BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Sistem Persamaan diferensial

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang melibatkan turunan-turunan dari fungsi yang tidak diketahui (Waluya, 2006).

Contoh 2.1 : Diberikan persamaan diferensial

1. $\frac{dy}{dx} = 3x - 1$
2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = x^2 y$

Jika suatu persamaan diferensial hanya memiliki satu variabel bebas, turunannya merupakan turunan biasa dan persamaannya disebut persamaan diferensial biasa. Jika terdapat dua atau lebih variabel bebas, turunannya merupakan turunan parsial dan persamaannya disebut persamaan diferensial parsial. Contoh 2.1 nomor 1 merupakan persamaan diferensial biasa karena memiliki satu variabel bebas yaitu x, sedangkan contoh 2.2 nomor 2 disebut persamaan diferensial parsial karena memiliki dua variabel bebas yaitu x dan y.

Sistem persamaan diferensial merupakan suatu sistem yang terdiri dari dua atau lebih persamaan diferensial. Diberikan sistem persamaan diferensial :

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

dengan $\dot{x} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right)^T$, $f = (f_1, f_2, \ldots f_n)$, dan $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Persamaan (2.1) dapat ditulis dalam bentuk sistem persamaan berikut :

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \\
\frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \ldots x_n),
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Jika $f_1, f_2, \ldots f_n$ masing-masing linear pada $x_1, x_2, \ldots x_n$ maka sistem (2.2) disebut sistem persamaan differensial linear yang dapat dituliskan dalam bentuk :

$$\dot{x}_1 = a_{11}\ t\ x_1 + a_{12}\ t\ x_2 + \cdots + a_{1n}\ t\ x_n$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}\ t\ x_1 + a_{22}\ t\ x_2 + \ldots + a_{2n}\ t\ x_n$$
$$\vdots \qquad (2.3)$$
$$\dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{nn}\ t\ x_n$$

Selanjutnya sistem dapat ditulis menjadi :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax}$$

dengan *A* matrik ukuran *n* x *n*, dan $x = \ \ x_1, x_2, \ldots\ x_n\ ^T$.

Contoh 2.2 : Diberikan sistem persamaan diferensial linier

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 3x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = 4x_1 - 2x_2$$

Persamaan (2.1) disebut sistem nonlinier jika tidak dapat dinyatakan dalam bentuk sistem (2.3).

Contoh 2.3 : Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinier

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1x_2 - x_2$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{2}x_1^2 - x_2$$

2.2 Titik Kesetimbangan

Sistem (2.2) dikatakan setimbang jika sistem tersebut tidak mengalami perubahan sepanjang waktu (konstan), artinya $\frac{dx_1}{dt} = 0, \frac{dx_2}{dt} = 0, \ldots, \frac{dx_n}{dt} = 0.$ Berikut diberikan definisi tentang kestabilan titik kesetimbangan (equilibrium):

Definisi 2.1 (Perko, 1991) Titik kesetimbangan $x^* \in R^n$ dari sistem (2.1) dikatakan :

a. Stabil lokal jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x\ \ t_0\ - x^*\| < \delta$ maka berakibat $\|x\ \ t\ \ - x^*\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \leq t_0$.

b. Stabil asimtotik lokal jika titik kesetimbangan $x^* \in R^n$ stabil dan terdapat bilangan $\delta_0 > 0$ sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - x^*\| < \delta_0$ berakibat $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*$

c. Tidak stabil jika titik kesetimbangan $x^* \in R^n$ tak memenuhi (a).

Jika untuk sembarang titik awal, solusi sistem persamaan diferensial $x(t)$ berada dekat dengan titik *equilibrium* $x^* \in R^n$ maka titik *equilibrium* $x^* \in R^n$ stabil global. Sementara itu jika untuk sembarang titik awal, solusi Sistem persamaan diferensial $x(t)$ berada dekat dengan titik *equilibrium* $x^* \in R^n$ dan untuk t membesar menuju tak hingga $x(t)$ konvergen ke $x^* \in R^n$, maka titik *equilibrium* $x^* \in R^n$ stabil asimtotik global.

2.3 Matriks Jacobian

Definisi 2.2 (Hale, 1991) Diberikan $f = (f_1, \dots, f_n)$ pada sistem (2.1) dengan $f_i \in C^1(E)$, $i = 1,2,\dots,n$.

$$J(f(x^*)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^*) \end{bmatrix}$$

$J(f(x^*))$ dinamakan matriks Jacobian dari f di titik x^*.

