BAB II
LANDASAN TEORI

Landasan teori dalam skripsi ini berisikan tentang teori-teori yang mendukung adalah Orde konvergensi, deret Taylor, metode Newton dan Orde konvergensinya, metode Ostrowski dan Orde konvergensinya, dan interpolasi kuadratik.

2.1 Orde Konvergensi

Orde konvergensi merupakan suatu tingkat percepatan dalam penyelesaian Persamaan nonlinear $f(x)=0$. Definisi yang menerangkan tentang orde konvergensi adalah sebagai berikut:

Definisi 2.1 : (John H Mathews, 1992). Misalkan terdapat sebuah bilangan konstanta $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ adalah barisan yang konvergen ke $\sim$, dan diberikan $e_n = x_n - \sim$ untuk $n \geq 0$. Jika terdapat $c \neq 0$ dan $p > 0$ sedemikian hingga

$$\left|x_{n+1} - \sim\right| \leq c\left|x_n - \sim\right|^p \tag{2.1}$$

Jika $p=2$ atau $p=3$ maka metode hampiran memiliki orde konvergensi kuadratik atau kubik dan seterusnya. Apabila notasi $e_n = x_n - \sim$ merupakan notasi untuk nilai tingkat kesalahan pada iterasi ke-n, pada suatu metode yang menghasilkan suatu barisan $\{x_n\}$, maka suatu persamaan

$$e_{n+1} = ce_n^p + O(e_n^{p+1}) \tag{2.2}$$

disebut sebagai persamaan tingkat kesalahan, sedangkan nilai p pada Persamaan (2.2) menunjukkan orde konvergensinya.

Selanjutnya untuk menegaskan tingkat orde konvergensi suatu metode iterasi, bisa diselesaikan menggunakan COC

Definisi 2.2 Computation Orde of Convergence (Weerakoon, 2000). Misalkan $\sim$ adalah akar untuk fungsi $f(x)$ dan andaikan x_{n+1}, x_n, x_{n-1} berturut-turut adalah iterasi yang dekat dengan $\sim$, sehingga COC (*Computation Orde of Convergence*) dapat dihampiri menggunakan rumus :

$$\circ \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1} - \sim)/(x_n - \sim)\right|}{\ln\left|(x_n - \sim)/(x_{n-1} - \sim)\right|} \quad \text{atau} \quad \circ \approx \frac{\ln\left|e_{n+1}/e_n\right|}{\ln\left|e_n/e_{n-1}\right|}$$

Berikut ini merupakan beberapa contoh dalam menentukan nilai COC:

Contoh 2.1:

Diberikan fungsi $f(x) = x^3 - 3x + 2$, dengan menggunakan metode Newton. Tentukan iterasi untuk menghampiri akar tunggalnya, dengan mengambil $\sim = -2$ dan konvergensinya, dengan nilai awal $x_0 = -2{,}4$ dengan toleransi kesalahan $e = 10^{-14}$

Penyelesaian:

diketahui: $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$\sim = -2$

$x_0 = -2{,}4$

Ditanya : Iterasi dan konvergensi dengan menggunakan metode Newton

Jawab : Untuk iterasi awal $x_0 = -2{,}4$

$$e_n = \left|x_n - \sim\right| = \left|-2{,}4000000000000 - (-2)\right| = 0{,}4000000000000$$

Mencari COC rumusnya adalah

$$\circ \approx \frac{\ln\left|e_{n+1}/e_n\right|}{\ln\left|e_n/e_{n-1}\right|}$$

$$\circ \approx \frac{\ln\left|e_2/e_1\right|}{\ln\left|e_1/e_0\right|}$$

$$\circ \approx \frac{\ln\left|0{,}0035960106756567/0{,}0761904761904764\right|}{\ln\left|0{,}0761904761904764/0{,}04000000000000\right|}$$

$$\circ \approx 1{,}84136997088$$

Jadi hasil COC untuk iterasi pertama adalah 1,84136997088. Begitu pula untuk mencari iterasi selanjutnya.

