`BAB II
LANDASAN TEORI

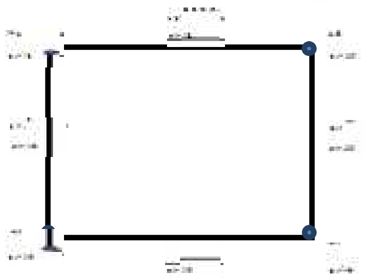
Landasan teori yang digunakan sebagai materi pendukung untuk menyelesaikan permasalahan yang dibahas dalam Bab IV adalah teori graf, subgraf, subgraf komplit, graf terhubung, graf piramida, graf berlian, graf bintang, pewarnaan graf, dan graf *perfect*.

2.1 Graf

Definisi 2.1 (Rinaldi Munir, 2007) Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edge* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul.

Definisi 2.1 menyatakan bahwa V tidak boleh kosong sedangkan E boleh kosong, jadi sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi simpulnya harus ada minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu titik tanpa sisi dinamakan **graf trivial.**

Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Perhatikan contoh graf G di bawah ini.



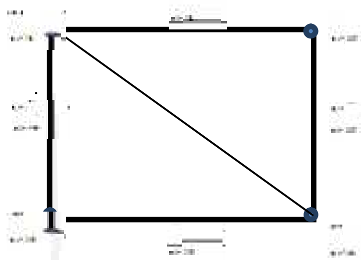
Gambar 2.1 Titik dan Sisi pada Graf

Gambar 2.1 memperlihatkan graf dengan himpunan simpul V dan himpunan sisi E sebagai berikut :

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ dengan $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_2, v_4)$, $e_3 = (v_3, v_4)$ dan $e_4 = (v_1, v_3)$.

Jika $e = (u, v)$ adalah sisi dari graf G, maka u dan v dikatakan *adjacent* atau terhubung langsung, sedangkan sisi e dikatakan terkait langsung atau *incident* pada titik u dan v. Banyaknya titik yang dimiliki oleh graf G disebut order dari G dan ditulis dengan $p(G)$ atau p, himpunan sisinya dinamakan *size* dari G dan ditulis dengan $q(G)$ atau q, jadi graf G memiliki order p dan size q. Perhatikan contoh graf G di bawah ini.

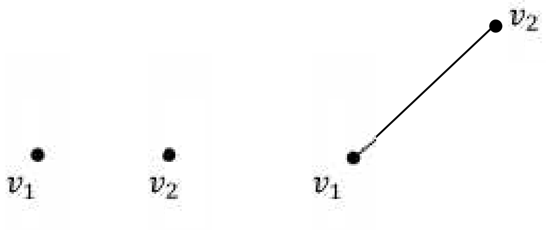


Gambar 2.2 Titik dan Sisi yang *Adjacent* dan *Incident*

Gambar 2.2 menunjukkan bahwa titik v_2 dikatakan terhubung langsung dengan titik v_1 dan v_4 tetapi v_2 tidak terhubung langsung dengan titik v_3, sedangkan sisi e_2 terkait langsung pada titik v_2 dan v_4. Sisi e_4 terkait langsung pada titik v_1 dan v_3, tetapi sisi e_1 tidak terkait langsung pada titik v_4. Graf G mempunyai 4 titik sehingga order G adalah $p = 4$, graf G mempunyai 4 sisi sehingga size graf G adalah $q = 4$.

Graf G disebut *finite* atau berhingga jika himpunan titik adalah berhingga, atau graf yang jumlah titiknya adalah n berhingga. Graf *infinite* atau tak berhingga adalah graf yang jumlah titiknya tidak berhingga.

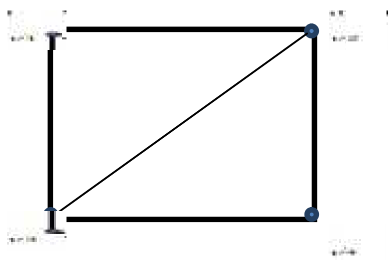
Graf paling sederhana adalah graf *Null* atau graf kosong dengan n titik, dinotasikan dengan Nn. Graf kosong didefinisikan sebagai suatu graf dengan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Graf ini hanya terdiri dari himpunan elemen yang di sebut ***vertex***. Berikut ini adalah contoh graf kosong dan graf tidak kosong.



(1) (2)

Gambar 2.3 (1) Graf Kosong dan (2) Graf tidak Kosong

Definisi 2.2 (Rinaldi Munir, 2007) Derajat (*Degree*) suatu simpul pada graf tak-berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut. Notasi: $d(v)$ menyatakan derajat simpul v. Perhatikan contoh graf di bawah ini.