Definisi 2.3 (Anton, 1998) Jika $\boldsymbol{A}$ adalah sebuah matriks $n \times n$, maka suatu vektor taknol $\boldsymbol{x}$ pada $\boldsymbol{R^n}$ disebut vektor eigen dari A jika untuk suatu skalar $\boldsymbol{\lambda}$ yang disebut nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$, berlaku

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\lambda x} \tag{2.4}$$

Vektor $\boldsymbol{x}$ disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan $\boldsymbol{\lambda}$.

Untuk menentukan nilai eigen dari matriks $\boldsymbol{A}$ yang berukuran $n \times n$, maka persamaan (2.4) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$(\boldsymbol{\lambda I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{2.5}$$

dimana $\boldsymbol{I}$ merupakan matriks identitas. Agar $\boldsymbol{\lambda}$ dapat menjadi nilai eigen, harus terdapat satu solusi taknol dari persamaan (2.5). Persamaan (2.5) memiliki solusi taknol jika dan hanya jika :

$$det(\boldsymbol{\lambda I} - \boldsymbol{A})x = \mathbf{0} \tag{2.6}$$

Persamaan (2.6) disebut parsamaan karakteristik.

Kestabilan dari titik kesetimbangan pada sistem (2.1) dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen dari matriks Jacobian. Kriteria kastabilan titik kasetimbangan pada sistem (2.1) disajikan pada teorema berikut :

Teorema 2.1 (Hale, 1991)

a. Jika semua nilai eigen dari matriks jacobian $J\ f\ x$ mempunyai bagian real negatif, maka titik kesetimbangan x^* dari sistem (2.1) stabil asimtotik.

b. Jika terdapat nilai eigen dari matriks jacobian $J\ f\ x$ mempunyai bagian real positif, maka titik kesetimbangan x^* dari sistem (2.1) tidak stabil.

Jika persamaan karakteristik yang diperoleh cukup rumit untuk mencari akar-akar karakteristiknya, maka untuk menentukan apakah semua akar-akar karakteristiknya memiliki bagian real negatif dapat digunakan kriteria Routh-Hurwitz.

Teorema 2.2 (R. J. Iswanto, 2012) Diberikan persamaan karakteristik $P\ \lambda\ = 0$, dengan

$$P\ \lambda\ = c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0,\ c_0 > 0.$$

Untuk *n = 2,* kondisi Routh-Hurwitz sebagai berikut : $c_1 > 0$, $c_1c_2 > 0$. Untuk *n=3,* kondisinya *:* $c_3 > 0$, $c_1 > 0$, $c_1c_2 > c_0c_3$. Untuk *n=4,* kondisinya : $c_1 > 0, c_3 > 0, c_4 > 0$, $c_1c_2 > c_0c_3$, $c_3\ c_1c_2 - c_0c_3\ > c_1^2c_4$. Jika kriteria Routh-Hurwitz terpenuhi, maka titik kesetimbangan stabil asimtotik lokal.

2.4 Model SEIRS

Pada model SEIRS, populasi dibagi menjadi 4 kelas yaitu, *susceptible* (*S*), kelas populasi terjangkit *exposed* (*E*), kelas populasi terinfeksi *infected* (*I*), dan yang terakhir kelas *recovered* (*R*) yakni kelas yang sembuh terhadap penyakit yang dibicarakan. Pada model SEIRS, individu hanya mengalami kekebalan sementara, dengan kata lain setelah individu memasuki kelas *recovered* (*R*) ia akan masuk kembali ke kelas rentan atau kelas *susceptible* (*S*).

Dalam model SEIRS ini digunakan asumsi-asumsi sebagai berikut:

a. Populasi tertutup dan konstan.

b. Penyakit tidak fatal.

c. Individu yang lahir masuk kedalam kelas *susceptible* (S).

d. Laju kelahiran sama dengan laju kematian alami..