Tabel 2.1 Konvergensi Kuadratik Metode Newton pada Akar Tunggal

K	x_n	$e_n = x_n - \sim$	COC
0	-2,4000000000000000	0,400000000000000	1,84136997088
1	-2,0761904761904764	0,0761904761904764	1,97712790740
2	-2,0035960106756567	0,0035960106756567	1,99941129295
3	-2,0000085899722211	0,0000085899722211	1,99940691500
4	-2,0000000000491913	0,0000000000491913	TTd
5	-2,0000000000000000	0.000000000000000	TTd

Tabel 2.1 menunjukkan bahwa metode Newton dengan akar tunggal memiliki konvergensi kuadratik dengan ° ≈ 2

Contoh 2.2:

Diberikan fungsi $f(x) = x^3 - 3x + 2$, dengan menggunakan rumus metode Newton tentukan iterasi untuk menentukan akar ganda α = 1 serta konvergensi fungsi tersebut dengan nilai awal χ_0 =1,2 dan toleransi δ= 10^{-14}

Penyelesaian:

Tabel 2.2 Hasil Iterasi dan COC Metode Newton dengan Akar Ganda

K	x_n	$e_n = x_n - \sim$	COC
0	1,200000000	0,200000000	0,9909996418
1	1,103030303	0,103030303	1,011420402
2	1,052356417	0,052356417	1,001000703
3	1,026400814	0,026400814	1,003107847
4	1,013257734	0,013257734	1,001571799
5	1,006643418	0.006643418	1,000813247
6	1,003325387	0,003325387	Tidak Terdifinisi
7	1,001663559	0,001663598	Tidak Terdifinisi

Tabel 2.2 menunjukkan bahwa Metode Newton dengan akar tunggal memiliki konvergensi kuadratik dengan $^\circ \approx 1$

Definisi 2.3 ***Efficiency Index*** **(Sharma Raj Janak, 2011)** Indeks efisiensi merupakan parameter untuk menghitung efisien sebuah metode. Rumus untuk mencari indeks efisiensi adalah:

$$E = P^{\frac{1}{\mu}} \tag{2.3}$$

Dengan P adalah banyaknya orde dari sebuah metode, sedangkan μ merupakan jumlah dari evaluasi fungsi dari metode tersebut termasuk juga fungsi turunannya. Semakin besar nilai indeksnya maka metode itu semakin efektif dalam menyelesaikan Persamaan nonlinier.

Contoh 2.2 Tentukanlah Nilai Indeks dari metode Newton dan metode Ostrowski

Penyelesaian:

Oleh karena metode Newton hanya mempunyai dua fungsi $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$, sedangkan orde konvergensinya dua, yaitu

$$e_{n+1} = c_2 e_n^2 + O(e_n^3)$$

maka nilai indeksnya adalah:

$$\begin{aligned} E = P^{\frac{1}{\mu}} &= 2^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2} \\ &= 1{,}414 \end{aligned}$$

Sedangkan Metode Ostrowski mempunyai tiga fungsi yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$, $f(y_n)$

$$e_{n+1} = (c_2 c_3 - 2c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5)$$

maka nilai indexnya adalah:

$$\begin{aligned} E = P^{\frac{1}{\mu}} &= 4^{\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[3]{4} \\ &= 1{,}5874 \end{aligned}$$

Oleh karena nilai indeks Metode Ostrowski lebih besar dibandingkan dengan metode Newton, maka Metode Ostrowski lebih efektif dalam menyelesaikan Persamaan nonlinear.

2.2 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan deret berbentuk Polinomial. Pada umumnya fungsi-fungsi yang bentuknya kompleks dapat disederhanakan menjadi fungsi hampiran dalam bentuk fungsi Polinomial yang lebih sederhana. Oleh karna itu deret taylor sering digunakan dalam mengekspansi fungsi-fungsi atau Persamaan nonlinear yang rumit. Berikut ini diberikan teorema tentang Deret Taylor.

Teorema 2.1 : **(Edwin J. Purcell, 2004)** Diberikan *f* fungsi dengan turunan ke-$(n+1)$-nya ada untuk setiap x pada selang terbuka I yang memuat a. Jadi untuk setiap x di dalam I,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^{(2)} + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^{(3)} + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{(n)} + R_{(n)}(x) \tag{2.4}$$

dengan sisanya atau kesalahannya $R_n(x)$ dinyatakan dengan rumus

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{2.5}$$

adalah suku sisa dalam rumus Taylor dan c adalah titik di antara x dan a.