Gambar 2.4 Derajat atau *Degree*

Gambar 2.4 menunjukkan bahwa $d(v_1) = d(v_4) = 2$ dan $d(v_2) = d(v_3) = 3$. Jika setiap titik dalam suatu graf mempunyai derajat yang sama maka graf tersebut disebut dengan graf regular (*Reguler Graphs*).

2.2 Subgraf

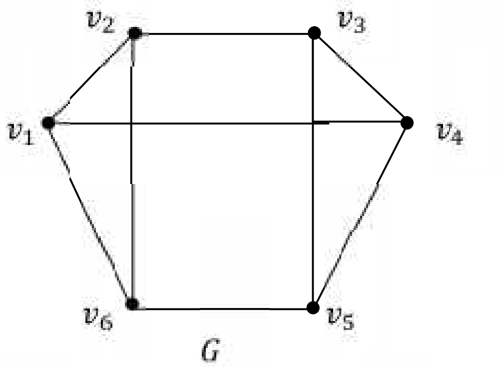
Graf H dikatakan *subgraf* dari graf G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik-titik di G, dan himpunan sisi-sisi di H adalah subset dari himpunan sisi di G, dengan kata lain $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika H adalah *subgraf* dari G maka dapat ditulis $H \subseteq G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986).

Berikut ini, akan diberikan contoh dari *subgraf* dari graf G. Perhatikan graf G pada Gambar 5 di bawah ini. Graf G memuat himpunan titik V dan himpunan sisi E seperti berikut :

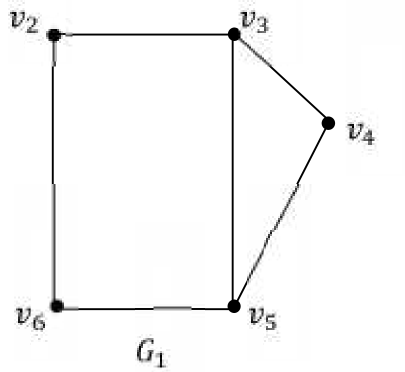
$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan

$E(G) = \{(v_1, v_2),$

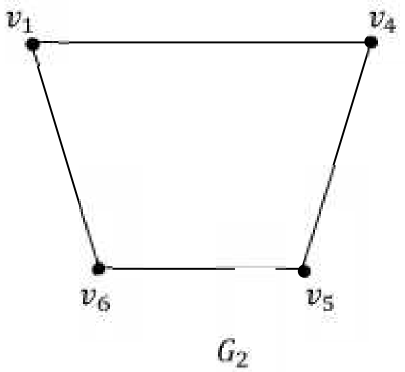
$(v_1, v_4), (v_1, v_6), (v_2, v_3), (v_2, v_6), (v_3, v_4), (v_3, v_5), (v_4, v_5), (v_5, v_6)\}.$



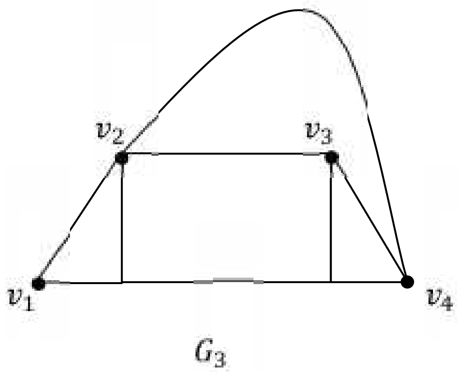
(1)



(2)



(3)

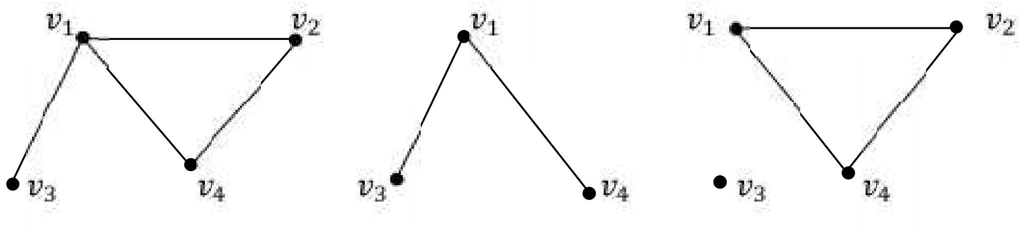


(4)

Gambar 2.5 (2) dan (3) *Subgraf* dari (1), (4) Bukan *Subgraf* dari (1)

Gambar 2.5 menunjukkan bahwa graf G_1 dan graf G_2 merupakan *subgraf* dari graf G, akan tetapi graf G_3 bukan *subgraf* dari graf G.

