BAB II

LANDASAN TEORI

Bab berikut ini akan disajikan materi pendukung yang dapat membantu penulis untuk menyelesaikan permasalahan yang akan dibahas pada bab selanjutnya. Adapun materi pendukungnya adalah pengertian matriks, jenis-jenis matriks, invers matriks, matriks diagonal, matriks segitiga, matriks blok dan komplement schur yang dilengkapi dengan definisi serta teorema yang terkait.

2.1 Pengertian Matriks

Matriks merupakan kajian aljabar yang memberikan banyak manfaat bagi aplikasi matematika dan juga bidang matematika lainnya seperti statistik dan numerik. Aplikasi matriks memberikan kemudahan bagi matematikawan dalam menyederhanakan permasalahan matematika. Oleh karena itu matriks menjadi poin penting dalam bidang aljabar.

Definisi 2.1 (Anton, Howard. 2004): Matriks adalah susunan bilangan-bilangan riil atau bilangan kompleks yang membentuk segiempat siku-siku yang disusun menurut baris dan kolom.

Selanjutnya, bilangan-bilangan tersebut dinamakan entri dalam matriks. Entri dari sebuah matriks *A* yang berada pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dinotasikan dengan a_{ij}.

Secara umum bentuk matriks dapat ditulis sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks di atas mempunyai ukuran *m* baris dan *n* kolom dan dinotasikan dengan A_{mxn}. Secara singkat sebuah matriks *A* dapat di notasikan sebagai berikut $A_{mxn} = [a_{ij}]_{m\times n}$ atau $A = [a_{ij}]_{m\times n}$.

dengan:

a_{ij} = elemen atau unsur matriks

i = 1,2,3, ... m, indeks baris

j = 1,2,3, ... n, indeks kolom.

2.2 Jenis-jenis Matriks

Berikut ini akan diberikan pengertian beberapa jenis matriks dan sifat-sifat matriks yang berkaitan dengan penelitian ini.

Definisi 2.2 (Lipschut, 2001): Suatu matriks yang memiliki baris dan kolom yang sama dinotasikan dengan $A_{n\times n}$, disebut matriks bujur sangkar atau matriks kuadrat.

Bentuk umum dari matriks bujur sangkar ditulis sebagai berikut:

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Jika suatu matriks bujur sangkar $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ disebut singular apabila $\det(A) = 0$. Jika $\det(A) \neq 0$ maka A disebut matriks nonsingular dan didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.3 (Suryadi HS, 1991): Suatu matriks bujur sangkar A disebut singular apabila $\det(A) = 0$. Jika $\det(A) \neq 0$ maka A disebut nonsingular. Matriks yang singular tidak mempunyai invers. Sedangkan matriks nonsingular mempunyai invers.

Suatu matriks $I_n = (a_{ij})$ dengan semua elemen diagonal utamanya bernilai satu dan elemen di luar díagonalnya adalah nol disebut matriks identitas.

Definisi 2.4 (Leon, 2001): Misalkan $n \times n$ dengan semua elemen pada diagonalnya utamanya adalah satu dan elemen di luar diagonalnya bernilai nol, disebut matriks identitas $n \times n$, dinotasikan dengan:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

dengan kata lain, $I_n = (a_{ij})$ dimana $a_{ij} = 1$ untuk $i = j$ dan $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

Selain matriks identitas, diberikan pula definisi dari matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah sebagai berikut :

Definisi 2.5 (Anton, Howard. 2004): Suatu matriks segitiga dikatakan matriks segitiga atas (*upper triangular*) jika matriks bujur sangkar yang semua entri dibawah diagonal utamanya adalah nol.

Matriks-matriks segitiga atas secara umum dapat di bentuk sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Berikut akan diberikan contoh sederhana dari matriks segitiga atas yaitu:

Contoh 2.1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 0 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Sedangkan matriks segitiga bawah (*lower tringular*) adalah matriks bujur sangkar yang semua entri diatas diagonal utamanya adalah nol.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Sebagai contoh diberikan sebarang matriks segitiga bawah sebagai berikut:

Contoh 2.2:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2.3 Invers Matriks

Jika diberikan sebarang matriks bujur sangkar yang dapat dibalik (*invertible*), maka dapat dibentuk matriks lain yang merupakan kebalikan dari matriks tersebut. Proses perkalian dari suatu matriks dan inversnya akan menghasilkan matriks identitas. Invers matriks didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.6 (Anton, Howard. 2004): Jika A dan B adalah matriks bujursangkar dan jika matriks B dapat dicari sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik (*invertible*) dan B dinamakan invers dari A dan dapat ditulis $B = A^{-1}$.

