BAB II
LANDASAN TEORI

Beberapa teori yang dibutuhkan untuk membahas pemodelan matematika pada tugas akhir ini adalah:

2.1 Persamaan Diferansial

Persamaan diferensial muncul dari masalah-masalah nyata dalam kehidupan sehari – hari yang didalamnya menyangkut masalah perubahan, seperti gerak, laju dan sebagainya. Sebuahpersamaan diferensialadalah persamaanyang melibatkanfungsi yang tidak diketahuidan turunannya(Bronson, 2007).

Sebuahpersamaan diferensialdikatakan persamaandiferensial biasa(PDB) jikafungsi yang tidak diketahuitergantung padahanyasatu variabel independen**.** Jikafungsi yang tidak diketahuitergantung pada duaatau lebih variabel independen,persamaan diferensialtersebutdisebutPersamaan DiferensialParsial (PDP)(Bronson, 2007).

Definisi 2.1 (Dennis, 2013)Sebuahpersamaandiferensialorde pertamadari bentuk

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{2.1}$$

disebut sebagaipersamaandiferensial linear dalamvariabel y.

Denganmembagikeduasisidaripersamaan (2.1) dengankoefisienutama $a_1(x)$, diperoleh bentukumumpersamaandiferensialyaitu:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) - P(x)y.$$

Dengan$P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}danf(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$.

Persamaandiferensial biasa(PDB) di manavariabel independentidak munculsecara eksplisitdisebut sebagaiautonomous.Jika simbol x menunjukkanvariabel independen, makapersamaan diferensialorde pertamaautonomousdapat ditulis sebagai $f(y, y') = 0$ ataudalambentuk normal yaitu

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \tag{2.2}$$

Kita akan mengasumsikanbahwaseluruhfungsi f padapersamaan (2.2)danturunannyaf'adalah fungsi kontinu$y$ padasuatu interval$I$(Dennis, 2013).

2.2 Titik Equilibrium, LinierisasidanKestabilan

Diberikan sistem berdimensi dua

$$\dot{x} = f(x, y)$$
$$\dot{y} = g(x, y) \tag{2.3}$$

Definisi 2.2 (**Chasnov, 2012**)Titik (x^*, y^*) dikatakan sebagai titik equilibrium dari sistem persamaan (2.3) jika $f(x^*, y^*) = 0$ dan $g(x^*, y^*) = 0$.

Karakteristik dari titik equilibrium PDB autonomous nonlinier dapat diketahui dengan melakukan linierisasi sistem persamaan terkait, yakni dengan melakukan ekspansideret Taylor terhadap f_n di sekitar $x_n = x_{n,0}$ hingga orde pertama (Husin, 2012).

Diberikan sistem autonomousnon linier

$$\dot{x}(t) = F(x, y)$$
$$\dot{y}(t) = G(x, y) \tag{2.4}$$

dengan (x^*, y^*) merupakantitik equilibriumdarisistem. Kita akan menentukan sistem linier terdekat ketika (x, y) tertutup terhadap (x^*, y^*).

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(x, y) \approx F(x^*, y^*) + \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*)$$
$$\frac{d}{dt}y(t) = G(x, y) \approx G(x^*, y^*) + \frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial G}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*)$$

Kita dapat $F(x^*, y^*) = G(x^*, y^*) = 0$, maka

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(x, y) \approx \frac{\partial F}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial F}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*)$$
$$\frac{d}{dt}y(t) = G(x, y) \approx \frac{\partial G}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial G}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*) \tag{2.5}$$

Persamaan (2.5) merupakan sistem persamaan linier. Koefisien matriksnya adalahsebagaiberikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x^{*}, y^{*}) & \frac{\partial F}{\partial y}(x^{*}, y^{*}) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x^{*}, y^{*}) & \frac{\partial G}{\partial y}(x^{*}, y^{*}) \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Matriks (2.6) merupakan matrik jacobian dari sistem persamaan (2.5) pada titik Equilibrium(x^{*}, y^{*}) dengan

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x^{*}, y^{*}) & \frac{\partial F}{\partial y}(x^{*}, y^{*}) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x^{*}, y^{*}) & \frac{\partial G}{\partial y}(x^{*}, y^{*}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x^{*} \\ y - y^{*} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Jika titik equilibrium $(x^{*}, y^{*}) \neq (0,0)$, maka dengan dipilih $u = x - x^{*}$ dan $v = y - y^{*}$, kita boleh membuat sistem baru dengan $(0,0)$ sebagai titik Equilibrium(Malek,2007).