Persamaan (2.5) merupakan galat dari persamaan Taylor. Oleh karena itu, jika $P_n(x)$ adalah persamaan Taylor, maka

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a) \tag{2.6}$$

dan Persamaan (2.3) dapat ditulis lagi dalam bentuk

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \tag{2.7}$$

Bukti: Misalkan sebuah polinomial berderajat *n* dengan fungsi *f* pada selang terbuka *I*. Maka untuk setiap $x \in I$ berlaku

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + b_3(x-a)^3 + \cdots + b_n(x-a)^n$$

$$f(x) = \sum_{n}^{\infty} b_n (x-a)^n \tag{2.8}$$

Jika Persamaan (2.8) diturunkan secara berurutan mulai dari $f'(x)$ sampai $f^{(n)}(x)$ maka

$$f^{'}(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + 3b_3(x-a)^2 + 4b_4(x-a)^3 + \cdots + b_n n(x-a)^{n-1}$$
$$f^{''}(x) = 2b_2 + 2\cdot 3b_3(x-a) + 2\cdot 3\cdot 4b_3(x-a)^2 + \cdots + b_n n(n-1)(x-a)^{n-2}$$
$$f^{'''}(x) = 2\cdot 3b_3 + 2\cdot 3\cdot 4b_4(x-a) + \cdots + b_n n(n-1)(n-2)(x-a)^{n-3}$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = b_n n!$$

Subtitusikan $x = a$ ke Persamaan di atas maka

$$f(a) = b_0$$
$$f^{'}(a) = b_1$$
$$f^{''}(a) = 2b_2$$
$$f^{'''}(a) = 2\cdot 3b_3$$
$$f^{(4)}(a) = 2.3.4b_4$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(a) = b_n n!$$

Sehingga

$$b_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{2.9}$$

Oleh karena itu, jika Persamaan (2.9) disubtitusikan ke dalam Persamaan (2.8) maka

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Selanjutnya dapat diurai menjadi Persamaan (2.6) yang disebut dengan *Deret Taylor*. Kemudian untuk membuktikan galatnya, definisikan fungsi $R_n(x)$ dihimpunan terbuka I dengan

$$R_{(n)}(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^{(2)} - \cdots - \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^{n}$$

Kemudian misalkan x dan a konstanta, dan definisikan fungsi baru g pada himpunan terbuka I dengan

$$g(t) = f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f^{(2)}(t)(x-t)^{(2)}}{2!} - \frac{f^{(3)}(t)}{3!}(x-t)^{(3)} - \cdots$$

$$- \frac{f^{n}(t)(x-t)^{n}}{n!} - R_n(x)\frac{(x-t)^{n}}{(x-a)^{n}}$$

Jika disubtitusikan $t = x$ jelaslah bahwa $g(x) = 0$, dan

$$g(a) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f^{(2)}(a)(x-a)^{(2)}}{2!} - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^{n}}{n!}$$

$$- R_n(x)\frac{(x-a)^{n}}{(x-a)^{n}}$$

$$= R_n(x) - R_n(x)$$

$$= 0$$

Karena x dan a adalah titik pada himpunan terbuka I yang menyebabkan $g(x) = g(a) = 0$ maka kita dapat menerapkan Teorema Nilai Rata-rata untuk Turunan. Untuk itu, terdapat sebuah bilangan real c di antara x dan a sedemikian rupa sehingga $g^{'}(c) = 0$. Selanjutnya dengan menerapkan aturan perkalian dengan berulang kali, diperoleh turunan $g(t)$ dengan bentuk:

$$g^{'}(t) = 0 - f^{'}(t) - [f'(t)(-1) + (x-t)f''(t)] - \frac{1}{2!}[f^{''}(t)2(x-t)(-1) + (x-t)^{2}$$

$$f'''(t)] - \cdots - \frac{1}{n!}[f^{n}(t)(x-t)^{n-1}(-1) + (x-t)^{n} f^{(n+1)}(t)]$$

$$- R_n(x)\frac{(n+1)(x-t)^{n})(-1)}{(x-a)^{n+1}}$$

$$= -\frac{1}{n!}[(x-t)^n f^{n+1}(t)] - (n+1)R_n(x)\frac{(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}} \tag{2.10}$$

