BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Sistem Persamaan Non Linear

Definisi 2.1 (Munir, 2006) : Sistem persamaan non linear adalah kumpulan dari dua atau lebih persamaan-persamaan non linear. Bentuk umum sistem persamaan nonlinear dapat ditulis sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f_1 \;\; x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n &= 0 \\
f_2 \;\; x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n &= 0 \\
\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad &\vdots \\
f_n \;\; x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n &= 0
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Penyelesaian sistem ini adalah himpunan nilai $x = \;\; x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ yang memenuhi seluruh persamaan.

Contoh 2.1

$$
\begin{aligned}
x^2 + xy &= 10 \\
y + 3x^2 &= 57
\end{aligned}
$$

Contoh di atas adalah dua persamaan non linear simultan dengan bilangan yang tidak diketahui x dan y. Persamaan-persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk di bawah ini:

$$
\begin{aligned}
u \;\; x, y &= 0 \\
v \;\; x, y &= 0
\end{aligned}
$$

yaitu

$$
\begin{aligned}
u \;\; x, y &= x^2 + xy - 10 \\
v \;\; x, y &= y + 3xy^2 - 57
\end{aligned}
$$

Jadi, penyelesaiannya akan berupa nilai-nilai x dan y yang membuat fungsi $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ sama dengan nol.

2.2 Metode Numerik

Definisi 2.2 (Munir, 2006) : Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau arimetika biasa (tambah, kurang, kali dan bagi).

Berbagai permasalahan dalam bidang ilmu pengetahuan dan teknologi dapat digambarkan dalam bentuk persamaan matematika. Apabila persamaan tersebut mempunyai bentuk sederhana, maka dapat diselesaikan dengan metode analitik, tetapi pada umumnya bentuk persamaan sulit diselesaikan dengan metode analitik, sehingga dalam penyelesaiannya menggunakan metode numerik.

Perbedaan utama antara metode numerik dengan metode analitik terletak pada dua hal. Pertama, solusi dengan menggunakan metode numerik selalu berbentuk angka, sedangkan metode analitik menghasilkan solusi dalam bentuk fungsi matematik, yang selanjutnya fungsi matematik tersebut dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka. Kedua, dengan metode numerik, solusi yang diperoleh hanya solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sejati sehingga metode numerik dinamakan juga solusi hampiran atau solusi pendekatan, namun solusi hampiran dapat dibuat seteliti mungkin.

2.3 Galat *(error)*

Pada umumnya metode numerik tidak mengutamakan diperolehnya jawab yang eksak (tepat) dari persoalan yang sedang diselesaikan. Penyelesaian yang didapatkan berupa penyelesaian pendekatan, oleh karena itu biasanya timbul galat *(error)*. Galat (*error*) memperlihatkan seberapa dekat solusi hampiran atau pendekatan terhadap solusi sejatinya. Semakin kecil galat, semakin teliti solusi numerik yang didapatkan.

Definisi 2.3 (Munif dan Aries, 2003) : Error yang kecil ditunjukkan dengan adanya konvergenitas. Pada proses iterasi konvergenitas terjadi jika error pada iterasi pertama lebih besar dari error iterasi kedua, error iterasi kedua lebih besar dari iterasi ketiga dan error iterasi ke-n lebih besar dari iterasi ke-$n+1$, secara matematis ditulis:

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 \ldots > \varepsilon_n > \varepsilon_{n+1} \qquad (2.2)$$

konvergenitas tersebut merupakan syarat penyelesaian pada perhitungan numerik dengan proses iterasi.

2.4 Metode Titik Tetap

Definisi 2.4 (Munir, 2006) : Metode Titik Tetap disebut juga metode iterasi sederhana, metode langsung atau metode sulih beruntun.

Metode ini disebut metode sederhana karena pembentukan prosedur iterasinya mudah dibentuk. Metode ini memisahkan x sedemikian sehingga $f \;\; x \;\; = 0$ ekivalen dengan $x = g(x)$ dengan bentuk prosedur iterasinya $x_{r+1} = g(x_r)$.

Prosedur iterasi Titik Tetap untuk sistem dengan dua persamaan non linear :

$$x_{r+1} = g_1(x_r, y_r) \tag{2.3}$$

$$y_{r+1} = g_2(x_r, y_r) \tag{2.4}$$

dimana $r = 0,1,2, \ldots$

Iterasi akan berhenti jika:

$$|x_{r+1} - x_r| < \varepsilon$$

atau

$$\frac{x_{r+1} - x_r}{x_{r+1}} < \delta$$

dengan ε dan δ yang telah ditetapkan sebelumnya.