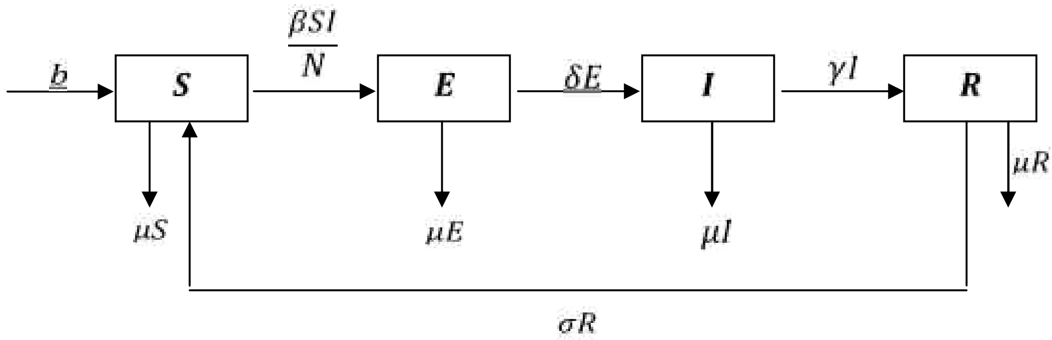
e. Laju kontak diperhatikan, dinyatakan dengan $\beta > 0$.

f. Laju perubahan individu dari kelas *exposed* menjadi *infected* diperhatikan, dinyatakan dengan $\delta > 0$.

g. Laju kesembuhan penyakit diperhatikan, dinyatakan dengan $\gamma > 0$.

h. Individu yang sembuh hanya mengalami kekebalan sementara, sehingga individu tersebut masuk kembali kekelas rentan atau *susceptible* (S) dinyatakan dengan $\sigma > 0$.

Berdasarkan asumsi tersebut, diperoleh diagram transfer dari model SEIRS sebagai berikut:



Gambar 2.1 Diagram Transfer Model SEIRS

Berdasarkan diagram transfer di atas maka diperoleh sistem persamaan differensial sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = b + \sigma R - \frac{\beta SI}{N} - \mu S \qquad (2.6.a)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - (\mu + \delta)E \qquad (2.6.b)$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - (\mu + \gamma)I \qquad (2.6.c)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - (\mu + \sigma)R \qquad (2.6.d)$$

$$S + E + I + R = N \qquad (2.6.e)$$

Sistem persamaan differensial (2.6) mempunyai solusi (S, E, I, R) sebagai himpunan $\Phi = \{(S, E, I, R) | S \geq 0, E \geq 0, I \geq 0, R \geq 0, S + E + I + R = N\}$.

1. Titik Ekuilibrium (Kesetimbangan)

Sebelum menentukan titik ekuilibrium dari model, maka sistem (2.6) akan direduksi terlebih dahulu. Tujuannya agar proses pengerjaan dalam menentukan sifat kestabilannya tidak terlalu rumit dan hasil yang diperoleh lebih sederhana. Persamaan yang akan dihilangkan dari sistem (2.6) yaitu persamaan (2.6.d) dan (2.6.e), sehingga sistem (2.6) akan menjadi

$$\frac{dS}{dt} = b + \sigma R - \frac{\beta SI}{N} - \mu S \quad (2.7.a)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\beta SI}{N} - (\mu + \delta) E \quad (2.7.b)$$

$$\frac{dI}{dt} = \delta E - (\mu + \gamma) I \quad (2.7.c)$$

Solusi sistem (2.7) merupakan himpunan $\mathbf{\Omega} = \{(S, E, I) | S \geq 0, E \geq 0, I \geq 0, S + E + I \leq N\}$.

a) Titik ekuilibrium bebas penyakit

Titik ekuilibrium bebas penyakit menandakan bahwa dalam suatu populasi tidak ada individu yang terinfeksi oleh penyakit yang dibicarakan, sehingga $\hat{I} = 0$. Titik ekuilibrium bebas penyakit dinotasikan sebagai $(\hat{S}, \hat{E}, \hat{I})$.