Subgraf dari graf G dapat diperoleh dengan menghapus titik atau sisi. Berikut ini, akan diberikan contoh penghapusan titik dan penghapusan sisi. Perhatikan Gambar 6 di bawah ini :



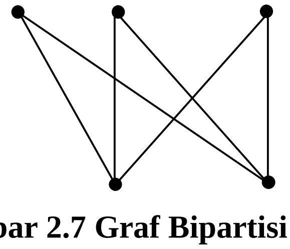
(1) (2) (3)

Gambar 2.6 Penghapusan Titik dan Penghapusan Sisi

Gambar 2.6 di atas menunjukkan bahwa (1) adalah graf G dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_4)\}$. Gambar (2) dan (3) merupakan contoh dari penghapusan titik dan penghapusan sisi dari gambar (1). Dapat diperhatikan pada gambar (2) terjadi penghapusan titik v_2 sehingga sisi (v_1, v_2) dan (v_2, v_4) juga terhapus, sedangkan pada gambar (3) tidak terjadi penghapusan titik, namun dilakukan penghapusan pada sisi (v_1, v_3).

2.3 Subgraf Komplit

Graf H dikatakan *subgraf* komplit dari graf G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik-titik di G dan himpunan sisi-sisi di H adalah subset dari himpunan sisi di G, yang mempunyai jumlah derjat yang sama dan setiap titik saling terhubung langsung. Berikut ini contoh *subgraf* komplit dari graf G. Perhatikan graf bipartisi komplit $k_{2,3}$ berikut !



Gambar 2.7 Graf Bipartisi Komplit $k_{2,3}$

Subgraf komplit dari graf bipartisi komplit $k_{2,3}$ adalah :

Gambar 2.8 Subgraf Komplit Graf Bipartisi Komplit $k_{2,3}$

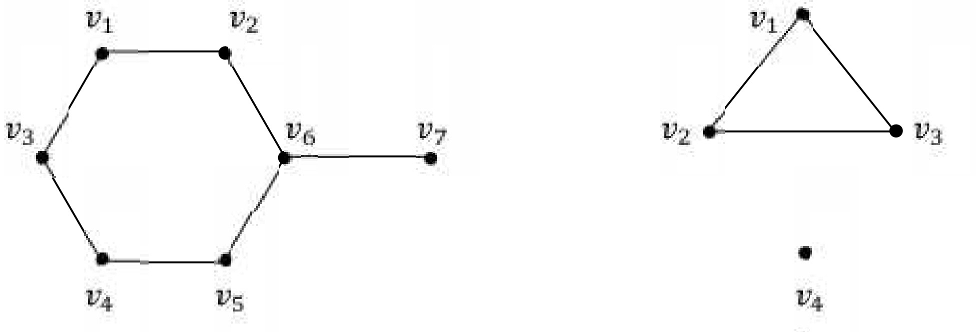
Subgraf komplit maksimum dari graf bipartisi komplit $k_{2,3}$ adalah k_2, maka order maksimumnya adalah 2.

2.4 Graf Terhubung

Definisi 2.3 (Chartrand dan Lesniak, 1986) Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Maka titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika teradapat lintasan $u - v$ di G.

Komponen dari graf G adalah *subgraf* terhubung maksimal dari G. Setiap graf terhubung hanya mempunyai satu komponen, sedangkan untuk graf tak terhubung memiliki sedikitnya dua komponen.

Berikut ini contoh graf terhubung dan tidak terhubung.



(1) (2)

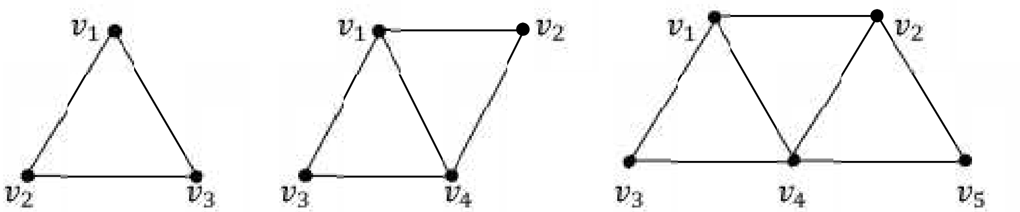
Gambar 2.9 (1) Graf Terhubung dan (2) Graf tidak Terhubung

Gambar 2.9 di atas menunjukkan, (1) merupakan graf terhubung karena terdapat lintasan di antara dua buah titik yang berdekatan, dan hanya mempunyai satu komponen, dapat kita lihat bahwa $\{(v_1 - v_2), (v_1 - v_3), (v_2 - v_6), (v_3 - v_4), (v_4 - v_5), (v_5 - v_6), (v_6 - v_7)\}$, sedangkan (2) bukan merupakan graf terhubung karena ada satu titik yang tidak terdapat lintasan yang menghubungkan titik tersebut dengan titik yang lainnya dan memiliki dua komponen. Dapat kita lihat bahwa $\{(v_1 - v_2),\ (v_1 - v_3), (v_2 - v_3)\}$, sedangkan titik v_4 tidak terhubung dengan titik lainnya.

