BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

Definisi 2.1 (Lipschutz, 2006): Matriks $\boldsymbol{A}$ adalah susunan segiempat dari skalar-skalar yang biasanya dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix}$$

Setiap skalar yang terdapat dalam matriks disebut elemen matriks atau entri matriks. *Entri ij* atau *elemen ij*, muncul pada baris *i* dan kolom *j*. Biasanya matriks hanya ditulis sebagai $A = a_{ij}$. Suatu matriks dengan *m* baris dan *n* kolom disebut dengan matriks *m* kali *n*, ditulis $m \times n$. Pasangan bilangan *m* dan *n* disebut ukuran matriks.

2.2 Operasi Matriks

Adapun macam- macam operasi matriks diantaranya sebagai berikut:

a. Penjumlahan Matriks

Penjumlahan dua matriks dapat dilakukan jika ukuran-ukuran matriksnya sama. Misalkan $A = a_{ij}$ dan $B = b_{ij}$ adalah dua matriks yang ukurannya sama, misalnya $m \times n$. Jumlah A dan B ditulis $A + B$, adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan elemen-elemen yang bersesusaian dari A dan B yaitu:

$$A + B = \begin{matrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \ldots & a_{2n} + b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{matrix}$$

b. Perkalian Matriks

Definisi 2.2 (Lipschutz, 2006): Anggaplah $A = a_{ik}$ dan $B = b_{kj}$ adalah matriks-matriks yang sedemikian rupa sehingga banyaknya kolom dari A sama dengan banyaknya baris dari B; Misalnya, A adalah matriks yang berukuran

$m \times p$ dan B adalah matriks $p \times n$. Maka hasil kali AB adalah matriks yang berukuran $m \times n$ yang entri ij-nya diperoleh dengan cara mengalikan baris ke-i dari A dengan kolom ke-j dari B. Yaitu,

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ . & \cdots & . \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} \\ . & \cdots & . \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{matrix} \quad \begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ . & \cdots & . & \cdots & . \\ . & \cdots & . & \cdots & . \\ . & \cdots & . & \cdots & . \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{matrix} = \begin{matrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ . & \cdots & . \\ . & c_{ij} & . \\ . & \cdots & . \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{matrix}$$

dengan $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$

Hasil kali AB tidak dapat ditentukan jika A adalah matriks $m \times p$ dan B adalah matriks. $q \times n$, dimana $p \neq q$.

2.3 Invers Matriks

Definisi 2.3 (Anton, 2004): Jika A adalah sebuah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik (*invertible*) dan B dinamakan invers (*inverse*) dari A. Jika matriks B tidak dapat didefinisikan, maka A dinyatakan matriks singular.

Untuk mencari invers dari matriks $\mathbf{A}$ yang dapat dibalik, kita harus mencari suatu urutan operasi baris elementer yang mereduksi $\mathbf{A}$ menjadi identitas dan melakukan urutan operasi yang sama terhadap I untuk memperoleh A^{-1}, sehingga matriks akhir akan mempunyai bentuk $I|A^{-1}$.

Contoh 2.1 :

Tentukan invers matriks di bawah ini:

$$A = \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{matrix}$$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan operasi baris elementer maka invers matriks dapat ditentukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Kalikan baris pertama dengan (-1) dan tambahkan ke baris kedua

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Kalikan baris pertama dengan (6) dan tambahkan ke baris ketiga

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 6 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Kalikan baris kedua dengan (1) dan tambahkan ke baris pertama

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 6 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Kalikan baris kedua dengan (-4) dan tambahkan ke baris ketiga

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \end{matrix}$$

Kalikan baris ketiga dengan (-1)

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{matrix}$$

Kalikan baris ketiga dengan (1) dan tambahkan ke baris pertama

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{matrix}$$

Kalikan baris ketiga dengan (1) dan tambahkan ke baris kedua

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{matrix}$$

Sehingga diperoleh :

$$A^{-1} = \begin{matrix} -2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{matrix}$$