Matriks dalam persamaan (2.6) disebut matriksJacobianpadatitik tetap. Sebuah analisisnilai eigen darimatriksJacobianbiasanyaakan menghasilkanduanilai eigen λ_1 dan λ_2. Nilai eigenmungkin bernilai real dan berbeda, pasangankonjugat kompleks, atau berulang. Titikequilibrium dikatakan stabiljika keduanilai eigenmemilikibagian realnegatif.Titiktetap dikatakantak stabiljika setidaknya salah satudarinilai–nilaieigenmemiliki bagianreal positif(Chasnov, 2012).

Definisi2.3(Sasane, 2007)Titik equilibriumx_e dikatakan stabil jika untuk setiap $R > 0$, terdapat $r > 0$ sebagaimana sehingga jika $|x(0) - x_e| \leq r$ untuk setiap $t \geq 0$, $|x(t) - x_e| \leq R$. Jika tidak, titik equilibrium x_0 disebut tidak stabil.

Definisi2.4 (Anton, 2004) Jika A sebuahmatriktak nol berukuran $n \times n$, maka sebuah vektor taknolpadaR^n disebut vektor eigen (*eigen vector*) dari$A$ jikaAx adalah sebuah kelipatan skalar dari$x$. Jelasnya,

$$Ax = \lambda x \tag{2.8}$$

Untuk skalar sebarangλ. Scalar λ disebut nilai eigen (*eigen value*) dari$A$, dan x disebut sebagai vector eigen dari A yang terkait denganλ.

Untukmemperolehnilaieigandarimatriks$A$, $n \times n$, kita menuliskan kembali persamaan (2.8)

$$Ax = \lambda x$$

Atausecaraekuivalen

$$(\lambda I - A)x = 0 \qquad (2.9)$$

Agar λ dapat menjadi nilai eigen, harus terdapat solusi taknol dari persamaan ini. Akan tetapi, persamaan (2.8) memilikisolusitaknoljikadanhanyajika

$$\det(\lambda I - A) = 0 \qquad (2.10)$$

Pesamaan(2.10) disebutpersamaankarakteristik (*characteristic equation*) matriks$A$. Skalar – skalar yang memenuhipersamaaniniadalahnilai – nilaieigen$A$.

Berikutdiberikanbentukkhususdarikestabilantitikkesetimbanganuntuksistem linier dua variable terikat.

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (2.11)$$

Dengan a, b, c dan d konstan. Misalkan λ merupakan nilai eigen dari matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, maka diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \qquad (2.12)$$

Akar – akarpersamaankarakteristikditentukandengan

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2a}$$

Atau

$$\lambda_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2a}$$

Dengan$p = (a + d)$ dan $q = (ad - bc)$

Kestabilandarisitempersamandiferensial linier autonomous dapatditerangkansebagiberikut:

1. $\lambda_{1,2}$ real dan berbeda jika $\Delta = p^2 - 4q > 0$
   a. $\lambda_{1,2}$ positif jika $q < 0$:
      1) $\lambda_{1,2}$ positif jika $p > 0$ dan tidak stabil
      2) $\lambda_{1,2}$ negatif jika $p < 0$ dan stabil
   b. $\lambda_{1,2}$ beda tanda jika $q < 0$ dan tidak stabil

c. Salah satudarinilaikarakteristiknyabernilainoljika$q = 0$

1) Akarlainnyapositifjika$p > 0$ dan tidak stabil

2) Akarlainnyanegatifjika$p < 0$ dan stabil netral

2. $\lambda_{1,2}$ real dan sama jika $\Delta = 0$

a. $\lambda_{1,2}$ sama tanda

1) Keduanyapositifjika$p > 0$ dan tidak stabil

2) Keduanya negative jika$p < 0$ dan stabil

b. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, bila $p > 0$ dan tidak stabil.

