\right)^{n-k-j-1}\,dF$$

$$= \sum_{k=0}^{n-j-1}\binom{n-j-1}{k}\int_0^1 x(F)^{i}F(x)^{k+j-j}\left(1-F(x)\right)^{n-k-j-1}$$

$$F(x)^{j}\,dF$$

$$= \int_0^1 x(F)^{i}\sum_{k=0}^{n-j-1}\binom{n-j-1}{k} F(x)^{k}\left(1-F(x)\right)^{n-k-j-1} F(x)^{j}\,dF$$

$$E\left(\widehat{M}_{i,j,0}\right) = \int_0^1 x(F)^{i}\,1\ F(x)^{j}\,dF.$$