Syarat perlu kekonvergenan metode iterasi Titik Tetap untuk sistem persamaan nonlinear adalah:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} < 1$$

dan (2.5)

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} < 1$$

di dalam selang yang mengandung Titik Tetap p, q .

Contoh 2.2

Selesaikan sistem persamaan non linear berikut dengan metode Titik Tetap:

$$x^2 - 2y = 3$$

$$4x - y^2 = -1$$

dengan toleransi galat $\varepsilon = 0.00001$.

Penyelesaian:

Langkah 1: Mengubah bentuk persamaan $f_1(x, y)$ dan $f_2(x, y)$ menjadi bentuk $x = g_1(x, y)$ dan $y = g_2(x, y)$:

$$x = \sqrt{2y + 3}$$

$$y = \sqrt{4x + 1}$$

jadi

$$g_1(x, y) = \sqrt{2y + 3}$$

$$g_2(x, y) = \sqrt{4x + 1}$$

Kemudian mencari turunan dari fungsi di atas, adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2y + 3}}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{4x + 1}} \quad ; \quad \frac{\partial g_2}{\partial y} = 0$$

Langkah 2: Menentukan nilai tebakan awal $x_0 = 1$ dan $y_0 = 2$, kemudian menghitung nilai turunan fungsi yaitu sebagai berikut:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2y + 3}} = \frac{1}{\sqrt{2(2) + 3}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = 0.378$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} = \frac{2}{\sqrt{4x + 1}} = \frac{2}{\sqrt{4(1) + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0.894$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial y} = 0$$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial y} = 0.378 < 1$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} = 0.894 < 1$$

Jadi, syarat melakukan iterasi terpenuhi.

Langkah 3: Prosedur iterasinya adalah:

$$x_{r+1} = \sqrt{2y_r + 3}$$

$$y_{r+1} = \sqrt{4x_r + 1}$$

Melakukan iterasi:

Iterasi ke-1

$$x_{(1)} = \sqrt{2\ 2 + 3} = \sqrt{7} = 2.64575$$

$$y_{(1)} = \sqrt{4\ 1 + 1} = \sqrt{5} = 2.23607$$

Iterasi k-2

$$x_{\ 2} = \sqrt{2\ 2.23607 + 3} = \sqrt{7.47214} = 2.73352$$

$$\varepsilon_x = 2.73352 - 2.64575 = 0.08777$$

$$y_{(2)} = \sqrt{4\ 2.64575 + 1} = \sqrt{11.583} = 3.40338$$

$$\varepsilon_y = 3.40338 - 2.23607 = 1.16731$$

Iterasi ke-3

$$x_{(3)} = \sqrt{2(3.40338 + 3} = \sqrt{9.80676} = 3.13157$$

$$\varepsilon_x = 3.13157 - 2.73352 = 0.39805$$

$$y_{(3)} = \sqrt{4\ 2.73352 + 1} = \sqrt{11.93408} = 3.45457$$

$$\varepsilon_y = 3.45457 - 3.40338 = 0.05119$$

⋮

Iterasi ke-17

$$x_{(17)} = \sqrt{2(3.73382) + 3} = \sqrt{10.46764} = 3.23537$$

$$\varepsilon_x = 3.23537 - 3.23537 = 0.00000$$

$$y_{(17)} = \sqrt{4(3.23537) + 1} = \sqrt{13.94148} = 3.73383$$

$$\varepsilon_y = 3.73383 - 3.73382 = 0.00001$$

Berdasarkan perhitungan iterasi ke-17 diperoleh nilai yang mendekati nilai konvergensi yang diinginkan yaitu nilai $x = 3.23537$ dan $y = 3.73383$ dengan galat kecil dari toleransi galat $\varepsilon = 0.00001$ yaitu galat untuk $x = 0.00000$ dan $y = 0.00001$.

2.5 Metode Gauss-Seidel

Definisi 2.5 (Ripai, 2012) : Metode Gauss-Seidel merupakan cara penyelesaian sistem persamaan non linear dengan menentukan nilai x_i^{n+1} berdasarkan nilai x_i^n yang paling baru.