2.4 Matriks Diagonal

Sebuah matriks bujursangkar yang mempunyai elemen-elemen nol kecuali elemen-elemen pada diagonal utamanya disebut matriks diagonal (Gere, 1987). Contoh untuk matriks seperti ini adalah:

$$D = \begin{matrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{matrix}$$

Invers matriks diagonal dapat diperoleh dengan mudah, yaitu matriks diagonal lain yang elemen pada diagonal utamanya berkebalikan dengan elemen yang sepadan pada matriks asal, sehingga:

$$D^{-1} = \begin{matrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \end{matrix}$$

2.5 Sistem Persamaan Linear

Definisi 2.4 (Lipschutz, 2006): Persamaan linear dengan variabel tidak diketahui $x_1, x_2, \dots x_n$ adalah persamaan yang dapat disusun dalam bentuk standar:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

dengan $a_1, a_2, \dots a_n$ dan b adalah konstanta.

Definisi 2.5 (Lipschutz, 2006): Sistem persamaan linear adalah sekumpulan persamaan linear dengan variable-variabel tidak diketahui yang sama. Secara khusus, sistem persamaan linear yang terdiri dari m persamaan $L_1, L_2, \dots L_m$ dengan n variabel tidak diketahui $x_1, x_2, \dots x_n$, dapat disusun dalam bentuk standar

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{matrix}$$

dengan a_{ij} dan b_i adalah konstanta. Huruf a_{ij} adalak koefisien dari variable tidak diketahui x_j pada persamaan L_i dan b_i adalah konstanta dari persamaan L_i.

2.6 *Rank* Matriks

Definisi 2.6 (Ruminta, 2009): *Rank* dari suatu matriks berukuran $m \times n$ adalah jumlah maksimum dari vektor baris (kolom) yang bebas linear (*independen linear*). *Rank* dari suatu matriks merupakan dimensi dari vektor baris (kolom) *non-zero* pada matriks tersebut. $Rank$ matriks dapat digunakan untuk mengetahui apakah suatu matriks itu singular atau non singular. Jika A matriks bujur sangkar dengan dimensi $n \times n$, maka:

a. matriks A adalah non singular apabilah $rank\ A = n$
b. matriks A merupakan matriks singular apabila $rank\ A < n$

Solusi sistem persamaan (baik untuk yang non homogen ataupun homogen) mempunyai beberapa bentuk solusi. Keadaan solusi, bahkan ada atau tidaknya solusi dapat ditentukan dengan menyelidiki *rank* dari dua macam matriks. Matriks yang pertama adalah matriks koefisien A dari persamaan $Ax = y$ yang dinyatakan dengan A. Matriks kedua, disebut matriks lengkap, yaitu matriks yang dilengkapi oleh suatu kolom yang unsurnya diambil dari vektor ruas kanan B yang dinyatakan dengan A^b, yaitu:

$$A^b = \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} & B_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} & B_n \end{matrix}$$

Tabel 2.1 Syarat-syarat Solusi n Persamaan

Tipe Persamaan	**Syarat dari Rank**	**Keadaan Solusi**
Persamaan konsisten	$r\ A = r\ A^b = n$	Solusi tunggal
	$r\ A = r\ A^b < n$	Banyak solusi
Persamaan tak konsisten	$r\ A < r\ A^b$	Tidak mempunyai solusi
Persamaan homogen	$r\ A = r\ A^b = n$	Solusi tunggal
	$r\ A = r\ A^b < n$	Banyak solusi

Sumber: Aljabar Matriks untuk Para Insinyur

Contoh 2.2 :

Tentukan $rank$ dari matriks dibawah ini:

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{matrix}$$

Penyelesaian :

