BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Persamaan DifferensialParsial

Persamaan differensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu variabel terikat (*dependent variable*) terhadap satu atau lebih variabel bebas (*independent variable*). Persamaandifferensial yang terdiridarisatuvariabelterikatterhadapsatuvariabelbebasdisebutpersamaandifferensialbiasasedangkanpersamaan yang terdiridarisatuvariabelterikatterhadapsatuataulebihvariabelbebasdisebutpersamaan differensialparsial.

Persamaandifferensialmunculsecaraalamipadasainsfisika, model matematika, danpadamatematikaitusendiri.Ordedarisebuahpersamaandifferensialadalahordedariturunantertinggi.

Contoh2.1 :

$$\frac{\vartheta^2 u}{\vartheta x \vartheta y} - 2x + y$$

Contoh 2.1 adalahpersamaanordeduadimana$u$ adalah variabel tak bebas sedangkan x dan y adalah variabel bebas.

Klasifikasipersamaandifferensialparsialdiperlukanuntukmenyelesaikanpersamaan differensial.Berikutiniklasifikasidasar yang seringdijumpaipadapersamandifferensial :

1. KlasifikasiBerdasarkanBentuknya

   a. Linier

Persamaandifferensialparsialdikatakan linier jikavariabelterikat$u$ dan turunannya muncul dalam bentuk linier (tidak berbentuk dalam akar perkalian dan sebagainya). Bentuk umum persamaan differensial orde dua linier dalam variabel x dan y dapat ditulis

$$Au_{xx} + Bu_{yy} + Cu_x + Du_y + Fu = G \qquad (2.1)$$

Dengan $A, B, C, D, E, F,$ dan G adalah fungsi-fungsi dalam bentuk x dan y. Jikakoefisien $A, B, C, D, F,$ dan G berbentuk konstantamakapersamaan 2.1disebutfungsikonstantasebaliknyajikaterdapatsatukoefisien $A, B, C, D, F,$ dan G berbentuk variabel maka persamaan 2.2 disebut koefisien variabel.

Persamaan Linier dikatakanHomogenjika $G = 0$ sebaliknyapersamaan linier dikatakan nonhomogenjika $G \neq 0$

Contoh 2.2:

$$u_x + \quad x + 1 \; u_y + u1 = 2 \qquad \text{(nonhomogen)}$$

$$y + 2 \; u_x + u_{xx} + u = 0 \qquad \text{(homogen)}$$

b. Non Linier

Persamaandifferensialdikatakan non Linier jikavariabelterikat u dan turunannya muncul dalam bentuk pangkat, perkalian, eksponensialdansebagainya.

2. KlasifikasiBerdasarkannilaiDiskriminan

KlasifikasiPersamaandifferensialparsialmenurutpersamaan linier ordeduapadaPersamaan 2.1berdasarkannilaidiskriminan, $D = B^2 - 4AC$, yaitu:

a. Parabolik

Persamaan 2.1adalahparabolikjika $D = 0$. Persamaan parabolik sering menggambarkan tentang aliran kalor dan fenomena aliran difusi seperti aliran panas yang melalui permukaan bumi.

Contoh 2.3:

$$u_t - u_{xx} = 0$$

Maka $\qquad D = 0^2 - 4 \; -1 \quad 0 \; = 0$

b. Hiperbolik

Persamaan 2.1adalahparabolikjika $D > 0$. Persamaanhiperbolikseringmenggambarkantentangpergerakangelombang, fenomenagetaransepertialiranpanas yang melaluipermukaanbumi.

Contoh2.4 :

$$u_{tt} - u_{xx} = 0$$

Maka $\qquad D = 0^2 - 4 \; -1 \quad 1 \; = 4$

c. Eliptik

Persamaan 2.1adalaheliptikjika$D < 0$. Persamaaneliptikadalahpersamaan yang menggambarkankondisitunak (yang tidakbergantungpadawaktu), sepertifenomenakelistrikandankemagnetan.