Persamaan umum untuk metode Gauss-Seidel diberikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_1^{i+1} &= g_1(x_1^i,\ x_2^i,\ x_3^i \dots ,x_n^i) \\ x_2^{i+1} &= g_2(x_1^{i+1},\ x_2^i,\ x_3^i \dots ,x_n^i) \\ x_3^{i+1} &= g_3(x_1^{i+1},\ x_2^{i+1},\ x_3^i \dots ,x_n^i) \\ \vdots &= \qquad \vdots \\ x_n^{i+1} &= g_n(x_1^{i+1},\ x_2^{i+1}, \dots , x_{n-1}^i , x_n^i) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Iterasi dimulai dengan memberikan nilai awal untuk x:

$$x^{(0)} = \begin{matrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{matrix}$$

iterasi akan berhenti jika:

$$x_1^{i+1} - x_1^i < \varepsilon$$

atau

$$\frac{x_1^{i+1} - x_1^{i}}{x_1^{i+1}} < \delta$$

, untuk $i = 1,2,3,\ldots,n$

Contoh 2.3

Selesaikan sistem persamaan nonlinear berikut dengan metode Gauss-Seidel:

$$x^2 - 2y = 3$$

$$4x - y^2 = -1$$

dengan toleransi galat $\varepsilon = 0.00001$

Penyelesaian:

Langkah 1:

Menentukan fungsi analitik dari sistem persamaan non linear di atas adalah sebagai berikut:

$$f_1\ x, y\ = x^2 - 2y - 3 = 0$$

$$f_2\ x, y\ = 4x - y^2 + 1 = 0$$

dan solusi analitiknya adalah:

$$g_1\ x, y\ = \sqrt{2y + 3}$$

$$g_2\ x, y\ = \sqrt{4x + 1}$$

Langkah 2 :

Menentukan nilai tebakan awal untuk nilai $x_0 = 1$ dan $y_0 = 2$

Langkah 3 : Prosedur iterasinya adalah:

$$x^{i+1} = \sqrt{2y^{i} + 3}$$

$$y^{i+1} = \sqrt{4x^{i} + 1}$$

Melakukan proses iterasi:

Iterasi ke-1

$$x^{\ 1\ } = \sqrt{2y + 3} = \sqrt{2\ 2\ + 2} = 2.64575$$

$$y^{(1)} = \sqrt{4x + 1} = \sqrt{4(2.64575 + 1)} = 3.40338$$

Iterasi ke-2

$$x^{2} = \sqrt{2\;3.40338\;+3} = \sqrt{6.80676} = 3.13157$$

$$\varepsilon_x = 3.13157 - 2.64575 = 0.48582$$

$$y^{(2)} = \sqrt{4\;3.13157\;+1} = \sqrt{13.52628} = 3.67781$$

$$\varepsilon_y = 3.67781 - 3.40338 = 0.27443$$

Iterasi ke-3

$$x^{(3)} = \sqrt{2\;3.67781\;+3} = \sqrt{10.35262} = 3.21801$$

$$\varepsilon_x = 3.21801 - 3.13157 = 0.08644$$

$$y^{(3)} = \sqrt{4\;3.21801\;+1} = \sqrt{13.87204} = 3.72452$$

$$\varepsilon_y = 3.72452 - 3.67781 = 0.04671$$

$$\vdots$$

Iterasi ke-8

$$x^{(8)} = \sqrt{2\;3.73382\;+3} = \sqrt{10.46764} = 3.23537$$

$$\varepsilon_x = 3.23537 - 3.23536 = 0.00001$$

$$y^{8} = \sqrt{4\;3.23537\;+1} = \sqrt{13.9415} = 3.73383$$

$$\varepsilon_y = 3.73383 - 3.73382 = 0.00001$$

Berdasarkan perhitungan iterasi ke-8 diperoleh nilai yang mendekati nilai konvergensi yang diinginkan yaitu nilai $x = 3.23537$ dan $y = 3.73383$ dengan galat yang kecil dari toleransi galat $\varepsilon = 0.00001$ yaitu galat untuk $x = 0.00001$ dan $y = 0.00001$.

2.6 Membandingkan Beberapa Metode untuk Menentukan Metode Terbaik

Nanda Ningtyas Ramadhani Utami dkk (2013) membandingkan dua metode dalam menyelesaikan sistem persamaan non linear. Metode tersebut adalah metode Newton-Raphson dan metode Jacobian dengan jurnalnya yang berjudul Perbandingan Solusi Sistem Persamaan Non Linear Menggunakan Metode Newton-Raphson dan Metode Jacobian. Pada jurnal tersebut, kedua metode dibandingkan dengan melihat jumlah iterasinya. Metode yang paling kecil jumlah iterasinya untuk memperoleh nilai hampiran yang konvergen merupakan metode terbaik dalam menyelesaikan suatu sistem persamaan non linear.

Selain dari jumlah iterasi, beberapa metode juga dapat dibandingkan dari nilai galat yang diperoleh. Metode mana yang dengan cepat mendapatkan nilai galat yang lebih kecil dari toleransi galat yang telah ditetapkan. Seperti dalam buku karangan Ripai, S.Si, M.Si (2012) yang berjudul Pengantar Analisis dan Komputasi Metode numerik yang membandingkan nilai galat metode Jacobian, metode Gauss-Seidel dan metode Newton Raphson pada solusi sistem persamaan non linear.