2.5 Graf Piramida

Misalkan terdapat suatu pengubinan pada bidang menggunakan segitiga sama sisi. Dua segitiga dikatakan terhubung jika ia bersekutu pada satu sisi. Misal T adalah kumpulan segitiga segitiga yang terhubung, maka T adalah graf planar terhubung dengan sikel terpendek 3 dan masing masing segitiga bersekutu pada paling sedikit satu sisi dengan lainnya. Kumpulan segitiga terhubung disebut *triomino.* Jadi T disebut *n-triomino* jika T adalah pengubinan dari n segitiga yang terhubung.

Graf ular dengan panjang n adalah *n-triomino*, dengan menempatkan n segitiga sama sisi dengan cara berikut :



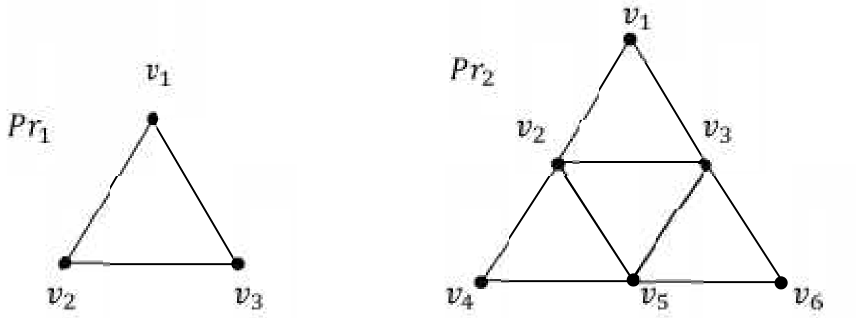
Ular Panjang 1 (1) — Ular Panjang 2 (2) — Ular Panjang 3 (3)

Gambar 2.10 Graf Ular dengan Panjang n

Gambar 2.10 menunjukkan bahwa (1) merupakan graf ular dengan panjang 1 yang terbentuk dari sebuah segitiga sama sisi, (2) merupakan graf ular dengan panjang 2 yang terbentuk dari dua buah segitiga sama sisi yang terhubung, sedangkan (3) merupakan graf ular dengan panjang 3 yang terbentuk dari tiga buah segitiga sama sisi yang terhubung.

Graf piramida dengan tinggi n, ditulis Pr_n adalah *n-triomino*, yang dibentuk dengan menempatkan ular n dengan cara berikut :

Perhatikan gambar 2.11 di bawah ini !

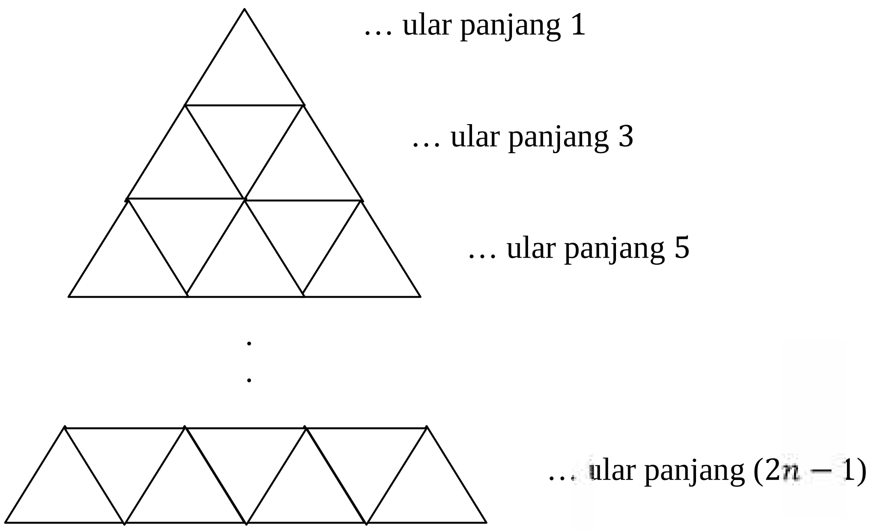


(1) (2)

Gambar 2.11 (1) Graf Piramida Tinggi 1 dan (2) Graf Piramida Tinggi 2

Gambar 2.11 menunjukkan bahwa (1) adalah graf piramida dengan tinggi 1 (Pr_1 adalah ular panjang 1) dan (2) adalah graf piramida dengan tinggi dua (Pr_2 adalah ular panjang 1 dan ular panjang 3 yang ditumpuk. (Low Richard M, Lee Sin Min, 2004)).