Contoh2.5 :

$$u_{tt} + u_{xx} = 0$$

Maka $D = 0^2 - 4\ 1\ \ 1 = -4$

2.2 Persamaan Laplace

Persamaan Laplace merupakan persamaan dalam keadaan tunak (masalah awal dan nilai batasnya tidak bergantung kepada waktu (t)), sehingga persamaan yang muncul hanya bergantung kepada x dan y saja. Bentuk umum persaaan Laplace dapat ditulis sebagai berikut:

$$\nabla^2 U = 0 \qquad (2.2)$$

Dengan$\nabla^2 U$ adalah laplacian fungsi u. Dalam koordinat x, y di dalam bidang persamaan Laplace dapat ditulis, yaitu:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ . \qquad (2.3)$$

Untukmenyelesaikanpersamaandifferensialparsialmakadiperlukansyaratbatas.Syaratbatasadalahbatasanataupenyanggafisis yang harusadasehinggasuatusturukturataubendadapatberdirisendiri di dalamruangan.Jenis-jenissyaratbatas:

a. SyaratbatasDirechletyaitumasalahnilaibatasdengansyaratnilaibatas$f\ a = A, f\ b = B$ syarat batas ini di jumpai pada besaran-besaran yang tidak diketahui.
b. SyaratbatasNewmannyaitunilaibatasdengansyaratbatas$f'\ a = A, f'\ b = B$, syarat batas ini dapat dihubungkan dengan gaya-gaya umum.
c. SyaratbatasCampuranyaitunilaibatas yang berkaitandenganfungsitaktentu$u(x, t)$ dan turunan pada batas-batasnya.

2.3 Rantai Markov (*Markov Chain*)

KonsepRantai MarkovdiperkenalkansekitarTahun 1907, olehseorangahlimatematikaRusiabernama Andrei A. Markov (1856-1922).Metodeiniberhubungandengansuaturangkaian proses dankejadian. Rantai Markov adalah proses stokastikdengankejadianpadamasalalutidakmempunyaipengaruhpadakejadian di masa yang akandatangapabilakejadiansaatinidiketahui (Kurkani, V.G. 1999). Rantai Markov biasanyadigunakanuntukmempelajariperilakujangkapanjangataujangkapendekdari suatu proses stokastik.

Metodeinidapatdigunakanuntukmemperkirakanperubahan-perubahan di waktu yang akandatangdalamvariabel-variabeldinamistersebut di waktu yang lalu. Teknikinidapatjugadigunakanuntukmenganalisakejadian-kejadian di waktu-waktumendatangsecaramatematis (Subagyodkk, 1995).

2.3.1 Proses Acak

Pengelompokkan tipe populasi dari proses acak bisa digambarkan jika X adalah proses acak, maka populasi dari proses acak adalah semua nilai yang mungkin yang bisa dimasukkan dalam suatu proses.

Jika$X$ adalah proses acak yang menggambarkan suatu persamaan, maka populasi dari X dapat digambarkan sebagai suatu nilai yang memenuhipersamaantersebut. Jikapopulasi$S$ dari suatu proses acak X dapat dihitung (contoh$S = \{1,2,3,\dots\}$), maka$X$ disebut *Discrete Time RandomProcess*. Jikapopulasi$S$dari suatu proses acak$X$ tidak dapat dihitung (contoh $S = \infty$) maka X disebut *Continuous Time RandomProcess*. Untuk selanjutnya S, disebut keadaan.

Sebuah rantai Markov adalah suatu urutan dari variabel-variabel acakX_1, X_2, X_3, ...dengan sifat Markov, dengan kata lain:

$$Pr\ X_{n+1} = x \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2 \dots, X_n = x_n \ = Pr\ X_{n+1} = x \mid X_n = x_n \quad (2.5)$$

yangmungkinuntukmembentukX_i, untuk $i = 1,2,3,\dots n$.Cirikhasdalam proses Markov, kemungkinanberubahdarisuatukeadaankekeadaan yang lain hanyatergantungpadakeadaansaatini.

2.3.2 *State Absorbing*danKondisiEkuilibrium

Suatukeadaanataukedudukanrantai Markov i disebut *state Absorbing*atau keadaan penyerap apabilasekalisistemitutinggalpadakeadaan i maka sistem itu akan tetap tinggal padakeadaan$i$ untuk selamanya.

Kondisiekuilibriummerupakansebuahkondisiapabiladalamkeadaan yang cukup lama atau di masa yang akandatangakanmengalamikondisi yang stabildimanasemuakeadaan yangadatidakmengalamiperubahanlagi. Kondisiituakantercapaijikatidakadakeadaan yang melakukantindakan yang dapatmengubahmatriktransisiprobabilitas.

2.3.3 MatriksPeluangTransisi

Matrikspeluangtransisiadalahsuatumatriks yang memuatsemuainformasi yang mengaturperpindahaansistemdarisuatukeadaan ke keadaanlainnya.Unsur-unsurdarimatrikstersebutmenunjukkanbesarnyapeluangperpindahansistemdarisatu keadaankekeadaanlainnya

Misalkan x_t menyatakan rantai Markov dengan waktu diskret, dan misalkan $i_0, i_1, \dots, i_k$, $k = 0,1,2,..$ merupakan keadaandarisistempadasetiapwaktu.Peluangsuatutahapperpindahandarikeadaan$j$ pada saat t ke keadaan$k$ pada saat (t + 1) disebut peluangtransisisatulangkah, dilambangkansebagai$P_{jk}^{t,t+1}$dimana$P_{jk}^{t,t+1} = P\ X_{t+1} = k \mid X_t = j$.

