BAB II
LANDASAN TEORI

Teori dasar yang digunakan pada tugas akhir ini, yaitu: orde konvergensi, deret Taylor, metode Newton dan orde konvergensinya, metode Chebyshev-Halley dan orde konvergensinya, varian metode Chebyshev-Halley dan orde konvergensinya, dan fungsi kuadratik.

2.1 Orde Konvergensi

Orde konvergensi menunjukkan kecepatan suatu metode iterasi dalam menghampiri akar-akar persamaan fungsi *f*. Definisi yang menerangkan tentang orde konvergensi adalah sebagai berikut:

Definisi 2.1 : (Mathews, 1992) Misalkan $\{x_n\}$ adalah sebuah barisan yang konvergen terhadap $\sim$ dan himpunan $e_n = x_n - \sim$ untuk $n \geq 0$ Jika terdapat bilangan konstanta galat $K \neq 0$ dan orde konvergensi $p > 0$, dengan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \sim|}{|x_n - \sim|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = K \qquad (2.1)$$

maka barisan $\{x_n\}$ konvergen terhadap $\sim$ dengan orde konvergensi p .

Jika $p = 2$ atau 3 maka metode hampiran memiliki orde konvergensi kuadratik atau kubik, dan seterusnya. Apabila notasi $e_n = x_n - \sim$ merupakan notasi kesalahan pada iterasi ke-n pada suatu metode iterasi yang menghasilkan suatu barisan $\{x_n\}$, maka suatu persamaan :

$$e_{n+1} = ce_n^p + O(e_n^{p+1}), \qquad (2.2)$$

disebut sebagai persamaan galat pada iterasi ke-$(n+1)$ dan c adalah koefisien orde galat ke- *p*.

Contoh 2.1 : Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^3 - 3x + 2$ dengan nilai awal $x_0 = -2{,}4$, dan akar $\sim = -2$ memiliki orde konvergensi kuadratik jika dengan menggunakan metode Newton.

Penyelesaian :

Diketahui metode Newton memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Untuk itu, dengan mengambil $p = 2$ yang menunjukkan bahwa orde konvergensi pada $\{x_n\}$ adalah kuadratik, sehingga diperoleh:

Tabel 2.1 Konvergensi Kuadratik Metode Newton pada Akar Sederhana

K	x_n	$x_{n+1} - x_n$	$e_n = x_n - \sim$	$\frac{\lvert e_{n+1}\rvert}{\lvert e_n\rvert^2}$
0	-2,400000000	0,323809524	0,400000000	0,476190475
1	-2,076190476	0,072594465	0,076190476	0,619469086
2	-2,003596011	0,003587422	0,003596011	0,664202613
3	-2,000008589	0,000008589	0,000008589	
4	-2,000000000	0,000000000	0,000000000	

kemudian,

$$\lvert x_{n+1} - \sim \rvert \approx K \lvert x_n - \sim \rvert^p$$

Berdasarkan Teorema *Convergence Ratefor Newton-Raphson Iteration* (Mathews, John. H, 1992) bahwa:

$$\lvert e_{n+1}\rvert \approx \frac{\lvert f''(\sim)\rvert}{\lvert f'(\sim)\rvert} \lvert e_n\rvert^2$$

sehingga,

$$K = \frac{1}{2}\frac{\lvert f''(-2)\rvert}{\lvert f'(-2)\rvert} = \frac{1}{2}\frac{\lvert -12\rvert}{\lvert 9\rvert} = \frac{2}{3}$$

kemudian diperoleh:

$$\lvert x_3 - \sim \rvert = 0{,}000008589 \text{ dan } \lvert x_2 - \sim \rvert = \lvert 0{,}003596011\rvert^2 = 0{,}0000012931$$

maka,

$$\lvert x_3 - \sim \rvert = 0{,}000008589 = \frac{3}{2}\lvert x_3 - \sim \rvert^2$$

Selanjutnya, untuk mempertegas orde konvergensi suatu metode iterasi, dapat dilakukan dengan menghitung kembali orde konvergensinya dengan menggunakan metode *Computational Order of Convergence* (COC). Berikut ini diberikan definisi tentang COC.

Definisi 2.2 : (Werakoon, 2000) Misalkan $\sim$ adalah akar dari $f(x)$, dan andaikan x_{n+1}, x_n dan x_{n-1} berturut-turut alalah iterasi yang dekat dengan $\sim$. Maka, *Computational Order of Convergence* (COC) $\circ$ dapat diaproksimasikan dengan menggunakan rumus :

$$\circ \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1}-\sim)/(x_n-\sim)\right|}{\ln\left|(x_n-\sim)/(x_{n-1}-\sim)\right|} \qquad (2.3)$$

Oleh karena $x_{n+1}-\sim = e_{n+1}$, maka Persamaan (2.3) dapat ditulis kembali menjadi :

$$\circ \approx \frac{\ln\left|e_{n+1}/e_n\right|}{\ln\left|e_n/e_{n-1}\right|} \qquad (2.4)$$

Dari orde konvergensi dan banyaknya evaluasi fungsi yang digunakan suatu metode iterasi dapat ditentukan nilai *Efficiency Index*, yang nantinya bisa menunjukkan tingkat efisiensi suatu metode iterasi dalam menghampiri akar persamaan nonlinier.