Berdasarkan persamaan (2.7.c) diperoleh

$$\delta \hat{E} - (\mu + \gamma) \hat{I} = 0$$

$$\delta \hat{E} - (\mu + \gamma) 0 = 0$$

$$\delta \hat{E} = 0$$

$$\hat{E} = 0$$

Kemudian Subtitusikan $\hat{I} = 0$ ke persamaan (2.7.a)

$$b + \sigma \hat{R} - \frac{\beta \hat{S} \hat{I}}{N} - \mu \hat{S} = 0$$

$$b + \sigma \hat{R} - \mu \hat{S} = 0$$

$$-\mu \hat{S} = -(b + \sigma \hat{R})$$

$$\hat{S} = \frac{b + \sigma\hat{R}}{\mu}$$

Untuk memperoleh nilai $\hat{S}$, harus ditentukan terlebih dahulu nilai $\hat{R}$. Nilai $\hat{R}$ dapat ditentukan dengan cara subtitusikan $\hat{I} = 0$ ke persamaan (2.6.d)

$$\gamma\hat{I} - (\mu + \sigma)\hat{R} = 0$$

$$\gamma(0) - (\mu + \sigma)\hat{R} = 0$$

$$-(\mu + \sigma)\hat{R} = 0$$

$$\hat{R} = 0$$

Sehingga diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit $(\hat{S}, \hat{E}, \hat{I}) = \left(\frac{b}{\mu}, 0, 0\right)$.

b) Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit

Endemik merupakan suatu keadaan jika dalam suatu populasi selalu terdapat individu yang terinfeksi penyakit, sehingga $I^* \neq 0$. Titik ekuilibrium endemik penyakit dinotasikan sebagai (S^*, E^*, I^*).

Berdasarkan persamaan (2.7.c), diperoleh

$$\delta E^* - (\mu + \alpha)I^* = 0$$

$$\delta E^* = (\mu + \gamma)I^*$$

$$E^* = \frac{(\mu + \gamma)I^*}{\delta}$$

Kemudian subtitusikan E^* ke persamaan (2.7.b), sehingga diperoleh

$$\frac{\beta S^* I^*}{N} - (\mu + \delta)E^* = 0$$

$$\frac{\beta S^* I^*}{N} - (\mu + \delta)\left(\frac{(\mu+\gamma)I^*}{\delta}\right) = 0$$

$$\frac{\beta S^* I^*}{N} - (\mu + \delta)\left(\frac{\mu+\gamma}{\delta}\right)I^* = 0$$

$$\frac{\beta S^*}{N} - (\mu + \delta)\left(\frac{\mu+\gamma}{\delta}\right) = 0$$

$$\frac{\beta S^*}{N} = (\mu + \delta)\left(\frac{\mu+\gamma}{\delta}\right)$$

$$S^* = \frac{(\mu + \delta)(\mu + \gamma)}{\delta\beta}N$$

Selanjutnnya subtitusikan S^* ke persamaan (2.7.a), sehingga persamaan tersebut menjadi :

$$b + \sigma R^* - \frac{\beta S^* I^*}{N} - \mu S^* = 0$$

$$b + \sigma R^* - \frac{\beta\left(\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}N\right) I^*}{N} - \mu\left(\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}N\right) = 0$$

$$-\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta} I^* = -\left(b + \sigma R^* - \frac{\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}\right)$$

$$I^* = \frac{-\left(b+\sigma R^* - \frac{\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}\right)}{-\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta}}$$

$$I^* = \frac{b+\sigma R^* - \frac{\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}}{\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta}}$$

$$I^* = \frac{(b+\sigma R^*)\delta}{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)} - \frac{\mu N}{\beta}$$

Untuk mendapatkan nilai I^*, harus ditentukan terlebih dahulu nilai dari R^*. Subtitusikan I^* ke persamaan (2.6.d).

$$\gamma I^* - (\mu + \sigma)R^* = 0$$

$$\gamma\left(\frac{(b+\sigma R^*)\delta}{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)} - \frac{\mu N}{\beta}\right) - (\mu + \sigma)R^* = 0$$

$$\frac{\gamma\delta(b+\sigma R^*)}{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)} - \frac{\gamma\mu N}{\beta} - (\mu + \sigma)R^* = 0$$

$$-(\mu + \sigma)R^* = -\left(\frac{\gamma\delta(b+\sigma R^*)}{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)} - \frac{\gamma\mu N}{\beta}\right)$$

$$(\mu + \sigma)R^* = \frac{\gamma\delta(b+\sigma R^*)}{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)} - \frac{\gamma\mu N}{\beta}$$

$$(\mu + \sigma)R^* - \frac{\gamma\delta(b+\sigma R^*)}{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)} = -\frac{\gamma\mu N}{\beta}$$