Dengan menggunakan operasi baris elementer kita dapat menentukan $rank$ dari matriks A dengan cara melihat banyaknya baris tak nol pada matriks elementer yang didapat. Maka perhitungannya dapat dilakukan sebagai berikut:

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{matrix} \; b_2 - 2\,b_1$$

$$= \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & 7 \end{matrix} \; b_3 \text{-} 3b_1$$

$$= \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{matrix} \; b_3 \text{-} b_2$$

$$= \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Jadi *rank* dari matriks $A = 2$

2.7 Generalized Invers

Definisi 2.7 (Searle, 1971): Jika A adalah matriks berukuran $m \times n$, kemudian G adalah *generalized invers* dari A dengan ukuran matriks $n \times m$ maka berlaku

$$AGA = A \tag{2.1}$$

Jika A mempunyai invers, maka A dapat dikalikan dengan A^{-1} terhadap kedua sisi dari persamaan (2.1) sehingga diperoleh

$$A^{-1}\ AGA\ A^{-1} = \ A^{-1}A\ G\ AA^{-1}\ = G$$

Selanjutnya dari persamaan (2.1) diperoleh

$$A^{-1}\ A\ A^{-1} = \ A^{-1}A\ A^{-1} = A^{-1}$$

artinya $G = A^{-1}$. Hal Ini membenarkan istilah *generalized inverse.* Selanjutnya akan dilihat bahwa setiap matriks A berukuran $m \times n$ setidaknya memiliki satu *generalized inverse.* Tetapi, jika matriks A berukuran $n \times n$ dan A memiliki invers, ada banyak *generalized inverse* yang berbeda, sehingga G bersifat tidak tunggal.

Jika persamaan (2.1) dikali dengan G yang berbentuk $AGA\ G = AG$ dan $G\ AGA\ = GA$, misalkan $P = AG$ dan $P = GA$ maka berlaku untuk $P^2 = P$ yang disebut dengan matriks proyeksi. Sehingga AG dan GA merupakan matriks proyeksi. Karena A adalah matriks $m \times n$ dan G adalah matriks $n \times m$, maka AG adalah matriks proyeksi berukuran $m \times m$ dan GA adalah matriks proyeksi berukuran $n \times n$.

Secara umum jika P adalah matriks proyeksi, maka $P = P^2$ berlaku untuk $Py = P(Py)$ dan $Pz = z$ untuk semua $z = Py$ ada di dalam range P. Dengan kata lain, jika P adalah matriks $n \times n$, maka untuk setiap $x \in R^n$ di dalam ruang $V = \{Px: x \in R^n\}$ (range dari P).

Jika $x \in R^n$, maka $y = Px$ dan $z = x - Px = \ I - P\ x$ memenuhi $x = y + z$, $Py = y$, dan $Pz = P\ x - Px\ = Px - P^2x = 0$. Disebabkan $Px = P\ x + y\ = y$, kita dapat mengatakan bahwa P merupakan matriks proyeksi R^n atas range V dengan ruang $W = \ x: Px = 0\ $.

Kedua proyeksi AG dan GA muncul pada hasil selanjutnya, yang menunjukkan bagaimana *generalized inverse* dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan matriks.

Contoh 2.3 :

Diberikan matriks A dan G sebagai berikut:

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{matrix} \text{ dan } G = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

Buktikan G adalah *generalized invers* dari A!

Penyelesaian:

Akan ditunjukkan G adalah *generalized invers* dari A apabila berlaku $AGA = A$, yaitu:

$$AGA = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{matrix} = A$$

sehingga disimpulkan bahwa G adalah *generalized invers* dari A.

Ada beberapa metode yang digunakan untuk menemukan *generalized inverse* dari suatu matriks, yaitu dengan metode pendiagonalan matriks dan aturan algoritma.

2.7.1 Metode Pendiagonalan Matriks

(Searle, 1971) menyatakan bahwa matriks diagonal merupakan suatu matriks dimana semua elemen diluar diagonal utama mempunyai nilai nol dan paling tidak satu elemen pada diagonal utama $\neq 0$, biasanya diberi simbol D.