Definisi 2.3 : *Efficiency Index (I)* (Manoj Kumar Singh, 2009). Indeks efisiensi didefinisikan sebagai $p^{1/m}$, dimana p adalah orde konvergensi suatu metode dan m merupakan jumlah dari evaluasi fungsi yang diperlukan suatu metode tersebut, termasuk turunannya. Semakin besar nilai indeksnya maka metode tersebut semakin efektif dalam menyelesaikan persamaan nonlinier.

Sebagai contoh, *Efficiency Index* untuk metode Newton adalah $\sqrt[3]{2} \approx 1.414$, karena metode Newton memiliki orde konvergensi kuadratik dan memiliki dua evaluasi fungsi diantaranya $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$. Sedangkan untuk varian metode Chebyshev-Halley memiliki *Efficiency Index* ialah $\sqrt[3]{4} \approx 1{,}587$, yang diperoleh dari varian metode Chebyshev-Halley sendiri memiliki konvergensi orde empat dan memiliki tiga evaluasi fungsi diantaranya yaitu, $f(x_n)$, $f^{'}(x_n)$ dan $f(y_n)$.

Oleh karena nilai indeks varian metode Chebyshev-Halley lebih besar dibandingkan dengan nilai indeks metode Newton, maka varian metode Chebysev-Halley lebih efektif dalam menyelesaikan persamaan nonlinier.

Selanjutnya untuk menegaskan tingkat orde konvergensi suatu metode iterasi, maka dilakukan perbandingan terhadap hampiran akar-akar dari sebuah fungsi *f*. Salah satu metode yang digunakan yaitu *Computational Order of Convergence* (COC). Berikut ini diberikan definisi tentang COC:

Definisi 2.4 : *Computational Order of Convergence* (Weerakoon, 2000). Diberikan $\sim$ adalah akar dari $f(x)$, dan andaikan x_{n+1}, x_n dan x_{n-1} berturut-turut alalah iterasi yang dekat dengan $\sim$, maka, *Computational Order of Convergence* (COC) yang dinotasikann dengan $\circ$ dapat diaproksimasikan dengan menggunakan rumus

$$\circ \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1} - \sim)/(x_n - \sim)\right|}{\ln\left|(x_n - \sim)/(x_{n-1} - \sim)\right|} \tag{2.5}$$

Oleh karena $x_{n+1} - \sim = e_{n+1}$, maka Persamaan (2.5) dapat ditulis kembali menjadi

$$\circ \approx \frac{\ln\left|(e_{n+1})/(e_n)\right|}{\ln\left|(e_n)/(e_{n-1})\right|} \tag{2.6}$$

2.2 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan deret yang berbentuk polinomial yang sering digunakan untuk menghampiri fungsi-fungsi yang diberikan dengan suku banyak. Konsep deret Taylor akan dijelaskan dengan teorema di bawah ini.

Teorema 2.1 : (Edwin J. Purcell, 2004) Misalkan *f* fungsi yang mana turunan ke-$(n+1)$-nya ada untuk setiap x pada selang terbuka I yang mengandung a. Jadi untuk setiap x di dalam I,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{2!}(x-a)3 + ...$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \qquad (2.7)$$

di mana $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(£)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ adalah suku sisa dalam rumus Taylor dan £ adalah titik di antara x dan a.

Bukti : Untuk membuktikan Persamaan (2.7) di atas dibutuhkan teorema dasar kalkulus, yaitu Andaikan f kontinu pada $[a,x]$ dan andaikan F sebarang anti turunan dari f , maka

$$\int_a^x f(x)dx = F(x)-F(a) \qquad (2.8)$$

Berdasarkan teorema dasar kalkulus di atas diperoleh bahwa :