3. $\lambda_{1,2}$ kompleks jika $\Delta < 0$

a. Real $\lambda_{1,2}$ sama tanda

1) Real $\lambda_{1,2}$ semuanya positif jika $p > 0$ dan tidak stabil

2) Real $\lambda_{1,2}$ negatif jika $p < 0$ dan stabil

b. Real $\lambda_{1,2}$beda tanda jika $p = 0$ dan stabil netral.

Definisi2.5 Titikequilibriumdaripersamaan (2.2) disebut stabil asimtotiklokaljikastabil dan tidakada $M > 0$ sedemikian sehingga $|x_0 - \hat{x}| < M$ berartibahwa $\lim_{t\to\infty} x\ t = \hat{x}$. Titikekuilibriumini disebutstabil asimtotik globaljika

iniberlaku untuk semua$M > 0$.

Teorema 2.1 Asumsikanterdapatfungsiterdiferensialkan$V: S \rightarrow R$didefinisikanpada beberapawilayahterbuka$S \subset R^n$mengandungtitik asal, sedemikian sehingga.

1. $V(0) = 0$.
2. $V(x) > 0$untuk semua $x \in S$dengan$x \neq 0$.
3. $\frac{dV\ x}{dt} \leq 0$untuk semua $x \in S$.

Maka titik equilibrium $\hat{x} = 0$stabilAsimtotikLokaldari$\frac{dx}{dt} = f\ (x)$.

Inijuga disebutturunan***Lie***dari fungsi V sepanjangvektorlapangan f . Fungsiyang memenuhi kondisiTeorema2.1 disebut fungsiLyapunov.

Teorema 2.2 (LaSalle's Theorem)diberikan$S \subset R^n$ tertutup dan terbatas yang merupakan himpunan invariant. Diasumsikan fungsi yang dapat didiferensialkan $V: S \to \mathbb{R}$ seperti berikut

$$\frac{dV\ x}{dt} \leq 0, \forall x \in S$$

Diberikan$M$ yang merupakan himpunan invariant terbesar yang memuat $\{x \in S | \frac{dV\ x}{dt} = 0\}$ (himpunan dari $x \in S$dimana $\frac{dV\ x}{dt} = 0$). Maka semua trajektori mulai dari S menuju Mdengan $t \to \infty$.

Mempertimbangankanpersamaankarakteristikmatriks$n \ x \ n$, memiliki bentuk:

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n = 0,$$

Dengankoefisien$a_i$real konstan, $i = 1, \ldots n$. definit n matriks Hurwitz menggunakan koefisien $a_i$dari polinomial karakteristiksebagaiberikut:

$$H_1 = a_1 \ ,$$

$$H_2 = \begin{matrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{matrix}$$

$$H_3 = \begin{matrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{matrix}$$

$$H_n = \begin{matrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{matrix}$$

dengan$a_j = 0$ jika $j > n$. Semua akar dari persamaan karakteristik $q(\lambda)$ bernilai negatif atau memiliki bagian real negatif jika determinan dari semua matriksHurwitz bernilaipositif.

$$\det H_j > 0, j = 1,2, \ldots n$$

Jika$n = 2$, kriteria Routh-hurwitzditentukansebagaiberikut:

$$\det H_1 = a_1 > 0 \text{dan} \det H_2 = \det \begin{matrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{matrix} = a_1 a_2 > 0$$

atau$a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$. Untuk polynomial yang berderajat $n = 2,3,4,5$, kriteria routh-hurwitz dapat disimpulkansebagaiberikut:

$$n = 2: a_1 > 0 \text{dan} a_2 > 0.$$

$n = 3: a_1 > 0, a_3 > 0,$ dan$a_1a_2 > a_3$

$n = 4: a_1 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0dana_1a_2a_3 > a_3^2 + a_1^2a_4$

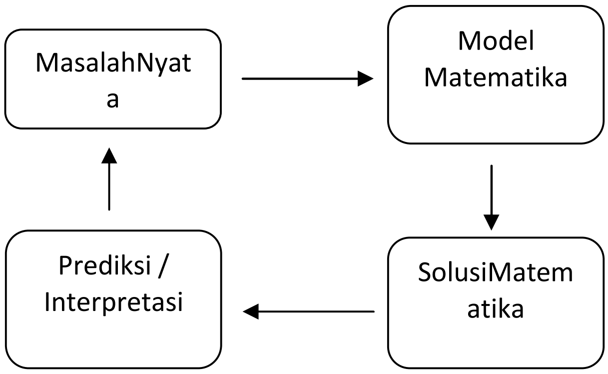
$n = 5: a_i > 0, i = 1,2,3,4,5, a_1a_2a_3 > a_3^2 + a_1^2a_4$dan