Suatu matriks A mempunyai invers yang di tulis dengan A^{-1} apabila matriks A dapat dibalik (*invertible*) dimana $\det(A) \neq 0$ dan matriks A disebut juga dengan matriks non singular dan disebut singular apabila A tidak mempunyai invers.

Contoh 2.3:

Diberikan matriks *A* sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Carilah invers dari matriks A !

Penyelesaian:

Untuk mendapatkan A^{-1}, maka dapat dilakukan dengan menggandengkan matriks satuan ke kanan A dan dengan menerapkan operasi-operasi baris pada kedua ruas hingga ruas kiri tereduksi pada I. Maka matriks akhir akan mempunyai bentuk $[I|A^{-1}]$. Perhitungan dapat dilaksanakan sebagai berikut:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & -1 & I & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & I & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1. Baris pertama pindah ke baris kedua.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & I & 0 \\ 3 & 4 & -1 & I & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 0 & I \end{array}\right]$$

2. Baris kedua ditambah -3 kali baris pertama

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

3. Baris ketiga ditambah -2 kali baris pertama

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

4. Baris kedua dikalikan $1/_4$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5/_2 & 1/_4 & -3/_4 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

5. Baris ketiga ditambah -5 kali baris kedua

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5/_2 & 1/_4 & -3/_4 & 0 \\ 0 & 0 & 5/_2 & -5/_4 & 7/_4 & 1 \end{array}\right]$$

6. Baris ketiga dikalikan $2/_5$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5/_2 & 1/_4 & -3/_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/_2 & 7/_{10} & 5/_2 \end{array}\right]$$

7. Baris pertama ditambah -3 kali baris ketiga

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5/_2 & 1/_4 & -3/_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/_2 & 7/_{10} & 5/_2 \end{array}\right]$$

8. Baris kedua ditambah $5/_2$ kali baris ketiga

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/_2 & -11/_{10} & -6/_5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/_2 & 7/_{10} & 2/_5 \end{array}\right].$$

Sehingga A^{-1} dari matriks A adalah sebagai berikut:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -11/10 & -6/5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 7/10 & 2/5 \end{bmatrix}$$

2.4 Matriks Blok

Matriks blok adalah membagi matriks menjadi beberapa matriks yang ukurannya lebih kecil. Berikut ini akan diberikan definisi tentang matriks blok dan jenis-jenisnya yang berhubungan dengan penelitian ini.

Definisi 2.7 (Ruminta, 2009): Matriks blok atau matriks partisi adalah membagi matriks menjadi beberapa matriks yang ukurannya lebih kecil dengan memasukkan garis horizontal dan vertikal antara baris dan kolom matriks. Matriks-matriks yang ukurannya kecil hasil partisi matriks disebut *submatriks*.

Suatu matriks elemen-elemennya dapat dipartisi atas beberapa baris atau kolom sub-sub matriks dan matriksnya disebut matriks blok. Matriks blok yang dibicarakan adalah matriks kuadrat yang dipartisi atas dua baris dan dua kolom sub-sub matriks yang disebut matriks blok 2×2.

Gambaran secara umum bentuk matriks blok 2×2 adalah sebagai berikut:

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \quad (2.1)$$

Persamaan (2.1) dapat di tulis kembali ke dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$R = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Contoh 2.4 :

Tentukan submatriks yang terbentuk dari partisi matriks berikut:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 2 \\ \hline 7 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right]$$

Penyelesaian:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ dan } \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, jenis-jenis matriks blok yang berkaitan dengan isi pokok dalam pembahasan penelitian ini, yaitu matriks blok diagonal dan segitiga. Sehingga, pada matriks blok 2×2 dalam persamaan (2.2), diperoleh:

1) Matriks blok diagonal, bila $B = 0$ dan $C = 0$.
2) Matriks blok segitiga atas, bila $C = 0$.
3) Matriks blok segitiga bawah, bila $B = 0$.