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x)-f(a)$$

atau,

$$f(x) = f(a)+\int_a^x f'(t)dt \qquad (2.9)$$

dengan menerapkan integral parsial pada suku kedua ruas kanan dari Persamaan (2.8) maka dapat dimisalkan :

$$u = f'(t) \qquad dv = dt$$

$$du = f''(t) \qquad v = t-x$$

dengan x merupakan konstanta terhadap peubah t, maka :

$$\int_a^x udv = uv\Big|_a^x - \int_a^x vdu$$

$$\int_a^x f'(t)dt = f'(a)(x-a)-\int_a^x (t-x)f''(t)dt \qquad (2.9)$$

Substitusikan Persamaan (2.9) ke dalam Persamaan (2.8), maka diperoleh

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\int_a^x (x-t)f''(t)dt \qquad (2.10)$$

dengan cara yang sama, untuk $\int_a^x (x-t)f''(t)dt$ adalah, misalkan :

$$u = f''(t) \qquad\qquad dv = (x-t)dt$$

$$du = f'''(t) \qquad\qquad v = -\frac{(x-t)^2}{2}$$

maka diperoleh :

$$\int_a^x (x-t) f''(t)dt = -\left. f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\right|_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)dt$$

$$\int_a^x (x-t) f''(t)dt = f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)dt \qquad (2.11)$$

dengan memasukkan Persamaan (2.11) ke Persamaan (2.10), diperoleh :

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \int_a^x \frac{(x-a)^2}{2} f'''(t)dt \qquad (2.12)$$

Apabila proses yang sama dilakukan sebanyak (n), maka diperoleh :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$+ \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt \qquad (2.13)$$

dengan,

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, dt \qquad (2.14)$$

Secara umum, deret Taylor dapat dituliskan sebagai berikut :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \qquad (2.15)$$

dengan $R_n(x) = \frac{(x-x_0)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x-x_0)^{n+1}$

Ekspansi deret taylor untuk mengaproksimasikan fungsi f disekitar x_0, dimana $x_0 = 0$ maka diperoleh :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

$$= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_n(x) \qquad (2.16)$$

Persamaan (2.16) disebut deret MacLaurin, untuk turunannya dapat dituliskan sebagai :

$$f'(x) = f'(0) + x^2 f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{(n-1)!}f^{(n)}(0) \qquad (2.17)$$

Selanjutnya, Misalkan $\sim$ adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\sim) = 0$. Asumsikan $f'(x) \neq 0$ dan $x_n = \sim + e_n$, dan dengan menggunakan ekspansi Deret Taylor untuk mengaproksimasi fungsi *f* di sekitar $\sim$, diperoleh :

$$f(x) = f(\sim) + f'(\sim)(x-\sim) + \frac{f''(\sim)}{2!}(x-\sim)^2 + \cdots$$

jika dipilih $x = x_n$, maka

$$f(x_n) = f(\sim) + f'(\sim)(x_n - \sim) + \frac{f''(\sim)}{2!}(x_n - \sim)^2 + \cdots$$

$$= f(\sim) + f'(\sim)e_n + \frac{f''(\sim)}{2!}(e_n)^2 + \cdots \qquad (2.18)$$

Oleh karena $x_n = \sim + e_n$, maka

$$f(x_n) = f'(\sim + e_n) = f'(\sim) + f''(\sim)(e_n{}^2) + \cdots$$

$$= f'(\sim)e_n + \frac{1}{2!}f''(\sim)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\sim)e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= f'(\sim)\left(e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\sim)e_n^3}{f'(\sim)} + \frac{O(e_n^4)}{f'(\sim)}\right)$$

$$= f'(\sim)\left(e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\sim)e_n^3}{f'(\sim)} + O(e_n^4)\right)$$

$$= f'(\sim)\left(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right) \qquad (2.19)$$

Contoh 2.2 : Misalkan $f(x) = e^x$. Tentukanlah hampiran dan grafiknya untuk orde 1, 2, 3, dan 4 menggunakan deret Taylornya dengan $x_0 = 0$ pada titik $x = 2$!

Penyelesaian :

Subsitusikan terlebih dahulu $f(x) = e^x$ dalam bentuk turunan,

$$f(x) = e^x \quad ; \quad f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x \quad ; \quad f'(0) = e^0 = 1$$

$$f''(x) = e^x \quad ; \quad f''(0) = e^0 = 1$$

$$f^{(3)}(x) = e^x \quad ; \quad f^{(3)}(0) = e^0 = 1$$

$$f^{(4)}(x) = e^x \quad ; \quad f^{(4)}(0) = e^0 = 1$$

Kemudian dapat diuraikan dalam bentuk deret taylor sebagai berikut :