$a_1a_4 - a_5 \quad a_1a_2a_3 - a_3^2 + a_1^2a_4 \quad > a_5 \; a_1a_2 - a_3 \; ^2 + a_1a_5^2$

2.3 Model Matematika

Secaraumumpengertian model adalahsuatuusahauntukmenciptakansuatureplika/tiruandarisuatufenomena/peristiwaalam. Ada tigajenis model yaitu model fisik, model analogidan model matematik. Model matematikatersebutdibuat denganmendiskripsikanfenomena/peristiwaalamdalamsatu set persamaan. Kecocokan model terhadapfenomena /peristiwaalamnyatergantungdariketepatanformulasipersamaanmatematisdalammendiskripsikanfenomena/peristiwaalam yang ditirukan.

Model matematika yang diperolehdarisuatumasalahmatematika yang diberikan, selanjutnyadipecahkandenganaturan-aturan yang adauntukmemperolehnilaivariabelnya.Kemudianjikanilaivariabeltelahdiperoleh, perludiujiataudilakukaninterpretasiuntukmengetahuiapakahnilaiitu valid atautidak valid.Hasil yang valid akanmenjawabsecaratepat model matematikanya. Hasilsepertiinilah yang disebutsolusimatematika.Jikanilaivariabelnyatidak valid atautidakmemenuhi model matematikamakasolusimasalahbelumditemukan, danperludilakukanpemecahanulangatas model matematikanya.Secaraumum proses pemodelandanpemecahan model dapatdilihatsepertipadaGambar1 di bawahini.



Gambar 2.1Bagan Proses Pemodelan

Kadang – kadang Kita mengalami kesulitan untuk menyelesaikan solusi pada dunia nyata secara langsung. Oleh karena itu, terlebih dahulu kita nyatakan masalah tersebut kedalam model matematika. Masalah yang ditelitidiperlukankarakterisasimasalah, yaitupengertianyang mendasartentangmasalah yang dihadapi, termasukpemilihanvariabel yang relevandalampembuatan model sertaketerkaitanya.

Dalampemodelaninikitaselaluberusahauntukmencari model yang sesuaitetapisederhana.Makin sederhanamodel yang diperolehuntuktujuan yang ingindicapaimakindianggapbaikmodel itu.Dalamhalini model yang digunakanmungkinlebihdarisatupersamaanbahkanmerupakansuatusistem, atausuatufungsidenganvariabel – variabeldalambentukpersamaan parameter.

Interpretasihasilatausolusiadalah proses yang akan menghubungkan formulasi matematika kembali ke problem nyata. Dari sini lah diketahui, apakah model mewakili data yang ada. Seseorang boleh memutuskan untuk memodifikasi model dalam usaha untuk memperbaikinya.

2.4 BilanganReproduksiDasar

Untukmengetahuitingkatpenyebaransuatupenyakitdiperlukansuatu parameter tertentu.Parameter yang biasadigunakanadalahBilanganReproduksiDasar (*Basic Reproduction Number*).BilanganReproduksiDasaradalahbilangan yang menyatakanbanyaknya rata-rata individuinfektifsekunderakibattertularindividuinfektif primer yang berlangsungdidalampopulasi*susceptible*. Namunadapula yang mengartikanrasioatauperbandingan yang menunjukkanjumlahindividu*susceptible* yang menderitapenyakit yang diakibatkanolehsatuindividu*infected*. Jika model hanyamempunyaiduatitikkesetimbanganyaitutitikkesetimbanganbebaspenyakitdan titikkesetimbanganendemik, makatidakterjadiendemikjika $R_0 < 1$ dan terjadi endemik jika$R_0 > 1$(Rahmalia, 2010).

2.5 Model Pertumbuhan Logistik

Model pertumbuhan logistik pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan dari belgium, Verhulst dalam tahun 1838 (Waluya, 2006).