$$(\mu + \sigma)R^* - \frac{\gamma\delta b+\gamma\delta\sigma R^*}{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)} = -\frac{\gamma\mu N}{\beta}$$

$$\frac{(\mu+\sigma)(\mu+\delta)(\mu+\gamma)R^* - \gamma\delta b - \gamma\delta\sigma R^*}{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)} = -\frac{\gamma\mu N}{\beta}$$

$$\frac{R^*\left((\mu+\sigma)(\mu+\delta)(\mu+\gamma) - \gamma\delta\sigma\right) - \gamma\delta b}{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)} = -\frac{\gamma\mu N}{\beta}$$

$$R^*\left((\mu+\sigma)(\mu+\delta)(\mu+\gamma) - \gamma\delta\sigma\right) - \gamma\delta b = -\frac{\gamma\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\beta}$$

$$R^*\left((\mu+\sigma)(\mu+\delta)(\mu+\gamma) - \gamma\delta\sigma\right) = -\frac{\gamma\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\beta} + \gamma\delta b$$

$$R^{*}\left((\mu+\sigma)(\mu+\delta)(\mu+\gamma)-\gamma\delta\sigma\right)=\frac{\beta\gamma\delta b-\gamma\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\beta}$$

$$R^{*}=\frac{\beta\gamma\delta b-\gamma\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\beta\left((\mu+\sigma)(\mu+\delta)(\mu+\gamma)-\gamma\delta\sigma\right)}$$

Selanjutnya subtitusi R^{*} ke I^{*}.

$$I^{*}=\frac{(b+\sigma R^{*})\delta}{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}-\frac{\mu N}{\beta}$$

$$=\frac{\delta b+\delta\sigma R^{*}}{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}-\frac{\mu N}{\beta}$$

$$I^{*}=\frac{\delta b+\delta\sigma\frac{\beta\gamma\delta b-\gamma\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\beta\left((\mu+\sigma)(\mu+\delta)(\mu+\gamma)-\gamma\delta\sigma\right)}}{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}-\frac{\mu N}{\beta}$$

Kemudian subsitusikan I^{*} ke E^{*}.

$$E^{*}=\frac{(\mu+\gamma)\left(\frac{\delta b+\delta\sigma\frac{\beta\gamma\delta b-\gamma\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\beta\left((\mu+\sigma)(\mu+\delta)(\mu+\gamma)-\gamma\delta\sigma\right)}}{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}-\frac{\mu N}{\beta}\right)}{\delta}$$

$$E^{*}=\frac{b+\sigma\frac{\beta\gamma\delta b-\gamma\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\beta\left((\mu+\sigma)(\mu+\delta)(\mu+\gamma)-\gamma\delta\sigma\right)}}{\mu+\delta}-\frac{\mu(\mu+\gamma)N}{\beta\delta}$$

Jadi, titik ekuilibrium endemik penyakit $(S^{*},E^{*},I^{*})=\left(\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\delta\beta}N,\right.$

$$\left.\frac{\delta b+\delta\sigma\frac{\beta\gamma\delta b-\gamma\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\beta\left((\mu+\sigma)(\mu+\delta)(\mu+\gamma)-\gamma\delta\sigma\right)}}{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}-\frac{\mu N}{\beta},\ \frac{b+\sigma\frac{\beta\gamma\delta b-\gamma\mu N(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\beta\left((\mu+\sigma)(\mu+\delta)(\mu+\gamma)-\gamma\delta\sigma\right)}}{\mu+\delta}-\frac{\mu(\mu+\gamma)N}{\beta\delta}\right)$$

2. Kestabilan Titik Ekuilibrium

Setelah diperoleh titik ekuilibrium, selanjutnya akan diselidiki kestabilan titik ekuilibriumnya. Kestabilan titik ekuilibrium dapat dilihat menggunakan Matriks Jacobian. Matriks Jacobian dari model SEIRS adalah :

$$Jf(S,E,I)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial S} & \frac{\partial f_1}{\partial E} & \frac{\partial f_1}{\partial I}\\ \frac{\partial f_2}{\partial S} & \frac{\partial f_2}{\partial E} & \frac{\partial f_2}{\partial I}\\ \frac{\partial f_3}{\partial S} & \frac{\partial f_3}{\partial E} & \frac{\partial f_3}{\partial I}\end{pmatrix}$$

dengan

$$f_1(S,E,I) = b + \sigma R - \frac{\beta SI}{N} - \mu S$$

$$f_2(S,E,I) = \frac{\beta SI}{N} - (\mu + \delta) E$$

$$f_3(S,E,I) = \delta E - (\mu + \gamma) I$$

Kemudian ditentukan terlebih dahulu turunan dari masing-masing fungsi terhadap variabelnya, sehingga diperoleh :