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$= 1 + 1(x - 0)$$

$$= 1 + x$$

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$P_4(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$$

$$+ \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

Nilai sejati fungsi tersebut adalah

$$f(2) = e^2 = 7{,}389056099$$

Maka, hampirannya adalah

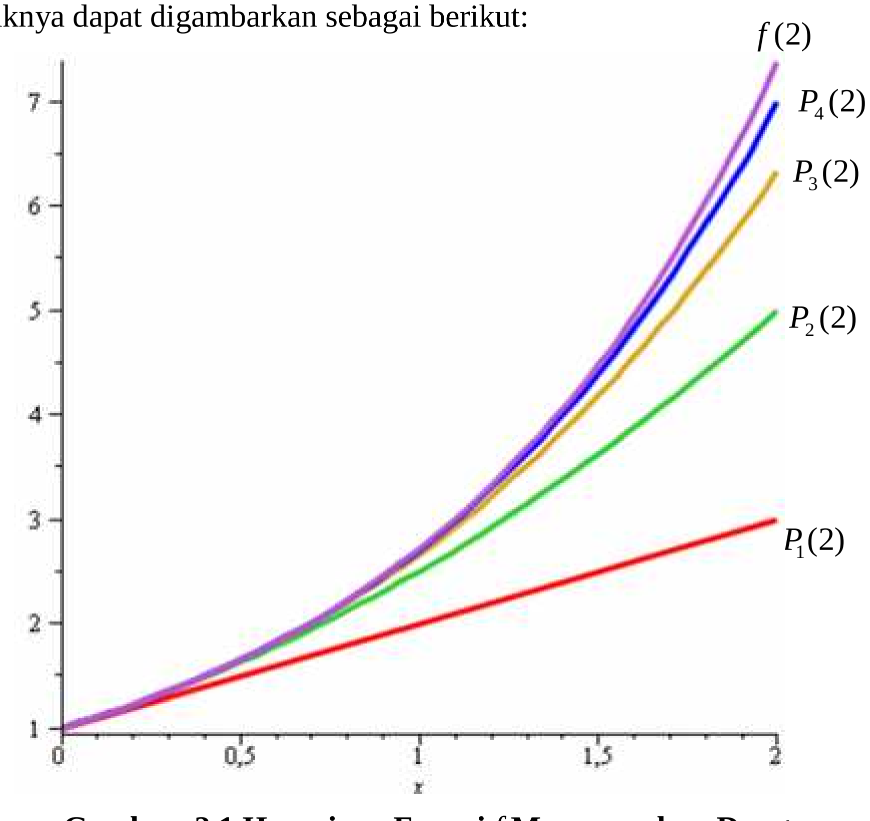
$$P_1(2) = 1 + x = 3$$

$$P_2(2) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} = 5$$

$$P_3(2) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = \frac{19}{3}$$

$$P_4(2) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} = 7$$

Grafiknya dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.1 Hampiran Fungsi *f* Menggunakan Deret

Berdasarkan Gambar 2.1 maka diperoleh orde 1,2, 3 dan 4 dengan nilai hampiran 7 yang berada pada orde 4, yang mana nilai hampiran tersebut mendekati nilai sejati dari $f(x) = e^x$.

2.3 Metode Newton dan Konvergensinya

Metode Newton diturunkan dari Deret Taylor Orde 1 sebagai berikut:

$f(x_{n+1})$

diekspansi di sekitar x_n, maka

$$f(x_{n+1}) \approx f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) f'(x_n) \tag{2.20}$$

dengan x_{n+1} adalah akar persamaan $\sim$, sehingga

$$f(\sim) = 0 \rightarrow f(x_{n+1}) \approx 0$$

sehingga persamaan (2.20) menjadi:

$$0 = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) f'(x_n)$$

$$(x_{n+1} - x_n) f'(x_n) = -f(x_n)$$

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.21}$$

persamaan diatas merupakan metode Newton.

Selanjutnya, orde konvergensi metode Newton akan dijelaskan pada teorema dibawah ini :

Teorema 2.2 : Misalkan $f(x)$ adalah fungsi bernilai rill yang mempunyai turunan pertama, kedua dan ketiga pada interval (*a*,*b*). Jika $f(x)$ mempunyai akar $\sim$ pada interval (*a*,*b*) dan x_0 adalah nilai tebakan awal yang cukup dekat ke $\sim$, maka metode iterasi pada Persamaan (2.21) memenuhi persamaan error

$$e_{n+1} = c_2 e_n^2 + O(e_n^3)$$

di mana $e_n = x_n - \sim$ dan $c_j = \dfrac{1}{j!} \dfrac{f^{(j)}(\sim)}{f'(\sim)}$ $k = 1,2,3,\cdots$ (2.22)

Bukti : Misalkan $\sim$ adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\sim) = 0$. Asumsikan $f'(x) \neq 0$ dan $x_n = \sim + e_n$, dan dengan menggunakan ekspansi Deret Taylor untuk mengaproksimasi fungsi *f* di sekitar x_n, diperoleh:

$$f(x_n) = f(\sim + e_n)$$

$$= f(\sim) + f'(\sim)e_n + \frac{1}{2!} f''(\sim)e_n^2 + \frac{1}{3!} f'''(\sim)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (2.23)$$

karena $f'(\sim) = 0$, maka dengan melakukan manipulasi aljabar pada Persamaan (2.23) diperoleh :

$$= f'(\sim)\left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \qquad (2.24)$$