Jadi, berdasarkan teorema nilai rata-rata untuk turunan, terdapat suatu nilai c di antara x dan a sedemikian sehingga,

$$0 = g'(c) = -\frac{1}{n!}[(x-c)^n f^{n+1}(c)] + (n+1)R_n(x)\frac{(x-c)^n}{(x-a)^{n+1}}$$

Kemudian diperoleh

$$\frac{1}{n!}[(x-c)^n f^{n+1}(c)] = (n+1)R_n(x)\frac{(x-c)^n}{(x-a)^{n+1}}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Sehingga, Persamaan (2.5) terbukti.

2.3 Metode Newton dan Orde Konvergensinya

Metode Newton berasal dari turunan deret Taylor Orde 1. Metode ini merupakan salah satu metode klasik yang sering digunakan untuk mencari akar-akar Persamaan Nonlinier. Misalkan fungsi *f* dapat diekspansi di sekitar $x = x_n$ menggunakan deret Taylor dengan x_n pendekatan $f(x) = 0$, jika $f(x)$ diekspansi di sekitar $x = x_n$ sampai orde pertama, maka diperoleh

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) \tag{2.11}$$

Karena $f(x) = 0$, selanjutnya distribusikan ke Persamaan (2.11) dengan mengambil $x = x_{n+1}$ sehingga

$$0 = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n)f'(x_n)$$

$$(x_{n+1} - x_n)f'(x_n) = -f(x_n)$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0,1,2,3,..... \tag{2.12}$$

Persamaan (2.12) merupakan Persamaan metode Newton dan untuk menentukan orde konvergensinya ditunjukkan oleh teorema berikut,

Teorema 2.2 : (Weerakon, 2000) Misalkan $f(x)$ adalah fungsi bernilai riil yang mempunyai turunan pertama, kedua dan ketiga pada interval (*a*,*b*). Jika $f(x)$ mempunyai akar $\sim$ pada interval (*a*,*b*) dan x_0 adalah nilai tebakan awal yang mendekati akar $\sim$, maka Persamaan (2.12) memiliki orde konvergensi tingkat dua dengan Persamaan error:

$$e_n = x_n - \sim \quad \text{dengan} \quad c_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\sim)}{f'(\sim)} \qquad j = 1,2,3,\cdots$$

Bukti: Misalkan $\sim$ adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\sim) = 0$. Asumsikan $f'(x) \neq 0$ dan $x_n = \sim + e_n$. Selanjutnya dengan menggunkan rumus ekspansi Taylor untuk mengaproksimasi fungsi f di sekitar $\sim$, diperoleh

$$f(x_n) = f(\sim + e_n)$$

$$f(x_n) = f(\sim) + f'(\sim)(x_n - \sim) + \frac{f''(\sim)}{2!}(x_n - \sim)^2 + \frac{f''(\sim)}{3!}(x_n - \sim)^3 + O(e_n^4)$$

Oleh karena $x_n = \sim + e$, maka diperoleh

$$f(x_n) = f(\sim) + f'(\sim)e_n + \frac{1}{2!}f''(\sim)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\sim)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.13}$$

Karena $f(\sim) = 0$, maka dengan melakukan manipulasi aljabar pada Persamaan (2.13) diperoleh

$$f(x_n) = f'(\sim)\left(e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\sim)e_n^3}{f'(\sim)} + \frac{O(e_n^4)}{f'(\sim)}\right)$$

$$= f'(\sim)\left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \tag{2.14}$$

Jika untuk $f'(x_n)$ dilakukan ekspansi Taylor di sekitar $\sim$ maka

$$f'(x_n) = f(\sim + e_n)$$

$$= f'(\sim) + f''(\sim)(x_n - \sim) + \frac{f'''(\sim)}{2!}(x_n - \sim)^2 + \frac{f^{(4)}\sim)}{3!}(x_n - \sim)^3 + O(e_n^4)$$