Secara umum Pr_n dapat diketahui sebagai berikut :



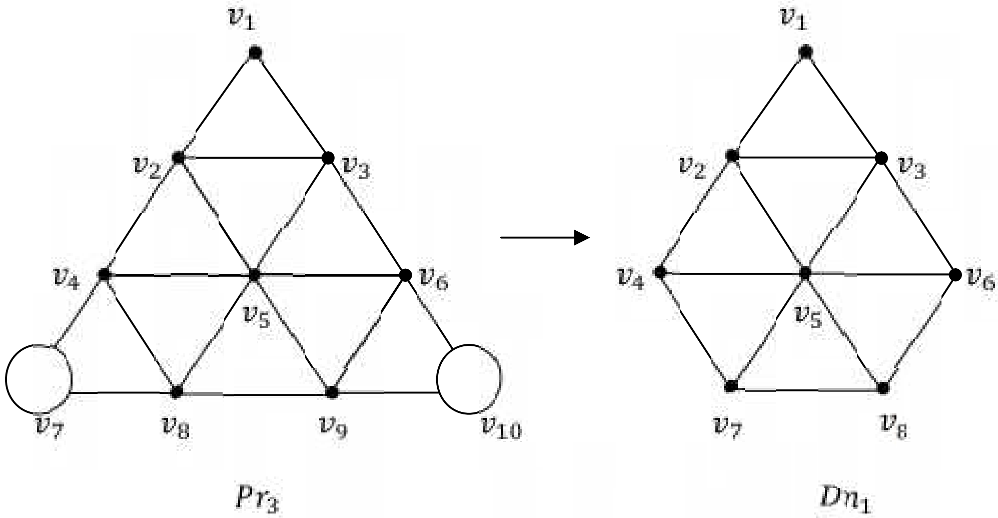
Gambar 2.12 Graf Piramida dengan Tinggi n

2.6 Graf Berlian

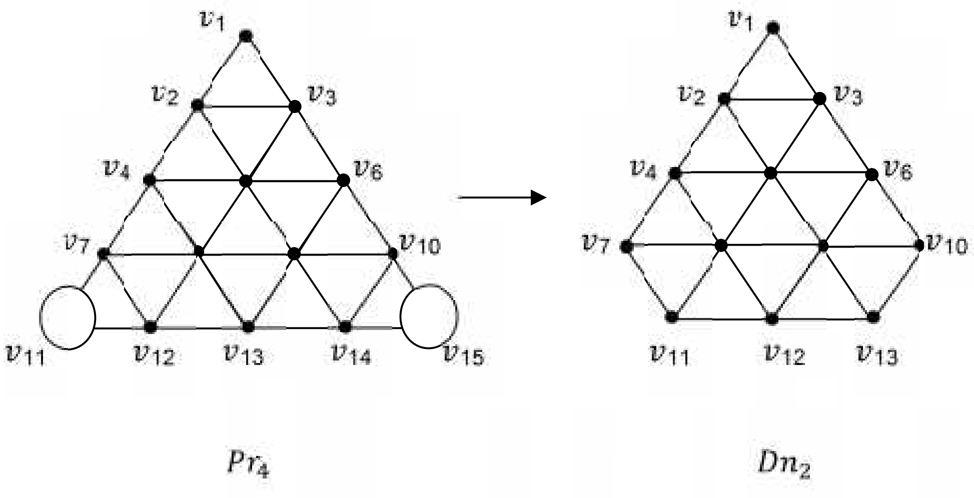
Definisi 2.4 (Yusuf Afandi, 2009) Graf berlian (*diamond*) Dn_k adalah graf piramida Pr_{k+2} yang kedua titik sudutnya dihilangkan (dihapus).

Berikut ini, akan diberikan contoh dari graf piramida tinggi tiga (Pr_3) dan graf piramida tinggi empat (Pr_4) yang kedua titik sudutnya dihilangkan (dihapus) yang akan menghasilkan graf berlian (*diamond*) Dn_1 dan graf berlian (*diamond*) Dn_2.