Jika untuk $f'(x_n)$ dilakukan ekspansi Taylor di sekitar $x = \sim$ maka

$$f'(x_n) = f'(\sim)\left(1 + \frac{f''(\sim)e_n}{f'(\sim)} + \frac{1}{2!}\frac{f'''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + \frac{O(e_n^3)}{f'(\sim)}\right)$$

$$= f'(\sim)\left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right) \qquad (2.25)$$

Apabila Persamaan (2.24) dibagi dengan Persamaan (2.25) diperoleh :

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\sim)\left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{f'(\sim)\left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right)}$$

$$= \frac{\left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{\left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right)}$$

$$= \left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times \left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right)^{-1}$$

$$= \left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times (1 - \left(2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right)$$

$$+ \left(2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right)^2 - \ldots$$

$$= \left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times \left(1 - \left(2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right) + \left(4c_2^2 e_n^2 + \ldots\right)\right)$$

$$= \left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times \left(1 - 2c_2 e_n + \left(4c_2^2 - 3c_3\right)e_n^2 + O(e_n^3)\right)$$

$$= e_n - c_2 e_n^2 + O(e_n^3) \qquad (2.26)$$

Selanjutnya Persamaan (2.26) disubstitusikan ke Persamaan (2.21) dan diperoleh :

$$x_{n+1} = x_n - \left(e_n - c_2 e_n^2 + O(e_n^3)\right)$$

$$e_{n+1} + \sim = e_n + \sim - e_n + c_2 e_n^2 + O(e_n^3))$$

$$e_{n+1} = c_2 e_n^2 + O(e_n^3) \qquad (2.27)$$

2.4 Metode Chebyshev-Halley dan Orde Konvergensinya

Pandang persamaan metode Chebyshev-Halley (Yaotang Li, Peiyuan Zhang, 2009) sebagai berikut :

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{L_f}{1 - \ L_f}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{2.28}$$

Metode Chebyshev-Haley mempunyai dua fungsi yaitu $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$ untuk Persamaan (2.27) dengan,

$$L_f = \frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}. \tag{2.29}$$

Sedangkan Persamaan (2.28) melibatkan tiga evaluasi fungsi yaitu $f''(x_n)$, $f(x_n)$ dan $f'(x_n)^2$. Selanjutnya akan dibahas orde konvergensi metode Chebyshev-Halley.

Teorema 2.3 : Misalkan $\sim$ adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\sim) = 0$. Asumsikan bahwa $f'(x) \neq 0$ dan $x_n = \sim + e_n$. Seterusnya dengan menggunakan ekspansi deret Taylor diperoleh

$$f(x_n) = f(\sim + e_n)$$

$$= f(\sim)e_n + f'(\sim)(x_n - \sim) + \frac{f''(\sim)}{2!}(x_n - \sim)^2 + \frac{f'''(\sim)}{3!}(x_n - \sim)^3 + O(e_n^4)$$

Oleh karena $x_n = \sim + e$, maka diperoleh

$$f(x_n) = f(\sim) + f'(\sim)e_n + \frac{1}{2!}f''(\sim)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\sim)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.30}$$

Karena $f(\sim) = 0$, maka dengan melakukan manipulasi aljabar pada Persamaan (2.30) menjadi :

$$f(x_n) = f'(\sim)\left(e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\sim)e_n^3}{f'(\sim)} + O(e_n^4)\right) \tag{2.31}$$

misalkan $c_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\sim)}{f'(\sim)}$, dengan $j = 1,2,3,\cdots$, maka Persamaan (2.31) menjadi

$$f(x_n) = f'(\sim)\left(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \tag{2.32}$$

Jika ekspansi deret taylor dilakukan terhadap $f'(x_n)$ di sekitar $\sim$ maka,

$$f'(x_n) = f'(\sim) + f''(\sim)(x_n - \sim)e_n + \frac{f'''(\sim)}{2!}(x_n - \sim)^2 + \frac{f^4(\sim)}{3!}(x_n - \sim)^3 + O(e_n^4)$$

Oleh karena $x_n = \sim + e_n$, maka diperoleh

$$= f'(\sim) + f''(\sim)e_n + \frac{1}{2!} f'''(\sim)e_n^2 + \frac{1}{4!} f^4(\sim)e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= f'(\sim)\left(1 + \frac{f''(\sim)e_n}{f'(\sim)} + \frac{1}{2!}\frac{f'''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + \frac{1}{3!}\frac{f^4(\sim)e_n^3}{f'(\sim)}\frac{O(e_n^4)}{f'(\sim)}\right)$$

$$= f'(\sim)\left(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right) \tag{2.33}$$