$\frac{\partial f_1(S,E,I)}{\partial S} = -\mu - \frac{\beta I}{N}$; $\frac{\partial f_1(S,E,I)}{\partial E} = 0$; $\frac{\partial f_1(S,E,I)}{\partial I} = -\frac{\beta S}{N}$;

$\frac{\partial f_2(S,E,I)}{\partial S} = \frac{\beta I}{N}$; $\frac{\partial f_2(S,E,I)}{\partial E} = -(\mu + \delta)$; $\frac{\partial f_2(S,E,I)}{\partial I} = \frac{\beta S}{N}$;

$\frac{\partial f_3(S,E,I)}{\partial S} = 0$; $\frac{\partial f_3(S,E,I)}{\partial E} = \delta$; $\frac{\partial f_3(S,E,I)}{\partial I} = -(\mu + \gamma)$;

Turunan yang telah diperoleh kemudian dibentuk kedalam matriks jacobian sebagai berikut :

$$Jf(S,E,I) = \begin{pmatrix} -\mu - \frac{\beta I}{N} & 0 & -\frac{\beta S}{N} \\ \frac{\beta I}{N} & -\mu - \delta & \frac{\beta S}{N} \\ 0 & \delta & -\mu - \gamma \end{pmatrix}$$

a) Kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit.

Kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit dapat diselidiki dengan cara subtitusikan titik ekuilibrium bebas penyakit $Jf(\hat{S},\hat{E},\hat{I}) = \left(\frac{b}{\mu}, 0, 0\right)$ ke matriks $Jf(S,E,I)$, sehingga diperoleh :

$$Jf(\hat{S},\hat{E},\hat{I}) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\frac{\beta \frac{b}{\mu}}{N} \\ 0 & -\mu - \delta & \frac{\beta \frac{b}{\mu}}{N} \\ 0 & \delta & -\mu - \gamma \end{pmatrix}$$

Jumlah populasi ketika bebas penyakit yaitu $N = \hat{S} + \hat{E} + \hat{I} + \hat{R}$. Karena $\hat{S} = \frac{b}{\mu}$ dan $\hat{E} = \hat{I} = \hat{R} = 0$, maka $N = \frac{b}{\mu}$. Sehingga matriks $Jf(\hat{S},\hat{E},\hat{I})$ menjadi :

$$Jf(\hat{S},\hat{E},\hat{I}) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\beta \\ 0 & -\mu - \delta & \beta \\ 0 & \delta & -\mu - \gamma \end{pmatrix}$$

Kemudian akan dicari nilai eigen dari matriks di atas

$$\det\left(\lambda I - Jf\left(\hat{S},\hat{E},\hat{I}\right)\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\beta \\ 0 & -\mu-\delta & \beta \\ 0 & \delta & -\mu-\gamma \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} \lambda+\mu & 0 & \beta \\ 0 & \lambda+\mu+\delta & -\beta \\ 0 & -\delta & \lambda+\mu+\gamma \end{pmatrix} = 0$$

Sehingga didapatkan persamaan karakteristiknya sebagai berikut :

$$(\lambda+\mu)(\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\gamma) - (\lambda+\mu)\beta\delta = 0$$

$$(\lambda+\mu)\left((\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\gamma) - \beta\delta\right) = 0$$

Kemudian akan ditentukan nilai eigen dari persamaan karakteristik di atas, dengan penyelesaian sebagai berikut :

- $(\lambda+\mu) = 0$

  $\lambda_1 = -\mu$

- $(\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\gamma) - \beta\delta$

  $\lambda^2 + ((\mu+\delta)(\mu+\gamma))\lambda + (\mu+\delta)(\mu+\gamma) - \beta\delta = 0$

Misalkan $B = (\mu+\delta)(\mu+\gamma)$ dan $C = (\mu+\delta)(\mu+\gamma) - \beta\delta$