Contoh :



Gambar 2.13 Graf Berlian Dn_1 {Pr_3 – { v_7 dan v_{10} } = Dn_1

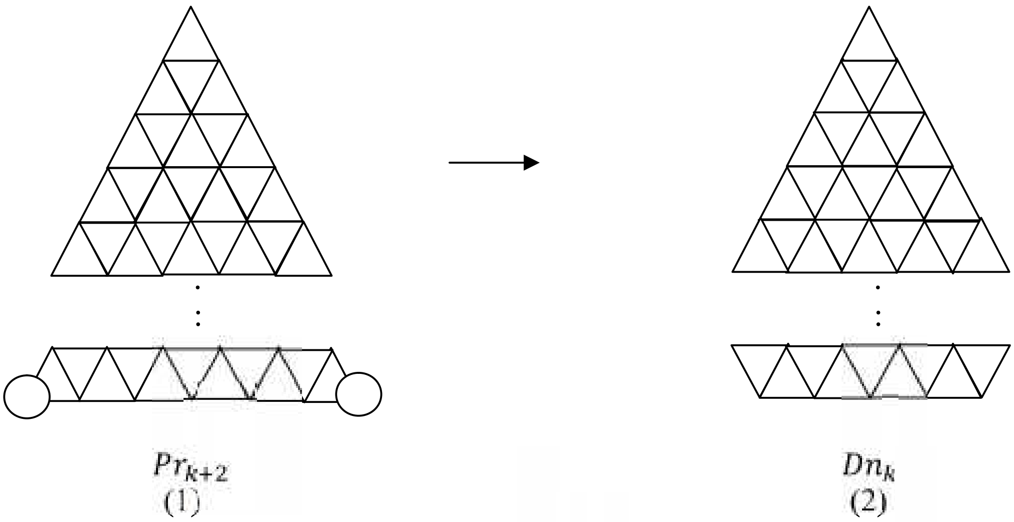


Gambar 2.14 Graf Berlian Dn_2{ Pr_4 − { v_{11} dan v_{15} } = Dn_2}

keterangan :

: sisi yang dihapuskan

Secara umum dapat diketahui Dn_k sebagai berikut :

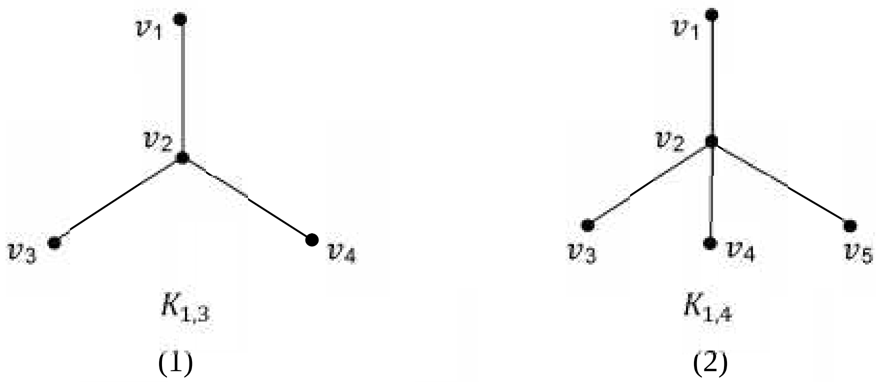


Gambar 2.15 (1) Graf Piramida Pr_{k+2} dan (2) Graf Berlian Dn_k

2.7 Graf Bintang

Graf bintang yaitu graf bipartit komplit yang berbentuk $K_{1,n}$ dengan n adalah bilangan asli (Dina Irawati, 2008).

Contoh:



Gambar 2.16 (1) Graf Bintang K_{13} *dan* (2) Graf Bintang K_{14}

Graf bintang $K_{1,n}$ adalah graf dengan $n+1$ titik, dengan satu titik berderajat n yang dinamakan titik pusat, dan n berderajat satu, yang dinamakan daun.

keterangan :
◯ : sisi yang dihapuskan

2.8 Pewarnaan Graf

Bilangan *kromatik* sangat dibutuhkan untuk membuktikan graf piramida, graf berlian dan graf bintang merupakan graf *perfect* atau bukan graf *perfect*. Bilangan *kromatik* diperoleh dari nilai minimum pewarnaan pada graf G. Pewarnaan Graf adalah suatu pemberian warna pada salah satu elemen-elemennya (titik dan sisi), sehingga elemen-elemen yang saling terhubung langsung mendapatkan warna yang berbeda. Ada tiga macam pewarnaan graf yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah (region).