Jika ekspansi deret taylor dilakukan terhadap $f''(x_n)$ di sekitar $x = \sim$ maka,

$$f''(x_n) = f''(\sim + e_n)$$

$$= f''(\sim) + f'''(\sim)e_n + \frac{1}{2!} f^4(\sim)e_n^2 + O(e_n^3)$$

$$= f'(\sim)\left(\frac{f''(\sim)}{f'(\sim)} + \frac{f'''(\sim)e_n}{f'(\sim)} + \frac{1}{2!}\frac{f^4(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + \frac{O(e_n^3)}{f'(\sim)}\right)$$

$$= f'(\sim)\left(2c_2 + 6c_3e_n + 12c_4e_n^2 + O(e_n^3)\right) \tag{2.34}$$

Jika Persamaan (2.32) dibagi dengan Persamaan (2.32) diperoleh :

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\sim)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4))}{f'(\sim)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3))}$$

$$= \frac{e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)}{1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)}$$

maka, dengan menggunakan ekspansi deret dalam sehingga diperoleh :

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \left(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times \left(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)^{-1}$$

$$= \left(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times$$

$$\left(1 - \left(2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right) + \left((2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)^2 - \ldots\right)$$

$$= \left(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times \left(1 - 2c_2e_n + (4c_2^2 - 3c_3)e_n^2 + O(e_n^3)\right)$$

$$= e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.35}$$

Hasil kali Persamaan (2.34) dengan Persamaan (2.32) diperoleh

$$f''(x_n)f(x_n) = \left(f'(\sim)\left(2c_2 + 6c_3e_n + O(e_n^2)\right)\right) \times \left(f'(\sim)\left(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right)\right)$$

$$= f'(\sim)^2\left(2c_2e_n + (2c_2^2 + 6c_3)e_n^2 + 8c_2c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \tag{2.36}$$

dan hasil kuadrat Persamaan (2.33) memberikan :

$$f'(x_n)^2 = \left(f'(\sim)\left(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)\right)^2$$

$$= f'(\sim)^2\left(1 + 4c_2e_n + (6c_3 + 4c_2^2)e_n^2 + 12c_2c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \tag{2.37}$$

Selanjutnya, jika Persamaan (2.36) dibagi dengan Persamaan (2.37) diperoleh :

$$\frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2} = \frac{f'(\sim)^2\left(2c_2e_n + (2c_2^2 + 6c_3)e_n^2 + 8c_2c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{f'(\sim)^2\left(1 + 4c_2e_n + (6c_3 + 4c_2^2)e_n^2 + 12c_2c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right)}$$

$$= \left(2c_2e_n + (2c_2^2 + 6c_3)e_n^2 + 8c_2c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \mathrm{X}$$

$$\left(1 + 4c_2e_n + (6c_3 + 4c_2^2)e_n^2 + 12c_2c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right)^{-1}$$

dan dengan menggunakan ekspansi deret diperoleh

$$\frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2} = \left(2c_2e_n + (2c_2^2 + 6c_3)e_n^2 + 8c_2c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) \mathrm{X}$$

$$\left(1 - \left(4c_2e_n + (6c_3 + 4c_2^2)e_n^2 + 12c_2c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right) + \right.$$

$$\left.\left(4c_2e_n + (6c_3 + 4c_2^2)e_n^2 + 12c_2c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right)^2 - \ldots\right)$$

$$= 2c_2e_n + (6c_3 - 6c_2^2)e_n^2 + (-28c_2c_3 + 16c_2^3)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.38}$$

Oleh kareana

$$\frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2} = L_f$$

maka diperoleh :

$$L_f = 2c_2e_n + (6c_3 - 6c_2^2)e_n^2 + (-28c_2c_3 + 16c_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)$$

Selanjutnya,

$$1 - \ \ L_f = 1 - \sim(2c_2e_n + (6c_3 - 6c_2^2)e_n^2 + (-28c_2c_3 + 16c_2^3)e_n^3 + O(e_n^4))$$

$$= - \sim(2c_2e_n + (6c_3 - 6c_2^2)e_n^2 + (-28c_2c_3 + 16c_2^3)e_n^3 + O(e_n^4))$$

maka diperoleh :

$$\frac{L_f}{1 - \ \ L_f} = \frac{2c_2e_n + (6c_3 - 6c_2^2)e_n^2 + (-28c_2c_3 + 16c_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)}{- \ \ (2c_2e_n + (6c_3 - 6c_2^2)e_n^2 + (-28c_2c_3 + 16c_2^3)e_n^3 + O(e_n^4))}$$

$$= 1 + \quad \left(2c_2 e_n + (6c_3 - 6c_2^2)e_n^2 + (-28c_2c_3 + 16c_2^3)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right) +$$

$$^{2}\left(2c_2 e_n + (6c_3 - 6c_2^2)e_n^2 + (-28c_2c_3 + 16c_2^3)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right)^2 + O\left(e_n^4\right)$$

$$= 1 + 2 \quad c_2 e_n + (\quad (-6c_2^2 + 6c_3) + 4 \quad {}^{2}c_2^2)e_n^2 +$$

$$4 \quad {}^{2}c_2(-6c_2^2 + 6c_3)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.39}$$