Perkiraan dasar model populasi dengan laju pertumbuhan konstan adalah

$$\frac{dN}{dt} = R_0 N \text{ atau } \frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = R_0$$

Secara umum laju pertumbuhan R boleh tidak konstan, tetapi mungkin bergantung pada populasi seperti berikut

$$\frac{dN}{dt} = R \ N \ N \text{ atau } \frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = R \ N \qquad (2.13)$$

dengan $R(N)$ merupakan pertumbuhan yang bergantung pada N, diasumsikan bahwa populasi cukup besar sehingga model $N(t)$ merupakan model kontinu. Untuk populasi yang cukup besar eksperimen memperlihatkan bahwa laju pertumbuhan menjadi negatif (kematian lebih banyak dari kelahiran).

Diberikan $R \ N \ = a - bN$ sehingga persamaan (13) menjadi

$$\frac{dN}{dt} = N \ a - bN \qquad (2.14)$$

Dengan a dan b konstanta positif, a adalah laju pertumbuhan tanpa pengaruh lingkungan dan b merepresentasikan efek dari peningkatan kepadatan populasi. Persamaan (2.14) merupakan Persamaan Diferensial orde satu non linier dan sering disebut sebagai persamaan logistik(Widodo, dkk, 2007).

Solusi eksplisit dari persamaan logistik (2.14) dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\frac{dN}{N(a - bN)} = dt \qquad (2.15)$$

Integralkan persamaan (2.15) dengan metode integral pecahan, sehingga menjadi

$$\int \frac{dN}{N \ a - bN} = \int dt \qquad 2.15a$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{N \ a - bN} = \frac{\frac{1}{a}}{N} + \frac{\frac{b}{a}}{a - bN} \qquad 2.15b$$

Sehingga persamaan (2.15a) menjadi

$$\frac{1}{a}\int \frac{dN}{N} + \frac{b}{a}\int \frac{dN}{a - bN} = \int dt \qquad 2.15c$$

dan diperoleh

$$\frac{1}{a}\ln|N| - \frac{1}{a}\ln|a - bN| = t + c \qquad 2.15d$$

Dengan syarat awal $N(0) = N_0$, diperoleh

$$c = \frac{1}{a}\ln|N_0| - \frac{1}{a}\ln|a - bN_0| \qquad 2.15e$$

Subtitusikan persamaan (2.15e) ke persamaan (2.15d), karena N_0 dan N bernilai positif, maka diperoleh

$$\frac{1}{a}\ln|N| - \frac{1}{a}\ln|a - bN| = t + \frac{1}{a}\ln|N_0| - \frac{1}{a}\ln|a - bN_0|$$

$$\frac{1}{a}\ln|N| - \frac{1}{a}\ln|a - bN| - \frac{1}{a}\ln|N_0| + \frac{1}{a}\ln|a - bN_0| = t$$

$$\frac{1}{a}(\ln|N| - \ln|N_0|) - \frac{1}{a}(\ln|a - bN| - \ln|a - bN_0|) = t$$

$$\frac{1}{a}\ln\frac{N}{N_0} - \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a - bN}{a - bN_0}\right) = t \qquad 2.15f$$

$$\ln\left(\frac{N}{N_0}\frac{a - bN_0}{a - bN}\right) = at$$

$$\frac{N}{N_0}\frac{a - bN_0}{a - bN} = e^{at} \qquad (2.15g)$$

Semula $a - bN_0$ dan $a - bN$ memiliki tanda yang sama. Nilai$\frac{a-bN_0}{a-bN}$berubahtanda jikaada nilaiberhinggat, sedemikian sehingga$a - bN = 0$, yaitujika populasikesetimbangan tercapaidalam waktu yangberhingga. Seperti yang kitatahu, initidak bisaterjadi.Khususnya, jika $a - bN = 0$, maka persamaan (2.15f) menunjukkan $t = +\infty$. sehinggatanda $\frac{a-bN_0}{a-bN}$ tetappositifsepanjang waktu(Haberman, 1998).