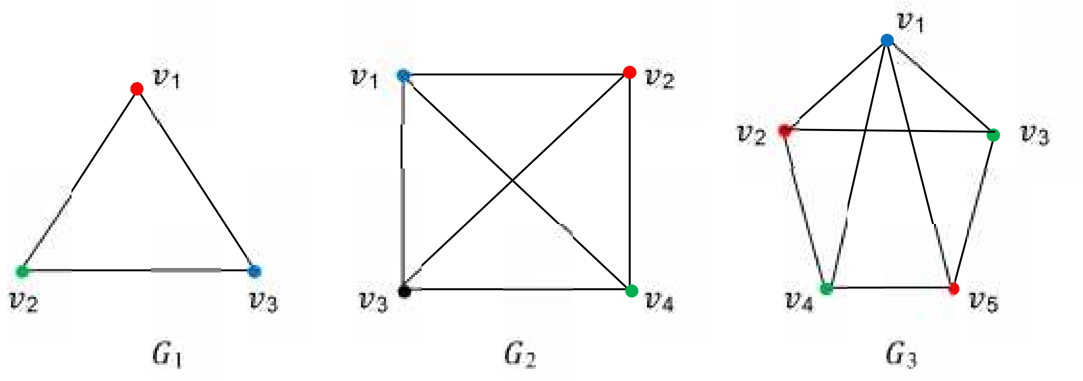
2.8.1 Pewarnaan Titik

Pewarnaan titik adalah memberi warna pada titik-titik suatu graf sedemikian sehingga tidak ada dua titik terhubung langsung mempunyai warna yang sama. Dalam pewarnaan titik erat kaitannya dengan penentuan bilangan *kromatik*.

Bilangan *kromatik* $\chi(G)$ (*chromatik number*) adalah banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai titik-titik pada graf G sedemikian sehingga setiap titik yang terhubung langsung mendapatkan warna yang berbeda. Jika *kromatik* $\chi(G) = k$, maka titik-titik pada graf G dapat diwarnai dengan k warna, tetapi tidak diwarnai dengan $k - 1$ warna.

Beberapa graf tertentu dapat langsung ditentukan bilangan *kromatik*nya. Graf kosong N_n memiliki . $\chi(G) = 1$ karena semua titik tidak terhubung, jadi untuk mewarnai semua titik cukup dibutuhkan satu warna saja. Graf komplit K_n memiliki $\chi(G) = k$ sebab semua titik saling terhubung sehingga diperlukan k warna.

Berikut ini, akan diberikan contoh dari pewarnaan titik pada graf :



Gambar 2.17 Pewarnaan Titik

Untuk graf G_1, karena $|V(G_1)| = 3$, maka $\chi(G_1) \leq 3$. Untuk G_2 karena $|V(G_2)| = 4$, maka $\chi(G_2) \leq 4$ karena semua titik pada G_1dan G_2 saling terhubung langsung, akibatnya $\chi(G_1) \geq 3$ dan $\chi(G_2) \geq 4$, jadi $\chi(G_1) = 3$ dan $\chi(G_1) = 3$. Untuk graf $G_3 \leq 3$, karena 3 warna untuk mewarnainya seperti pada gambar, karena graf G_3 memuat graf Komplit K_3, maka $\chi(G_3) \geq 3$, Akibatnya $\chi(G_3) = 3$.

Berikut ini adalah beberapa bilangan kromatik yang telah diketahui:

$$\chi(N_n) = 1$$

$$\chi(K_n) = n$$

$$\chi(K_{m,n}) = 2$$

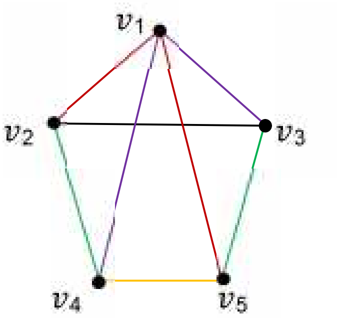
$$\chi(C_n) = 2$$

$$\chi\ (C_{n+1}) = 3$$

2.8.2 Pewarnaan Sisi (*Edge Couloring*)

Suatu pewarnaan sisi$-k$ untuk graf G adalah suatu penggunaan sebagian atau semua k warna untuk mewarnai semua sisi di G sehingga setiap pasang sisi yang mempunyai titik persekutuan diberi warna yang berbeda. Jika G mempunyai pewarnaan sisi$-k$, maka dikatakan sisi-sisi di G diwarnai dengan k warna. Indeks *kromatik* G dinotasikan dengan $\chi'(G)$ adalah bilangan k terkecil sehingga G dapat diwarnai dengan k warna (Purwanto, 1998:80).