Jika A berdimensi pxq direduksi menjadi bentuk diagonal dapat dinyatakan sebagai

$$P_{pxp}A_{pxq}Q_{qxq} = \Delta_{pxq} \equiv \begin{matrix} D_{rxr} & 0_{rx(q-r)} \\ 0_{p-r\ xr} & 0_{p-r\ x(q-r)} \end{matrix}$$

Atau secara sederhana dinyatakan

$$P_{pxp}A_{pxq}Q_{qxq} = \Delta_{pxq} \equiv \begin{matrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

dengan :

P dan Q = operasi baris elementer

r = rank matriks A

D_r = matriks diagonal orde *r*.

Secara umum apabila $d_1, \dots, d_r$ menyatakan elemen-elemen diagonal dari sebarang matriks diagonal D, dengan menggunakan notasi $D\ d_i$ untuk D_r, dapat dinyatakan:

$$D_r \equiv \begin{matrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_r \end{matrix} \equiv diag\ d_i \equiv D\ d_i \text{ untuk } i = 1, \dots, r.$$

Invers dari Δ dinyatakan dengan Δ^{-1} yang ditulis

$$\Delta^{-1} = \begin{matrix} D_r^{-} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

Maka $G = Q\Delta^{-}P$. (2.2)

Adapun langkah-langkah aturan pendiagonalan matriks adalah sebagai berikut :

a. Diketahui matriks sembarang A yang berukuran $n \times n$.
b. Menentukan matriks P dengan melakukan operasi baris elementer (OBE) pada matriks A dengan bentuk $[A|I]$.
c. Menentukan matriks Q dengan menggunakan operasi kolom elementer (OKE) pada matriks A yang telah di OBE dengan bentuk $\frac{A}{I}$.
d. Hitung $\Delta = PAQ$.
e. Menentukan Δ^{-1}.
f. Selanjutnya cari $G = Q\Delta^{-1}P$ dengan G adalah *generalized inverse* dari matriks tersebut.

Contoh 2.4 :

Diketahui matriks $A = \begin{matrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{matrix}$, dengan aturan pendiagonalan maka matriks A mempunyai *generalized inverse* sebagai berikut:

Penyelesaian:

a. Diketahui matriks sembarang A yang berukuran 3×3.

$$A = \begin{matrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{matrix}$$

b. Akan dicari matriks P dengan melakukan operasi baris elementer (OBE) pada matriks A dengan bentuk $A|I$, maka akan diperoleh P:

$$A|I = \begin{matrix} 4 & 1 & 2| & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5| & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3| & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \; b_1 \leftrightarrow b_2$$

$$A|I = \begin{matrix} 1 & 1 & 5| & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2| & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3| & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \; b_3 - 3b_1$$

$$A|I = \begin{matrix} 1 & 1 & 5\;| & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2\;| & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -12| & 0 & -3 & 1 \end{matrix} \; b_2 - 4b_1$$

$$A|I = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -18 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -12 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] b_3 - \frac{2}{3} b_2$$

$$A|I = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -18 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right]$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

c. Kemudian dengan melakukan operasi kolom elementer (OKE) pada matriks A yang telah di OBE dengan bentuk $\frac{A}{I}$, maka akan diperoleh Q:

$$\frac{A}{I} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] k_3 - 5k_1$$

$$\frac{A}{I} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] k_3 - 6k_2$$

$$\frac{A}{I} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d. Setelah didapatkan P dan Q selanjutnya akan ditentukan Δ dengan menggunakan persamaan $\Delta = PAQ$

$$\Delta = PAQ$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e. Kemudian dicari Δ^{-1}, diperoleh :

$$\Delta^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

f. Selanjutnya cari $G = Q\Delta^{-1}P$ dengan G adalah *generalized inverse* dari matriks A yaitu:

$$G = Q\Delta^{-}P$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.7.2 Aturan Algoritma

(Searle, 1971) menyatakan bahwa dalam mencari invers suatu matriks terkadang matriks dibagi-bagi menjadi beberapa matriks yang lebih kecil yang disebut submatriks. Proses membagi-bagi matriks menjadi beberapa submatriks dinamakan partisi matriks. Sedangkan *generalized inverse* diperoleh berdasarkan penyusunan kembali invers submatriks non-singular dan null matriks yang memenuhi persamaan $AGA = A$.