Peluangtersebuttergantungpadakeadaanawal$j$ dan keadaanakhir$k$, serta tergantung pada peubah waktu t . Jika peluang transisi tersebut bebas dari peubah waktu t, maka rantai Markov tersebut dikatakan mempunyai peluang transisi stasioner. Dengan kata lain jika X_t merupakan rantai Markov yang stasioner, maka $P_{jk}^{t,t+1} = P_{jk}$ untuk setiap t. Secaraumumpeluangtransisi$n$ langkah dinyatakan dengan $P_{jk}^{(n)} = P\ X_{m+n} = k \mid X_m = j$, $m = 0,1,2,\ldots$dan $n = 1.2.3\ldots.$ Peluang transisi satu langkahseperti yang dikemukakan di atasdapatdisajikandalambentukmatrikssebagaiberikut:

Keadaanakhir

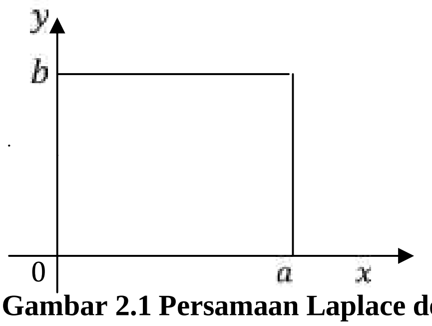
$$P = \text{keadaan awal} \quad \begin{array}{c|ccc} & i_1 & i_2 & \cdots \\ \hline i_1 & P_{00} & P_{01} & \ldots \\ i_2 & P_{10} & P_{11} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \qquad (2.6)$$

Matriks2.6disebutsebagaimatrikspeluangtransisidarisuaturantai Markov yang stasioner.Akibatsifatpeluang, matrikstersebutmempunyaisifatsebagaiberikut:

$$P_{jk} \geq 0, untuk\ j, k = 0,1,2,\ldots$$
$$\sum_k P_{jk} = 1, untuk\ j = 0,1,2,.. \qquad (2.7)$$

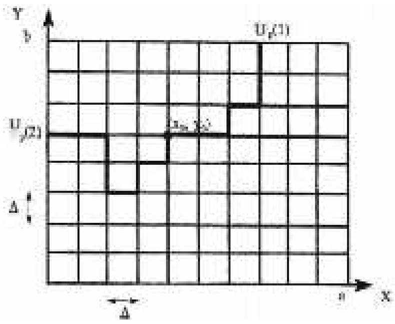
2.3.4 Penyelesaian Persamaan Laplace dengan Metode Rantai Markov

Ilustrasi penyelesaian persamaan Laplace dengan metode rantai Markov dapat digambarkan sebagai berikut. Misalkan bahwa metode ini diaplikasikan dalam menyelesaikan persamaan Laplace yaitu $\nabla^2 U = 0$, dengan kondisi syarat batas Direchlet, seperti gambar berikut yaitu hasil perpotongan masing-masing garis:



Gambar 2.1 Persamaan Laplace dengan syarat batas

Berdasarkan gambar 2.1 garis dipartisi sehingga menjadi:



Gambar2.2 Syarat batas dipartisi

Pada Gambar 2.2 dibentuk grid-grid, kemudian diasumsikan bahwa terdapat grid bebas f (non-absorbing) dan grid terikat p (absorbing). Selanjutnya ditentukan grid, dengan jumlah seluruh grid adalah

$$n = f + p. \tag{2.8}$$

Jikasimpulpenyerapdiletakkandi barispertamadantidakmenyerapdiletakkan di barisberikutnya makamatrikstransisi P, didefenisikan:

$$P = \begin{matrix} I & 0 \\ R & Q \end{matrix} \tag{2.9}$$

dengan:

I: Matriksidentitas $p \times p$ yang menunjukkan transisi antara gridpenyerap$p_{ii} = 1$ &$p_{ij} = 0$

0: Matriksnolmenunjukkantidakdapattransisidaripenyerapkegridtidakpenyerap

R: Matriks$f \times p$ menunjukkan peluangpergerakandarigridtidakpenyerapkegridpenyerap lain