Oleh karena $x_n = \sim + e$, maka diperoleh

$$= f'(\sim) + f''(\sim)e_n + \frac{1}{2!} f'''(\sim)e_n^2 + \frac{1}{3!} f^{(4)}(\sim)e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= f'(\sim)\left(1 + \frac{f''(\sim)e_n}{f'(\sim)} + \frac{1}{2!}\frac{f'''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + \frac{1}{3!}\frac{f^{(4)}(\sim)e_n^3}{f'(\sim)} + \frac{O(e_n^4)}{f'(\sim)}\right)$$

$$= f'(\sim)\left(1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right) \tag{2.15}$$

Selanjutnya dilakukan pembagian Persamaan (2.14) oleh Persamaan (2.15)

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\sim)\left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{f'(\sim)\left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right)}$$

$$= \frac{\left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{\left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right)}$$

$$= \left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times (1 - \left(2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right)$$

$$+ \left(2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right)^2 - \ldots$$

$$= \left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times \left(1 - \left(2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right) + \left(4c_2^2 e_n^2 + \ldots\right)\right)$$

$$= e_n - c_2 e_n^2 + O(e_n^3) \tag{2.16}$$

Kemudian dengan mensubtitusikan Persamaan (2.16) ke Persamaan Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - (e_n c_2 e_n^2 + O(e_n^3))$$

Oleh karena $x_n = e_n + \sim$ maka $x_{n+1} = e_{n+1} + \sim$, sehingga diperoleh,

$$e_{n+1} + \sim = e_n + \sim - (e_n + c_2 e_n^2 + O(e_n^3))$$

$$e_{n+1} = c_2 e_n^2 + O(e_n^3) \tag{2.17}$$

Berdasarkan Teorema 2.2 metode Newton memiliki orde konvergensi kuadratik.

2.4 Metode Ostrowski dan Orde Konvergensinya

Diberikan Persamaan metode Ostrowski sebagai berikut:

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)} \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}, n = 0,1,2,3,\ldots \tag{2.18}$$

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}$$

Misalkan $f(x) = 0$ dan $\sim$ adalah akar dari fungsi $f(x)$ tersebut, maka $f(\sim) = 0$ dan asumsikan bahwa $f^{'}(x) \neq 0$. Dengan menggunakan ekspansi taylor untuk $f(x_n)$ di sekitar $x = \sim$ diperoleh:

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(\sim + e_n) \\ &= f(\sim) + f'(\sim)e_n + \frac{1}{2!} f''(\sim)e_n^2 + \frac{1}{3!} f'''(\sim)e_n^3 + O(e_n^4) \end{aligned} \qquad (2.19)$$

Karena $f(\sim) = 0$, maka dengan melakukan manipulasi aljabar pada Persamaan (2.19) diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f'(\sim)\left(e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\sim)e_n^3}{f'(\sim)} + \frac{O(e_n^4)}{f'(\sim)} \right) \\ &= f'(\sim)\left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \end{aligned} \qquad (2.20)$$

Sedangkan untuk $f^{'}(x)$ dapat diperoleh dengan mengekspansinya di sekitar $x = \sim$ maka

$$\begin{aligned} f'(x_n) &= f'(\sim)\left(1 + \frac{f''(\sim)e_n}{f'(\sim)} + \frac{1}{2!}\frac{f'''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + \frac{O(e_n^3)}{f'(\sim)} \right) \\ &= f'(\sim)\left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right) \end{aligned} \qquad (2.21)$$

Maka

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= \frac{f'(\sim)\left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{f'(\sim)\left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right)} \\ &= \frac{\left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{\left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right)} \end{aligned} \qquad (2.22)$$