Jika Persamaan (2.38) dikalikan dengan Persamaan (2.39), maka

$$\frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2} \times \frac{L_f}{1- \quad L_f} = (2c_2e_n + (6c_3 - 6c_2^2)e_n^2 + (-28c_2c_3 + 16c_2^3)e_n^3 + O(e_n^4)) \times$$

$$(1 + 2 \quad c_2 e_n + (\quad (-6c_2^2 + 6c_3) + 4 \quad {}^{2}c_2^2)e_n^2 +$$

$$4 \quad {}^{2}c_2(-6c_2^2 + 6c_3)e_n^3 + O(e_n^4))$$

$$= 2c_2e_n + (4 \quad c_2^2 - 6c_2^2 + 6c_3)e_n^2 + (2(\quad (-6c_2^2 + 6c_3) + 4 \quad {}^{2}$$

$$c_2^2)c_2 + 2(-6c_2^2 + 6c_3)\sim c_2 - 28c_2c_3 + 16c_2^3)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.40}$$

Untuk persamaan,

$$\left(1 + \frac{1}{2}\frac{L_f}{1- \quad L_f}\right) = (1 + \frac{1}{2}(1 + 2 \quad c_2e_n + (\quad (-6c_2^2 + 6c_3) + 4 \quad {}^{2}c_2^2)e_n^2 +$$

$$4 \quad {}^{2}c_2(-6c_2^2 + 6c_3)e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= \frac{1}{2}O(e_n^4) + 1 + ((\quad (-6c_2^2 + 6c_3) + 4 \quad {}^{2}c_2^2)c_2 + (-6c_2^2 + 6c_3)$$

$$c_2 - 14c_2c_3 + 8c_2^3)e_n^3 + (2 \quad c_2^2 - 3c_2^2 + 3c_3)e_n^2 + {}_2 \; e_n \tag{2.41}$$

Kemudian Persamaan (2.41) dikalikan ke Persamaan (2.35) maka diperoleh :

$$\left(1 + \frac{1}{2}\frac{L_f}{1- \quad L_f}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (\frac{1}{2}O(e_n^4) + 1 + ((\quad (-6c_2^2 + 6c_3) + 4 \quad {}^{2}c_2^2)c_2 + (-6c_2^2 + 6c_3)$$

$$c_2 - 14c_2c_3 + 8c_2^3)e_n^3 + (2 \quad c_2^2 - 3c_2^2 + 3c_3)e_n^2 + c_2e_n)$$

$$\text{X } (e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4))$$

$$= e_n - c_3 + 2c_2^2 - 2 \quad c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.42}$$

sehingga,

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{L_f}{1- \quad L_f}\right)\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)$$

$$x_{n+1} = x_n - \left(e_n - c_3 + 2c_2^2 - 2\ \ c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)\right) \tag{2.43}$$

Berdasarkan Persamaan (2.42) sehingga diperoleh orde konvergensi Persamaan (2.28) adalah :

$$e_{n+1} + \sim\ = e_n + \sim - (e_n - c_3 + 2c_2^2 - 2\ \ c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4))$$

$$e_{n+1} + \sim\ = e_n + \sim - e_n + c_3 - 2c_2^2 + 2\ \ c_2^2)e_n^3 - O(e_n^4)$$

$$e_{n+1} = \sim - (c_3 - 2c_2^2 + 2\ \ c_2^2)e_n^3 - O(e_n^4)$$

$$e_{n+1} = (c_3 - 2c_2^2 + 2\ \ c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.44}$$

Jika ruas kiri dan kanan pada Persamaan (2.44) di kurangkan dengan $\sim$, diperoleh,

$$e_{n+1} = -(c_3 - 2c_2^2 + 2\ \ c_2^2)e_n^3 - O(e_n^4)$$

$$e_{n+1} = (c_3 + 2c_2^2 - 2\ \ c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.45}$$

2.5 Varian Metode Chebyhsev-Halley

Merujuk dari jurnal (Yaotang Li, Peiyuan Zhang, 2009) bahwa Varian Metode Chebyshev-Halley merupakan modifikasi Metode Classic Chebyshev-Halley menggunakan pendekatan deret taylor dengan menekspansi turunan kedua.