Q: Matriks$f \times f$ menunjukkan peluang pergerakan dari gridtidakpenyerap yang satuke yang lain. Elemenmatriks$Q$ antara lain:

$$Q \begin{cases} \frac{1}{4}, \text{ jika} i \text{ terhubung secara langsung ke- } j \\ 0, \text{ jika } i = j \text{ atau i tidak terhubung secara langsung ke- } j \end{cases} \tag{2.10}$$

Selanjutnya, darimatrikstransisi$P$, dibentuk matriks$B$

$$B = \begin{matrix} R & Q \end{matrix} \tag{2.11}$$

dengan:

$$\sum_{j=1}^{np} B_{ij} = 1, \; i = 1,2,\ldots,n$$

Solusi dari persamaan Laplace $\nabla^2 U = 0$ adalah U_f yang mempunyai penjumlahan dari solusi pada grid penyerap dan grid tidak penyerap

$$U_f = BU_n \tag{2.12}$$

U_f merupakan gridtidak penyerap dan U_p merupakan gridpenyerap dengan $U_p = U$, sehingga U_n merupakan penjumlahan dari grid U_f dan U_p.

Contoh:

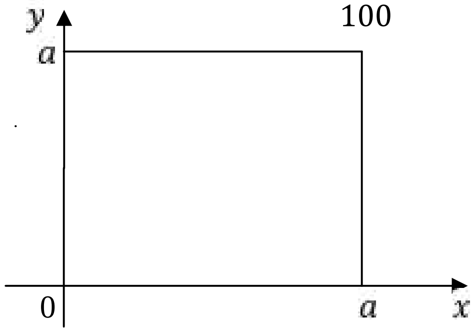
Diberikan persamaan Laplace berbentuk $\nabla^2 U = 0$ di R dengan syarat batas: $U(0, a) = U(a, y) = U(x, 0) = 0$ dan $U(x, a) = 100$.Akan di cari solusi Eksak dan solusi pendekatan dari persamaan persamaaan tersebut. Solusi eksak pada contoh tersebut adalah:

$$U(x, y) = \frac{400}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi x}{a} \sinh\frac{n\pi x}{a}}{n \sinh n\pi}, \; n = 2k - 1.$$

Penyelesaianpersamaan Laplace denganmenggunakanrantai Markov adalahsebagaiberikut:

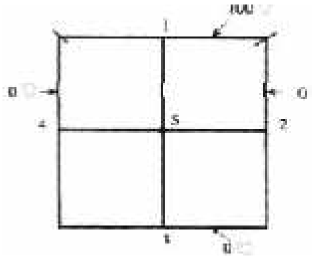
Solusi pendekataan dari masalah di atas adalah sebagai berikut:

a. Diambil gambar masalah syarat batas $U(0, a) = U(a, y) = U(x, 0) = 0$, dan $U(x, a) = 100$, sebagai berikut:



Gambar 2.3Syarat Batas dari Persamaan Laplace

b. Dibentuk partisi dengan grid 2×2 dari Gambar 2.2, kemudian diberi nomor pada tiap-tiap grid.



Gambar 2.4Syarat Batas dari Persamaan Laplace grid 2×2

c. Menentukan grid penyerap dan grid tidak penyerap

PadaGambar 2.3 grid penyerap terletak pada grid diseluruh bagian luar yaitu grid nomor 1,2,...4, dan grid tidak penyerap terletak pada grid bagian dalam yaitu nomor 5. Dengan demikian didapat $f = 1$, dan $p = 4$ sehingga jumlah grid dari Persamaan 2.8yaitu$n = 5$. Matrikstransisi$P$yang terbentuk dari grid-grid tersebut adalah sebagai berikut:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{array} \qquad (2.13)$$

d. Matriks transisi P, pada Matriks2.13 mempunyai elemen-elemen matriks

$$I = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}, \qquad 0 = 0$$

$$R = \begin{matrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{matrix}, \qquad Q = 0$$

sehingga dari Persamaan 2.11 maka matriks$B$,yaitu:

$$B = R \quad Q$$

$$B = \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{4} \quad 0$$

e. Untuk langkah selanjutnya dicari nilai U_f pada Persamaan 2.12, sehingga didapat:

$$U_f = BU_p$$

$$U_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix}$$

$$U_5 = \frac{1}{4}\left(U_1 + U_2 + U_3 + U_4\right)$$

$$U_5 = \frac{1}{4}\left(100 + 0 + 0 + 0\right)$$

$$U_5 = 25$$

Jadi potensial pada grid 5 atau titik $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ adalah 25 volt.