Karena

$$\frac{1}{1+u} = (1 - u + u^2 - u^3 + ...)$$

Maka Persamaan (2.22) dapat dibentuk menjadi

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times \left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right)^{-1}$$

$$=\left(e_n+c_2e_n^2+c_3e_n^3+O(e_n^4)\right)\times\left(1-\left(2c_2e_n+3c_3e_n^2+O(e_n^3)\right)+\left(2c_2e_n+3c_3e_n^2+O(e_n^3)\right)^2-\ldots\right)$$

$$=\left(e_n+c_2e_n^2+c_3e_n^3+O(e_n^4)\right)\times\left(1-\left(2c_2e_n+3c_3e_n^2+O(e_n^3)\right)+\left(4c_2^2e_n^2+\ldots\right)\right)$$

$$=\left(e_n+c_2e_n^2+c_3e_n^3+O(e_n^4)\right)\times\left(1-2c_2e_n+\left(4c_2^2-3c_3\right)e_n^2+O(e_n^3)\right)$$

$$=e_n-c_2e_n^2+\left(2c_2^2-2c_3\right)e_n^3+O(e_n^4) \tag{2.23}$$

sehingga

$$y_n=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$y_n=\sim+e_n-(e_n-c_2e_n^2+\left(2c_2^2-2c_3\right)e_n^3+O(e_n^4))$$

$$y_n=\sim+c_2e_n^2+\left(2c_2^2-2c_3\right)e_n^3+O(e_n^4)) \tag{2.24}$$

Untuk itu,

$$f(y)=f'(\sim)(c_2e_n^2+(2c_3-2c_2^2)e_n^3+(-7c_2c_3+3c_4-4c_2^3)e_n^4$$
$$+O(e_n^5)) \tag{2.25}$$

Kemudian

$$f(x_n)-2f(y_n)=(f'(\sim)\left(e_n+c_2e_n^2+c_3e_n^3+O(e_n^4)\right))$$
$$-2(f'(\sim)(c_2e_n^2+(2c_3-2c_2^2)e_n^3+(-7c_2c_3+3c_4-4c_2^3)e_n^4+O(e_n^5))$$
$$=f'(\sim)[\left(e_n+c_2e_n^2+c_3e_n^3+O(e_n^4)\right)-2((c_2e_n^2+(2c_3-2c_2^2)e_n^3)+O(e_n^4)]$$
$$=f'(\sim)(e_n-c_2e_n^2+(-3c_3+c_2^2)e_n^3+(-5c_4+14c_2c_3+8c_2^3)e_n^4$$
$$+O(e_n^5)) \tag{2.26}$$

kemudian, kita membagikan Persamaan (2.20) dengan Persamaan (2.26) menjadi

$$\frac{f(x_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}=\frac{f'(\sim)\left(e_n+c_2e_n^2+c_3e_n^3+O(e_n^4)\right)}{f'(\sim)(e_n-c_2e_n^2+(-3c_3+c_2^2)e_n^3+O(e_n^4))}$$

$$=\frac{f'(\sim)e_n\left(1+c_2e_n+c_3e_n^2+O(e_n^3)\right)}{f'(\sim)e_n(1-c_2e_n+(-3c_3+c_2^2)e_n^2+O(e_n^3))}$$

$$=\frac{1+c_2e_n+c_3e_n^2+O(e_n^3)}{1-c_2e_n+(-3c_3+c_2^2)e_n^2+O(e_n^3)} \tag{2.27}$$

misalkan $u=-c_2e_n+(-3c_3+c_2^2)e_n^2+O(e_n^3)$, maka Persamaan (2.27) dapat kita ekspansi dengan menggunakan deret $\frac{1}{1+u}=(1-u+u^2-u^3+\ldots)$ sehingga,

$$\frac{f(x_n)}{f(x_n)-2f(y_n)} = 1 + c_2e_n + c_3e_n^2 + O(e_n^3) \times (1 - (-c_2e_n + (-3c_3 + c_2^2)e_n^2 + O(e_n^3))$$

$$(-c_2e_n + (-3c_3 + c_2^2)e_n^2 + O(e_n^3))^2 - (-c_2e_n + (-3c_3 + c_2^2)e_n^2 + O(e_n^3)^3 + \ldots)$$

$$\frac{f(x_n)}{f(x_n)-2f(y_n)} = 1 + 2c_2e_n + (4c_3 - 2c_2^2)e_n^2 + (6c_4 - 4c_2c_3 - 19c_2^3)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (2.28)$$