Maka persamaan di atas menjadi

$$\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

$$\lambda_2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4C}}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4C}}{2}$$

dengan

$$C = (\mu+\delta)(\mu+\gamma) - \beta\delta$$

$$= 1 - \frac{\beta\delta}{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}$$

jika $\beta\delta < (\mu+\delta)(\mu+\gamma)$ maka λ_2 dan λ_3 bernilai real negatif, sehingga dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit $\left(\hat{S},\hat{E},\hat{I}\right) = \left(\frac{b}{\mu},0,0\right)$ stabil asimtotik lokal jika $\beta\delta < (\mu+\delta)(\mu+\gamma)$.

b) Kestabilan titik ekuilibrium endemik penyakit.

Kestabilan titik ekuilibrium endemik penyakit dapat dilihat dengan cara subtitusikan titik ekuilibrium (S^*, E^*, I^*) ke matriks $Jf(S, E, I)$, sehingga diperoleh :

$$Jf(S,E,I) = \begin{pmatrix} -\mu - \frac{\beta I}{N} & 0 & -\frac{\beta S}{N} \\ \frac{\beta I}{N} & -\mu - \delta & \frac{\beta S}{N} \\ 0 & \delta & -\mu - \gamma \end{pmatrix}$$

$$Jf(S^*,E^*,I^*) = \begin{pmatrix} -\mu - \frac{\beta I^*}{N} & 0 & -\frac{\beta S^*}{N} \\ \frac{\beta I^*}{N} & -\mu - \delta & \frac{\beta S^*}{N} \\ 0 & \delta & -\mu - \gamma \end{pmatrix}$$

Kemudian akan dicari nilai eigen dari matriks di atas

$$det\left(\lambda I - Jf(S^*,E^*,I^*)\right) = 0$$

$$det\left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\mu - \frac{\beta I^*}{N} & 0 & -\frac{\beta S^*}{N} \\ \frac{\beta I^*}{N} & -\mu - \delta & \frac{\beta S^*}{N} \\ 0 & \delta & -\mu - \gamma \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\mu - \frac{\beta I^*}{N} & 0 & -\frac{\beta S^*}{N} \\ \frac{\beta I^*}{N} & -\mu - \delta & \frac{\beta S^*}{N} \\ 0 & \delta & -\mu - \gamma \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$det\begin{pmatrix} \lambda + \mu + \frac{\beta I^*}{N} & 0 & \frac{\beta S^*}{N} \\ -\frac{\beta I^*}{N} & \lambda + \mu + \delta & -\frac{\beta S^*}{N} \\ 0 & -\delta & \lambda + \mu + \gamma \end{pmatrix} = 0$$

Berdasarkan determinan dari matriks di atas, maka diperoleh persamaan karakteristiknya sebagai berikut :

$$\left(\lambda + \mu + \frac{\beta I^*}{N}\right)(\lambda + \mu + \delta)(\lambda + \mu + \gamma) + \left(\frac{\beta S^*}{N}\right)\left(-\frac{\beta I^*}{N}\right)(-\delta)$$
$$- \left(\lambda + \mu + \frac{\beta I^*}{N}\right)\left(-\frac{\beta S^*}{N}\right)(-\delta) = 0$$

$$\left(\lambda+\mu+\frac{\beta I^*}{N}\right)(\lambda+\mu+\delta)(\lambda+\mu+\gamma)-\left(\lambda+\mu+\frac{\beta I^*}{N}\right)\left(\frac{\beta S^*}{N}\right)\delta$$
$$+\left(\frac{\beta S^*}{N}\right)\left(\frac{\beta I^*}{N}\right)\delta=0$$

Misalkan $p=\mu+\frac{\beta I^*}{N}$, $q=(\mu+\delta)$, $r=(\mu+\gamma)$, $z=\left(\frac{\beta S^*}{N}\right)\delta$

$$(\lambda+p)(\lambda+q)(\lambda+r)-(\lambda+p)z+\left(\frac{\beta I^*}{N}\right)z=0$$

$$\lambda^3+(p+q+r)\lambda^2+(pq+pr+qr-z)\lambda+pqr-pz+\left(\frac{\beta I^*}{N}\right)z=0$$