Karena $\frac{a-bN_0}{a-bN}$ selalu positif untuk setiap t, sehingga

$$\frac{N}{N_0}\frac{a - bN_0}{a - bN} = e^{at}$$

$$N(a - bN_0) = (a - bN)N_0e^{at}$$

$$Na - bNN_0 = aN_0e^{at} - bNN_0e^{at}$$

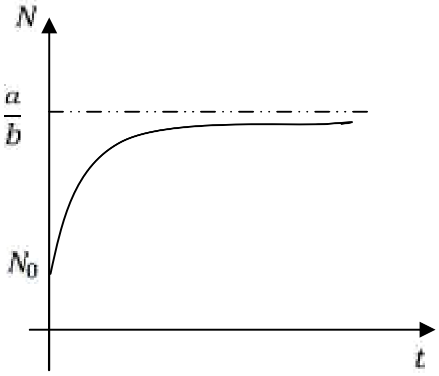
$$Na - bNN_0 + bNN_0e^{at} = aN_0e^{at}$$

$$N\ a - bN_0 + bN_0e^{at} = aN_0e^{at}$$

$$N = \frac{aN_0e^{at}}{a - bN_0 + bN_0e^{at}} \qquad (2.15□)$$

$$N = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \frac{a - bN_0}{bN_0}\ e^{-at}} \qquad (15i)$$

Kurva dari persamaan logistik (15i) adalah sebagai berikut:



Gambar 2.2 Kurva Solusi Persamaan Pertumbuhan Logistik

2.6 Model SIR

ModelSIR, yang dikembangkan pada tahun 1927 olehKermackdanMcKendrickdansekarangmerupakansalah satu modelepidemiologistandar. Modelitu sendiri cukupsederhana,populasidibagi menjaditiga kelasyaitu: S (*Susceptible*/rentan) yaituporsipopulasiyangrentan terhadap infeksi, I *(Infecteds*/terinfeksi) yaituporsiyang saat initerinfeksi dan R, (*Recovereds*/pulih) yaituporsidari populasiyangtelah pulihdari infeksi**.**

Beberapa Asumsi model SIR adalah:

a. Seorang individuhanya dapattertularpenyakitsekali.
b. Tingkat kelahiranadalah konstandan semuabayi yang baru lahirrentan ($Susceptible$).
c. Individurentan ($Susceptible$) dan terinfeksi($Infected$) tercampur ratasehinggainfeksibergerakdengan lajuyang sebanding padakeduatingkatan.

d. Individupulihpada tingkat yang konstan.

e. Tingkatkematian alamiadalahkonstan dan samadi semua kelas.

f. Populasidilestarikan. Satu-satunyafluksmasuk dan keluaradalahdarikelahiran dan kematianmasing-masingkelas.

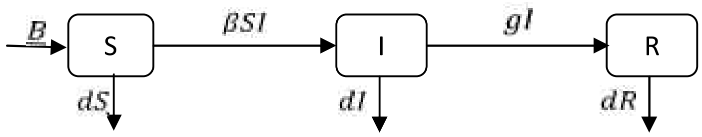
Seperti model pada umunya yang terdiri dari variabel – variabel. Variabelindependen untukmodel iniadalah waktu (t) dan ada tigavariabel dependenyaitu:

1. $S = S(t)$, yang merupakanjumlahindividu yang rentan
2. $I = I(t)$, yang merupakanjumlahindividu yang terinfeksi
3. $R = R(t)$,yang merupakanjumlah individupulih

Populasimengalir darisatu kelompokke yang berikutnya.Total populasi N adalah jumlahdari ketiganya:

$$N\ t\ = S\ t\ +\ I\ t\ + R\ t$$

Dari asumsi – asumsi yang telahdibahasdiatas, alur model Endemik SIR ditunjukanolehbagandibawahini.



Gambar 2.3 Diagram Alir SIR

Model inidapatdinyatakansebagaitigaPDB nonlinier sebagai berikut:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = B - \beta SI - dS$$
$$\frac{\partial I}{\partial t} = \beta SI - dI - gI \qquad (2.16)$$
$$\frac{\partial R}{\partial t} = gI - dR$$

Dengan parameter:

B : adalahtingkat kelahiran.