Perhatikan contoh gambar 2.18 di bawah ini, gambar berikut menunjukkan pewarnaan sisi pada graf :

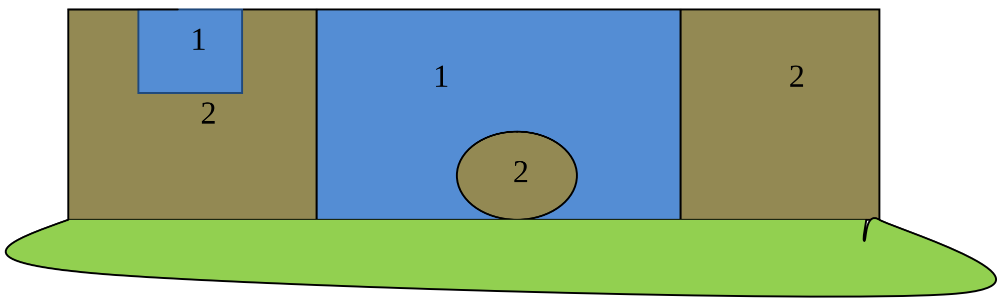


Gambar 2.18 Pewarnaan Sisi pada Graf

Pewarnaan sisi$-k$ ini dapat ditunjukkan dengan menuliskan warna yang mewakili sisi tersebut pada sisi-sisinya, seperti merah, kuning, hijau, dan biru. Contoh Gambar 2.18 adalah pewarnaan sisi-4. Dengan demikian $\chi'(G) = 4$.

2.8.3 Pewarnaan Wilayah (Map)

Pewarnaan n wilayah merupakan pewarnaan graf G yang dapat diwarnai dengan n atau warna minimum, sehingga wilayah yang terhubung langsung dapat diwarnai dengan warna yang berbeda. Pewarnaan n wilayah dapat disimbolkan dengan $\chi^*(G)$.

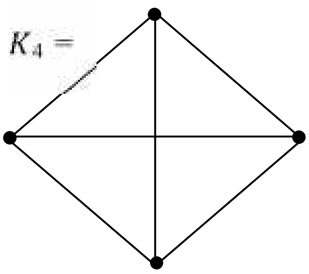


Gambar 2.19 Pewarnaan Wilayah pada Graf

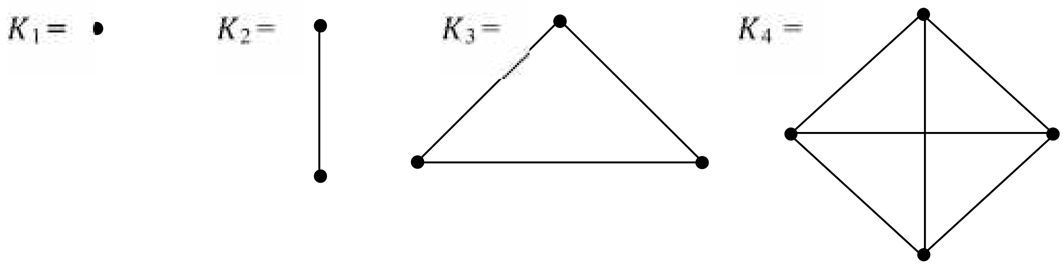
2.9 Graf *Perfect*

Graf *perfect* adalah suatu graf yang mempunyai bilangan *kromatik* dan bilangan *clique* yang sama, $\chi(G) = \omega(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1996:280). Bilangan *clique* dinotasikan dengan $\omega(G)$ didefinisikan sebagai order dari *subgraf* komplit maksimum yang bisa dibentuk dari graf G. Bilangan *kromatik* suatu graf G dinotasikan dengan $\chi(G)$ didefinisikan sebagai jumlah minimal warna yang diperlukan untuk mewarnai titik pada graf G sedemikian sehingga setiap titik yang terhubung langsung mendapatkan warna yang berbeda.

Berikut ini contoh dari graf *perfect*:



Subgraf komplit dari K_4 adalah:



(1) (2) (3) (4)

Gambar 2.20 Subgraf Komplit dari Graf K_4

Subgraf komplit maksimum dari graf K_4 adalah K_4 sendiri, karena *subgraf* komplit maksimumnya adalah K_4, maka order maksimumnya adalah 4, sehingga $\omega(G) = 4$. Karena antara satu titik dengan titik yang lain saling terhubung langsung maka pewarnaan minimum yang diberikan adalah 4, sehingga $(K_4) = 4$. Karena terbukti $\chi(G) = \omega(G) = 4$, maka graf K_4 adalah graf *perfect*.