Sedangkan untuk

$$\frac{f(y_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\sim)(c_2e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + (-7c_2c_3 + 3c_4 - 4c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5))}{f'(\sim)\left(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)}$$

$$= \frac{c_2e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + (-7c_2c_3 + 3c_4 - 4c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5)}{1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)} \qquad (2.29)$$

misalkan $u = 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)$, maka Persamaan (2.29) dapat kita ekspansi dengan menggunakan deret $\frac{1}{1+u} = (1 - u + u^2 - u^3 + \ldots)$ sehingga,

$$\frac{f(y_n)}{f'(x_n)} = (c_2e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + (-7c_2c_3 + 3c_4 - 4c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5))$$

$$\times (1 - (2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3))(2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3))^2 - \ldots)$$

$$= c_2e_n^2 + (2c_3 - 4c_2^2)e_n^3 + (-14c_2c_3 + 4c_2^3 + 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5) \qquad (2.30)$$

selanjutnya berdasarkan Persamaan (2.27) dan Persamaan (2.30), maka

$$\frac{f(x_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f'(x_n)} = (1 + 2c_2e_n + (4c_3 - 2c_2^2)e_n^2 + (6c_4 - 4c_2c_3 - 19c_2^3)e_n^3$$

$$+ O(e_n)) \times (c_2e_n^2 + (2c_3 - 4c_2^2)e_n^3 + (-14c_2c_3 + 4c_2^3 + 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5))$$

$$= c_2e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + (-6c_2c_3 - 6c_2^3 + 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5) \qquad (2.31)$$

kemudian Persamaan (2.24) dan Persamaan (2.31) substitusikan ke Persamaan (2.18) dan diperoleh

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}\frac{f(y_n)}{f'(x_n)}$$

$$= \sim + c_2e_n^2 + \left(2c_2^2 - 2c_3\right)e_n^3 + O(e_n^4))$$

$$- c_2e_n^2 + (2c_3 - 2c_2^2)e_n^3 + (-6c_2c_3 - 6c_2^3 + 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5)$$

$$x_{n+1} = \sim + (-c_2c_3 + 2c_2^3)e_n^4 + (4c_5 - 10c_2c_4 - 6c_3^2 - 16c_3^2c_3)e_n^5 + O(e_n^6) \qquad (2.32)$$

Dari Persamaan (2.32), Sehingga diperoleh orde konvergensi Persamaan (2.18) adalah

$$x_{n+1} = \sim + (-c_2c_3 + 2c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5)$$

$$e_{n+1} + \sim\ = \sim + (-c_2c_3 + 2c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5)$$

$$e_{n+1} = \sim - \sim + (-c_2c_3 + 2c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5)$$

$$e_{n+1} = (-c_2c_3 + 2c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5) \tag{2.33}$$

Sehingga Metode Ostrowski memiliki konvergensi orde empat.

2.5 Interpolasi

Interpolasi adalah proses evaluasi dan penentuan fungsi yang mana kurva atau grafiknya diperoleh dari sekumpulan titik. Interpolasi fungsi digunakan untuk menyelesaikan persoalan dari teori hampiran.Interpolasi yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

2.5.1 Interpolasi Linier

Misalkan diberikan dua titik $(x_n, f'(x_n))$ dan $(y_n, f'(y_n))$ kemudian misalkan polinom yang menginterpolasi kedua titik itu adalah Persamaan garis lurus yang berbentuk,

$$P_1(x) = bx + c \tag{2.34}$$

Koefisian b dan c dicari dengan proses mengalihkan $(x_n, f'(x_n))$ dan $(y_n, f'(y_n))$ ke dalam Persamaan (2.34), diperoleh dua Persamaan linier,

$$f'(x_n) = bx_n + c$$

$$f'(y_n) = by_n + c$$

dan dengan mengeliminasi kedua Persamaan tersebut, diperoleh

$$b = \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} \tag{2.35}$$

dan

$$c = \frac{x_n f^{'}(y_n) - y_n f^{'}(x_n)}{x_n - y_n} \tag{2.36}$$

Subsitusikan Persamaan (2.35) dan (2.36) ke dalam Persamaan (2.34), maka diperoleh :

$$P_1(x) = \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} x + \frac{x_n f'(y_n) - y_n f'(x_n)}{x_n - y_n}$$

$$= \frac{xf'(y_n) - xf'(x_n) + x_n f'(y_n) - y_n f'(x_n)}{x_n - y_n}$$

$$= \frac{x_n f^{'}(y_n) - y_n f^{'}(y_n) + y_n f^{'}(y_n) - y_n f^{'}(x_n) + xf^{'}(y_n) - xf^{'}(x_n)}{x_n - y_n}$$

$$= \frac{(x_n - y_n) f'(y_n) + f'(x_n)(x - y_n) - f'(y_n)(x - y_n)}{x_n - y_n}$$

$$= f'(y_n) \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} (x - y_n) \tag{2.37}$$