β : adalahtingkat penularanataukontak, yangdapat dianggapsebagai tingkatyang kontakyang terbuatdikalikan dengankemungkinan penularandi seluruhkontak.

d :adalah tingkatkematianper kapitayang sama denganinvers dariharapan hiduprata-rata.

g : adalahtingkat pemulihan. Iniadalah kebalikan darimasamenular.

diasumsikan jumlah populasi konstan, sehingga

$$S + I + R = N \tag{2.17}$$

jadi

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0$$

Jika $B = d$, dengan kata lainkelahiran dan kematianyangsama sehinggapopulasitetap beradapadaukuran yangkonstan, sehingga persamaan (2.17) menjadi

$$S + I + R = 1$$

Titik Kesetimbangan adalah solusi konstandari sistem, pada sistem (2.16) variabel R tidak muncul pada persamaan baris pertama dan kedua. Hal ini menunjukkan bahwa jumlah individu pada kelompok *R* tidak mempengaruhi laju perubahan jumlah individu pada kelompok *S* maupun *I*, maka titik kesetimbangan diperoleh apabila$\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = 0$. Dengan demikian, berdasarkan kondisi tersebut, diperoleh dua titik Equilibrium sebagai berikut:

Dalamkeadaansetimbang, $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = 0$ sehingga persamaan (2.16) menjadi:

$$0 = B - \beta SI - dS$$
$$0 = \beta SI - dI - gI \tag{2.17}$$

Untuktitikkesetimbanganbebaspenyakit (E_1) diasumsikan tidak ada individuyang terinfeksipadasaat$t$, sehingga$I(t) = 0$, maka dapat diperoleh nilai $S(t)$dan$R(t)$. Langkah – langkahnyaadalahsebagaiberikut:

$I = 0$,sehinggapersamaan (2.17) menjadi

$$0 = B - dS$$

$$S = \frac{B}{d}$$

Sehinggadiperolehtitikkesetimbanganbebaspenyakit$E_1 = \frac{B}{d}, 0$

Untukmenentukantitikkesetimbanganendemikdiasumsikanterdapatindividu yang terinfeksipenyakitsehingga$I(t) \neq 0$.

Karena$I(t) \neq 0$, maka persamaan (2.16) menjadi:

$$0 = B - \beta SI - dS \leftrightarrow \beta SI = B - dS \qquad (2.18a)$$

$$0 = \beta SI - dI - gI \leftrightarrow \beta SI = dI + gI \qquad (2.18b)$$

Dari persamaan (2.18b) diperolehnilaiS^* yaitu:

$$S = \frac{dI + gI}{I\beta}$$

$$S^* = \frac{d + g}{\beta}$$

$$S^* = 1/R_0$$

dengan $R_0 = \frac{\beta}{d+g}$

Subtitusikannilai$S^* = S$kepersamaan (2.18a) sehinggadiperolehnilaiI^*,

$$\beta S^* I = B - dS^*$$

$$I = \frac{B - dS^*}{\beta S^*}$$

diasumsikan bahwa kematian sama dengan kelahiran ($B = d$), maka diperoleh

$$I = \frac{d - dS^*}{\beta S^*}$$

$$I = \frac{d}{\beta} \cdot \frac{1 - S^*}{S^*}$$

$$I = \frac{d}{\beta}\left(\frac{1}{S^*} - 1\right)$$

$$I^* = \frac{d}{\beta}(R_0 - 1)$$

Ketika$R_0 > 0$ diperoleh titik kesetimbangan endemik dari sistem(2.16), $E^* = (S^*, I^*)$dengan$S^* = 1/R_0$, $I^* = \frac{d}{\beta}(R_0 - 1)$

Kestabilan linear dapatdiketahuimelaluitandabagian real dariakar-akarkarakteristikmatriksJacobian yang dihitungdisekitartitikkesetimbangan.

Didefinisikan fungsi-fungsi sebagai berikut:

$$f_1(S,I) = B - \beta SI - dS$$
$$f_2(S,I) = \beta SI - dI - gI$$

Untuk menyelidiki kestabilan titik kesetimbangan dilakukan linearisasi terhadap persamaan non linear di atas

$$\frac{\partial f_1(S,I)}{\partial S} = \frac{\partial(B - \beta SI - dS)}{\partial S} = \beta I - d$$
$$\frac{\partial f_1\ S,I}{\partial I} = \frac{\partial\ B - \beta SI - dS}{\partial I} = \beta S$$
$$\frac{\partial f_2(S,I)}{\partial S} = \frac{\partial f_2(\beta SI - dI - gI)}{\partial S} = \beta I$$
$$\frac{\partial f_2\ S,I}{\partial I} = \frac{\partial f_2\ \beta SI - dI - gI}{\partial I} = \beta S - d - g$$

danmatriksjacobiannyadibentuksebagaiberikut:

$$J = \begin{matrix} \frac{\partial f_1(S,I)}{\partial S} & \frac{\partial f_1\ S,I}{\partial I} \\ \frac{\partial f_2(S,I)}{\partial S} & \frac{\partial f_2\ S,I}{\partial I} \end{matrix}$$