Misalkan :

$$c_0=1$$
$$c_1=p+q+r$$
$$c_2=pq+pr+qr-z$$
$$c_3=pqr-pz+\left(\frac{\beta I^*}{N}\right)z$$

Sehingga persamaan karakteristik di atas menjadi :

$$c_0\lambda^3+c_1\lambda^2+c_2\lambda+c_3=0$$

Berdasarkan Teorema 2.1 (kriteria Routh Hurwitz), titik ekuilibrium endemik penyakit (S^*, E^*, I^*) stabil asimtotik lokal jika $c_3>0$, $c_1>0$, $c_1c_2>c_0c_3$. Sekarang, akan dibuktikan bahwa $c_3>0$, $c_1>0$, $c_1c_2>c_0c_3$.

(a) Akan ditunjukkan $c_3>0$.

$$c_3=pqr-pz+\left(\frac{\beta I^*}{N}\right)z$$

Subtitusi z ke c_3, sehingga

$$c_3=pqr-p\left(\frac{\beta S^*}{N}\right)\delta+\left(\frac{\beta I^*}{N}\right)\left(\frac{\beta S^*}{N}\right)\delta$$

Selanjutnya subtitusikan S^* ke c_3, sehingga persamaannya menjadi :

$$c_3=pqr-p\left(\frac{\beta\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\beta\delta}N}{N}\right)\delta+\left(\frac{\beta\frac{(\mu+\delta)(\mu+\gamma)}{\beta\delta}N}{N}\right)\delta+\left(\frac{\beta I^*}{N}\right)$$

$$c_3=pqr-p(\mu+\delta)(\mu+\gamma)+(\mu+\delta)(\mu+\gamma)\left(\frac{\beta I^*}{N}\right)$$

Karena $q=(\mu+\delta)$ dan $r=(\mu+\gamma)$, maka

$$c_3 = pqr - pqr + qr \frac{\beta I^*}{N}$$

$$c_3 = qr \frac{\beta I^*}{N}$$

$$c_3 = \mu + \delta \quad \mu + \gamma \quad \frac{\beta I^*}{N} > 0$$

Sehingga terbukti $c_3 > 0$.

(b) Akan ditunjukkan $c_1 > 0$.

$$c_1 = p + q + r$$

$$c_1 = \mu + \frac{\beta I^*}{N} + \mu + \delta + \mu + \gamma > 0$$

Terbukti $c_1 > 0$.

(c) Akan ditunjukkan $c_1 c_2 > c_0 c_3$.

$c_1 c_2 > c_0 c_3$ jika dan hanya jika $c_1 c_2 - c_0 c_3 > 0$.

$$c_1 c_2 - c_0 c_3 = p + q + r \quad pq + pr + qr - z - qr \frac{\beta I^*}{N}$$

$$c_1 c_2 - c_0 c_3 = p^2 q + pq^2 + pqr + p^2 r + pr^2 + pqr + q^2 r + qr^2 + pqr - pz - qz - rz - qr \frac{\beta I^*}{N}$$

$$= p^2 q + pq^2 + pqr + p^2 r + pr^2 + pqr + q^2 r + qr^2 + pqr - pqr - q^2 r - qr^2 - qr \frac{\beta I^*}{N}$$

$$= p^2 q + pq^2 + pqr + p^2 r + pr^2 + q^2 r + qr^2 + pqr - pqr - q^2 r - qr^2 + pqr - qr \frac{\beta I^*}{N}$$

$$= p^2 q + pq^2 + pqr + p^2 r + pr^2 + pqr - qr \frac{\beta I^*}{N}$$

$$= p^2 q + pq^2 + pqr + p^2 r + pr^2 + qr \quad p - \frac{\beta I^*}{N}$$

$$= p^2 q + pq^2 + pqr + p^2 r + pr^2 + qr \quad \mu + \frac{\beta I^*}{N} - \frac{\beta I^*}{N}$$

$$c_1 c_2 - c_0 c_3 = p^2 q + pq^2 + pqr + p^2 r + pr^2 + \mu qr > 0$$

$c_1 c_2 - c_0 c_3 > 0$, sehingga terbukti $c_1 c_2 > c_0 c_3$.

Berdasarkan Teorema 2.2 (kriteria Routh Hurwitz), terbukti bahwa titik ekuilibrium endemik penyakit (S^*, E^*, I^*) stabil asimtotik lokal.