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right]$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

dengan :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

dengan submatriks A_{11} adalah non-singular berukuran $r \times r$ dengan *rank* r; A_{12}, A_{21} dan A_{22} merupakan matriks nol.

Selanjutnya ditentukan invers dari submatriks A_{11} lalu di transposekan sehingga diperoleh submatriks $(A_{11}^{-1})^t$. Susun kembali submatriks submatriks $(A_{11}^{-1})^t$, A_{12}, A_{21} dan A_{22} dengan ketentuan submatriks selain submatriks $(A_{11}^{-1})^t$ dinolkan.

$$\begin{bmatrix} (A_{11}^{-1})^t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kemudian ditransposekan kembali untuk memperoleh *generalized inverse* dari matriks A sehingga

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan bentuk di atas merupakan *generalized inverse* dari A yang memenuhi $AGA = A$ yaitu :

$$AGA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$

Sehingga terbukti $AGA = A$.

Adapun langkah-langkah aturan algoritma adalah sebagai berikut :

a. Dalam matriks A dengan *rank* r, temukan sembarang matriks minor non singular dengan orde r. Notasikan dengan M.

b. Temukan invers matriks M, yaitu M^{-1} kemudian transposkan, $(M^{-1})^t$.

c. Dalam matriks A, ganti setiap elemen matriks M dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol.

d. Transposkan matriks A. Hasilnya berupa matriks G dan G adalah *generalized inverse* dari A.

Contoh 2.5 :

Diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, dengan aturan algoritma maka matriks A mempunyai *generalized inverse* sebagai berikut

Penyelesaian:

Akan ditentukan *rank* dari matriks A dengan operasi baris elementer sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} b_3 \leftrightarrow b_2 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} b_3 - 3b_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -12 \end{bmatrix} b_2 - 4b_1 \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -18 \\ 0 & -2 & -12 \end{bmatrix} b_3 - \frac{2}{3}b_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi *rank* matriks A adalah 2.

a. Dalam matriks A dengan *rank* r, temukan sembarang matriks minor nonsingular dengan orde r. Notasikan dengan M.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

b. Temukan invers matriks M, yaitu M^{-1} kemudian transposkan, $(M^{-1})^t$.

$$M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; \quad (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

c. Dalam matriks A, ganti setiap elemen matriks M dengan elemen matriks $M^{-1}\ t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol.

$$A = \begin{matrix} 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

d. Transposkan matriks A dan hasilnya berupa matriks G dan G adalah *generalized inverse* dari A.

$$A^t = G = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{matrix}.$$

2.8 Solusi Umum Sistem Persamaan Linear dengan *Generalized Inverse*

Teorema 2.1 (S.Sawyer, 2008): Misalkan A matriks berukuran $m \times n$ dan diasumsikan bahwa G adalah *generalized invers* dari A (berarti, $AGA = A$) . Maka untuk $y \in R^m$ yang tetap

i. Persamaan $Ax = y, x \in R^n$ (2.3)
   mempunyai solusi untuk $x \in R^n$ jika dan hanya jika $AGy = y$ (artinya, jika dan hanya jika y ada didalam range pada proyeksi AG)

ii. Jika $Ax = y$ mempunyai banyak solusi, maka x adalah solusi dari $Ax = y$ jika dan hanya jika $x = Gy + (I - GA)t$ untuk $t \in R^n$ (2.4)

catatan : jika kita ingin sebuah solusi tertentu dari $Ax = y$ untuk y didalam range A, kita dapat gunakan $x = Gy$

Bukti:

(i). $\leftarrow$ Diketahui $AGA = A$ dan $AGy = y$, akan dibuktikan $Ax = y$.