2.6.1 Kestabilan Titik Kesetimbangan E_1

Matriksjacobian di titik$E_1 = \ S,I \ = \ \frac{B}{d},0$ adalah

$$J\ E \ = \begin{matrix} \beta I - d & \beta S \\ \beta I & \beta S - d - g \end{matrix}$$

$$J\ E_1 \ = \begin{matrix} d & \beta\frac{B}{d} \\ 0 & \beta\frac{B}{d} - d - g \end{matrix}$$

Nilaiegeindarimatrikjacobian di atasadalah

$$|J\ E_1 \ - \lambda I = \begin{matrix} d & \beta\frac{B}{d} \\ 0 & \beta\frac{B}{d} - d - g \end{matrix} - \lambda \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} = 0$$

$$\begin{matrix} d - \lambda & \beta\frac{B}{d} \\ 0 & \beta\frac{B}{d} - d - g - \lambda \end{matrix} = 0$$

$$d - \lambda \quad \beta\frac{B}{d} - d - g - \lambda \;= 0$$

$$\lambda_1 = d \text{ atau } \lambda_2 = \beta\frac{B}{d} - d - g$$

Titikkesetimbangan E_1 akan stabil Asimtotik jika $\lambda_{1,2} < 0$. hal tersebut terjadi jika $d < 0$ dan $\beta\frac{B}{d} < d + g$, kebalikan nya titik kesetimbangan E_1 tidak stabil jika $\beta\frac{B}{d} > d + g$.

2.6.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan E^{*}

Matriksjacobian di titik $E^{*} = S^{*}, I^{*} = 1/R_0, \frac{d}{\beta} R_0 - 1$ adalah

$$J\ E_2 = \begin{matrix} -\beta I^{*} - d & \beta S^{*} \\ \beta I^{*} & \beta S^{*} - d - g \end{matrix} \; 1$$

$$J\ E_2 = \begin{matrix} -\beta\cdot\frac{d}{\beta} R_0 - 1 - d & \beta/R_0 \\ \beta\cdot\frac{d}{\beta} R_0 - 1 & \beta/R_0 - d - g \end{matrix}$$

$$J\ E_2 = \begin{matrix} -dR_0 & -(g + d) \\ d(R_0 - 1) & 0 \end{matrix}$$

Nilaiegeindarimatrikjacobian di atasadalah

$$|J\ E_2\ | = \begin{matrix} -dR_0 & -(g + d) \\ d(R_0 - 1) & 0 \end{matrix} - \lambda \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} = 0$$

$$\begin{matrix} -dR_0 - \lambda & -(g + d) \\ d(R_0 - 1) & -\lambda \end{matrix} = 0$$

$$-dR_0 - \lambda \;\; -\lambda \; - d \; R_0 - 1 \;\; -g - d \; = 0$$

$$\lambda^2 + dR_0\lambda + d(\beta - (g + d)) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-dR_0 \pm \sqrt{\;dR_0\;^2 - 4d\;\beta - g + d}}{2}$$

Titik equilibrium stabil jika bagian real dari kedua nilai eigen bernilai negatif. Jika diskriminan dari persamaan karakteristik bernilai negatif maka nilai eigen bernilai kompleks tapi keduanya memiliki bagian real yang negatif. Ketika diskriminan bernilai positif, λ_{-} akan selalu real negatif, tetapi λ_{+} bernilai negatif jika

$$-4d\ \beta - g + d\ < 0$$

$$\beta - g + d\ > 0$$

$$\frac{\beta}{g + d} > 1$$

$$R_0 > 1$$

Oleh karena itu, titik equilibrium $S^{*}, I^{*} = \frac{1}{R_0}, \frac{d}{\beta}\ R_0 - 1$ stabil jika $R_0 > 1$ dan tidak stabil jika $R_0 < 1$.