Bentuk terakhirnya dapat diubah menjadi,

$$P_1(x) = f'(y_n) + \frac{x - y_n}{x_n - y_n} f'(x_n) - \frac{x - y_n}{x_n - y_n} f'(y_n)$$

$$= \frac{f'(y_n)(x_n - y_n) - (x - y_n) f'(y_n)}{x_n - y_n} + \frac{(x - y_n)}{x_n - y_n} f'(x_n)$$

$$= \frac{(x - x_n)}{(y_n - x_n)} f'(y_n) + \frac{(x - y_n)}{(x_n - y_n)} f'(x_n) \tag{2.38}$$

2.5.2 Interpolasi Kuadratik

Misalkan diberikan dua titik $(x_n, f^{'}(x_n))$ dan $(y_n, f^{'}(y_n))$ kemudian misalkan Polinom yang menginterpolasi kedua titik itu adalah Persamaan kuadratik yang berbentuk,

$$h(x) = ax^2 + bx + c \tag{2.39}$$

Koefisien b dan c dicari dengan proses mengalihkan $(x_n, f^{'}(x_n))$ dan $(y_n, f^{'}(y_n))$ ke dalam Persamaan (2.39), diperoleh dua persamaan kuadratik,

$$f'(x_n) = ax_n^{\ 2} + bx_n + c$$

$$f'(y_n) = ay_n^{\ 2} + by_n + c$$

Dengan mengeliminasi kedua persamaan tersebut, diperoleh b dan c dengan bentuk

$$b = \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} - a(x_n + y_n) \tag{2.40}$$

$$c = f'(x_n) + ax_n y_n - x_n \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} \tag{2.41}$$

Subsitusikan Persamaan (2.40) dan (2.41) ke dalam Persamaan (2.39), maka diperoleh :

$$\begin{aligned}
h(x) &= ax^2 + \left(\frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} - a(x_n + y_n) \right) x + f'(x_n) + ax_n y_n - x_n \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} \\
&= ax^2 - a(x_n + y_n)x + ax_n y_n + \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} x + f'(x_n) - x_n \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n} \\
&= a(x - x_n)(x - y_n) + f'(x_n) + \frac{xf'(x_n) - xf'(y_n) - x_n f'(x_n) + x_n f'(y_n)}{x_n - y_n} \\
&= a(x - x_n)(x - y_n) + f'(x_n) + \frac{f'(x_n)(x - x_n) - f'(y_n)(x - x_n)}{x_n - y_n} \\
&= a(x - x_n)(x - y_n) + f'(x_n) + \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{x_n - y_n}(x - x_n)
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Selanjutnya, bentuk terakhir dapat diubah menjadi,

$$\begin{aligned}
h(x) &= a(x - x_n)(x - y_n) + f'(x_n) + \frac{x - y_n}{x_n - y_n} f'(x_n) - \frac{x - y_n}{x_n - y_n} f'(y_n) \\
&= a(x - x_n)(x - y_n) + f'(x_n) + \frac{f'(x_n)(x - x_n) - f'(y_n)(x - x_n)}{x_n - y_n} \\
&= a(x - x_n)(x - y_n) + \frac{f'(x_n)(x_n - y_n) + f'(x_n)(x - y_n)}{x_n - y_n} + \frac{x - y_n}{y_n - x_n} f'(y_n)
\end{aligned}$$

Sehingga,

$$= a(x - x_n)(x - y_n) + \frac{(x - x_n)}{(y_n - x_n)} f'(y_n) + \frac{(x - y_n)}{(x_n - y_n)} f'(x_n) \tag{2.43}$$