2.5 Komplemen Schur

Komplemen schur merupakan salah satu metode atau cara dalam analisis matriks yang banyak menggunakan pertidaksamaan matriks. Dalam teori tentang matriks, komplemen schur biasanya di gunakan pada matriks kuadrat yang berukuran besar dimana matriks tersebut telah di blok.

Definisi 2.8 Diketahui matriks *R* adalah sebuah matriks kuadrat $p \times q$ dimana $p = q$ dan matriks diubah menjadi blok 2×2.

$$R = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Dimana *A* adalah matriks $k \times k$, *D* adalah matriks $l \times n$ dengan $p = k + l$.
Jika *A* adalah *invertible* maka komplemen Schur dari *A* adalah $S = D - CA^{-1}B$.
Jika *D* adalah *invertible* maka komplemen Schur dari *D* adalah $S = A - BD^{-1}C$.
Jika *B* adalah *invertible* maka komplemen Schur dari *B* adalah $S = C - DB^{-1}A$.
Jika *C* adalah *invertible* maka komplemen Schur dari *C* adalah $S = B - AC^{-1}D$.

Berikut akan diberikan Teorema yang digunakan untuk menentukan invers dari masing-masing jenis partisi matriks blok 2×2.

Teorema 2.2 (Carlson, 1986): Diasumsikan matriks *A* pada matriks *R* dalam persamaan (2.2) adalah non singular. Matriks *R* pada persamaan (2.2) punya invers jika dan hanya jika komplemen Schur dari *A* punya invers dan

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} \\ -\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & \left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

Bukti:

Matriks *R* ukuran $p \times q$, dengan $p = k + l$ dan $q = m + n$, dipartisi ke dalam matriks blok 2×2 yaitu:

$$R = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

dengan ketentuan pada *R* diperoleh *A* matriks $k \times k$, *B* matriks $k \times n$, *C* matriks $l \times m$ dan *D* matriks $n \times n$ adalah jenis partisi diagonal utama untuk $k = m$ dan $l = n$.

Karena *A* adalah matriks non singular maka *A* mempunyai invers A^{-1}. Oleh karena itu diperoleh:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Selanjutnya dengan menggunakan Operasi Baris Elementer diproses menentukan invers dari matriks blok *R* sebagai berikut:

$$\left[\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}\middle|\begin{matrix} I & 0 \\ 0 & I \end{matrix}\right]$$

1. Baris pertama dikali A^{-1}

$$\left[\begin{matrix} I & A^{-1}B \\ C & D \end{matrix}\middle|\begin{matrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{matrix}\right]$$

2. Baris kedua ditambah $-C$ kali baris pertama

$$\left[\begin{matrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{matrix}\middle|\begin{matrix} A^{-1} & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{matrix}\right]$$

3. Baris kedua dikali $(D - CA^{-1}B)^{-1}$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} I & A^{-1}B & A^{-1} & 0 \\ 0 & I & -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{array}\right]$$

4. Baris pertama ditambah $-(A^{-1}B)$ kali baris kedua

$$\left[\begin{array}{cc|cc} I & 0 & A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ 0 & I & -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{array}\right]$$

Sehingga, dari persamaan (2.2) diperoleh:

$$R^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1}+A^{-1}B\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1} \\ -\left(D-CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & \left(D-CA^{-1}B\right)^{-1} \end{bmatrix}$$ ■

Contoh 2.5:

Diberikan matriks blok R sebagai berikut :

$$R = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

dimana $R=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

Selanjutnya, dengan menggunakan persamaan (2.3) diperoleh:

$$A^{-1}+A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}=\begin{bmatrix} 19/4 & 49/4 \\ -3/4 & -17/4 \end{bmatrix}$$

$$-A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}=\begin{bmatrix} 3/4 & -5/4 & 13/2 \\ -1/4 & -1/4 & 5/2 \end{bmatrix}$$

$$-(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 3/2 \\ 3/4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(D-CA^{-1}B)^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & -1 \\ 1/4 & 1/4 & -3/2 \end{bmatrix}$$

Sehingga R^{-1} dapat di bentuk kedalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} 19/4 & 49/4 & 3/4 & -5/4 & 13/2 \\ -3/4 & -17/4 & -1/4 & -1/4 & 5/2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & -1 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & -3/2 \end{bmatrix}$$