Jika y didalam range pada proyeksi AG, artinya jika $(AG)y = y$, maka $A(Gy) = y$ dan $x = Gy$ adalah solusi dari $Ax = y$.

$\rightarrow$ Diketahui $Ax = y$ dan $AGA = A$. Akan dibuktikan $AGy = y$

Jika $Ax = y$, maka $GAx = Gy$ dan $AGAx = AGy = AG\ y$, sedangkan $AGA = A$ berarti $AGAx = Ax = y$. Sehingga $(AG)y = y$. Selanjutnya, jika $Ax = y$ memiliki solusi untuk y □ R^m yang diberikan, maka $x = Gy$ adalah solusi khusus.

(ii). $\leftarrow$ Diketahui $x = Gy + I - GA\ t$, akan dibuktikan $Ax = y$ Jika $x = Gy + I - GA\ t$, kalikan A terhadap persamaan (2.4) maka diperoleh , $Ax = AGy + A\ I - GA\ t = y + A - AGA\ t = y + A - A\ t = y$

$\rightarrow$ Diketahui $Ax = y$ dan $t = x$, akan dibuktikan $x = Gy + I - GA\ t$

Dari persamaan (2.4) ganti $t = x$ pada persamaan sisi kanan, maka diperoleh $Gy + I - GA\ x = Gy + x - G\ Ax = Gy + x - Gy = x$.

Jadi solusi x dari $Ax = y$ adalah persamaan (2.4) dengan $t = x$.

Contoh 2.6 :

Tentukanlah solusi dari sistem persamaan linear berikut:

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + \frac{3}{2}x_2 = 0$$

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 2$$

Penyelesaian:

Sistem persamaan linear di atas dapat diubah menjadi matriks lengkap atau matriks yang diperluas *(augmented matrix),* yaitu:

$$A = \begin{matrix} 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} & | & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & | & 2 \end{matrix}$$

akan ditentukan *rank* dari matriks A dengan operasi baris elementer sebagai berikut :

$$A = \begin{matrix} 1 & 1 & | & 1 & \\ 1 & \frac{3}{2} & | & 0 & b_2 - b_1 \\ 1 & \frac{1}{2} & | & 2 & b_3 - b_1 \end{matrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] b_3 + b_2$$

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Jadi *rank* matriks A adalah 2. Berdasarkan Tabel 2.1, jika $r(A) = r(A^b) = r < n$ maka persamaan di atas mempunyai banyak solusi. Dengan aturan algoritma diperoleh *generalized inverse* sebagai berikut :

a. Dalam matriks A dengan rank r, temukan sembarang matriks minor nonsingular dengan orde r. Notasikan dengan M.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

b. Temukan invers matriks M, yaitu M^{-1} kemudian transposkan, $(M^{-1})^t$.

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}; \quad (M^{-1})^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

c. Dalam matriks A, ganti setiap elemen matriks M dengan elemen matriks $(M^{-1})^t$ dan ganti elemen lainnya dengan nol.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d. Transposkan matriks A dan hasilnya berupa matriks G.

$$A^t = G = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Terakhir didapat bentuk solusi umum dari sistem persamaan linear sebagai berikut:

$$x = Gy + (I - GA)t$$

dengan $G = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

maka diperoleh:

$$x = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix}$$

ambil $t_1, t_2 = 0$, maka

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

sehingga nilai x_1 dan x_2 diperoleh dengan nilai 3 dan -2 atau dapat ditulis sebagai $x_1 = 3$ dan $x_2 = -2$.