Pandang kembali metode Chebyshev-Halley pada Persamaan (1.2) sebagai berikut :

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{L_f}{1-\ \ L_f}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{2.46}$$

dengan,

$$L_f = \frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2} \tag{2.47}$$

Misalkan,

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.48}$$

Ekspansi deret Taylor pada $f(y_n)$ di sekitar x_n sehingga diperoleh :

$$f(y_n) \approx f(x_n) + f'(x_n)(y_n - x_n) + \frac{f''(x_n)(y_n - x_n)^2}{2} \tag{2.49}$$

Selanjutnya, substitusikan Persamaan (2.47) ke Persamaan (2.48), sehingga diperoleh,

$$f(y_n) \approx f(x_n) - f(x_n) + \frac{1}{2}\left(f''(x_n) \frac{f(x_n)^2}{f'(x_n)^2} \right)$$

$$\approx \frac{f''(x_n) f(x_n)^2}{2 f'(x_n)^2} \qquad (2.50)$$

dan kemudian kalikan kedua ruas Persamaan (2.49) dengan $2 f'(x_n)^2$, maka

$$2 f'(x_n)^2 f(y_n) \approx f''(x_n) f(x_n)^2 \qquad (2.51)$$

selanjutnya, kedua ruas pada Persamaan (2.50) dikalikan dengan $\frac{1}{f(x_n)^2}$ diperoleh,

$$f''(x_n) \approx \frac{2 f'(x_n)^2 f(y_n)}{f(x_n)^2} \qquad (2.52)$$

Substitusikan Persamaan (2.51) ke Persamaan (2.46), sehingga diperoleh

$$L_f(x_n) = \frac{\frac{2 f'(x_n)^2 f(y_n)}{f(x_n)^2} f(x_n)}{f'(x_n)^2}$$

$$= \frac{2 f(y_n)}{f(x_n)} \qquad (2.53)$$

Substitusikan Persamaan (2.51) ke Persamaan (1.2) diperoleh :

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{L_f}{1 - L_f} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\frac{2 f(y_n)}{f(x_n)}}{1 - \left(\frac{2 f(y_n)}{f(x_n)} \right)} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (2.54)$$

Dengan menggunakan manipulasi aljabar, maka Persamaan (2.53) dapat disederhanakan menjadi :

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{f(y_n)}{f(x_n) - 2\ f(y_n)} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (2.55)$$

Dimana $\quad = 1$. Maka diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{f(y_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.56}$$

Persamaan (2.55) merupakan persamaan modifikasi Varian Metode Chebyshev-Halley. Selanjutnya, orde konvergensi Metode Chebyshev-Halley akan dijelaskan sebagai berikut:

Teorema 2.4 : (Yaotang Li, Peiyuan Zang, 2009) Misalkan $f(x)$ adalah fungsi bernilai riil yang mempunyai turunan di $f : I \to R$, untuk I interval terbuka. Jika x_0 menghampiri $\sim$ maka persamaan diatas mempunyai orde konvergensi tingkat empat dengan persamaan error

$$e_{n+1} = \left(2c_2^3 - C_2c_3\right)e_n^4 + O\left(e_n^5\right)$$

Misalkan

$$A = 0, B = 1, C = 1, D = -2$$

dengan $e_n = x_n - \sim$ dan $c_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\sim)}{f'(\sim)}$

Bukti : Misalkan $\sim$ adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\sim) = 0$. Asumsikan bahwa $f'(x) \neq 0$ dan $x_n = \sim + e_n$. Seterusnya dengan menggunakan ekspansi Taylor untuk mengaproksimasikan fungsi f di sekitar x_n, diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(\sim + e_n) \\ &= f(\sim) + f'(\sim)e_n + \frac{1}{2!}f''(\sim)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\sim)e_n^3 + O(e_n^4) \\ &= f'(\sim)\left(e_n + c_2e_n^2 +_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \end{aligned} \tag{2.57}$$

Jika untuk $f'(x_n)$ dilakukan ekspansi Taylor di sekitar $\sim$ maka,

$$\begin{aligned} f'(x_n) &= f'(\sim + e_n) \\ &= f'(\sim) + f''(\sim)e_n + \frac{1}{2!}f'''(\sim)e_n^2 + O(e_n^3) \\ &= f'(\sim)\left(1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right) \end{aligned} \tag{2.58}$$

dengan $C_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\sim)}{f'(\sim)}$ dan $j = 1, 2, 3, \cdots$ dan $e_n = x_n - \sim$. Selanjutnya, dari Persamaan (2.57) dan (2.58) diperoleh :

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\sim)\left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + O\left(e_n^5\right)\right]}{f'(\sim)\left[1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right]}$$

$$= \frac{\left[e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + O\left(e_n^5\right)\right]}{\left[1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right]}$$

$$= \left(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + O\left(e_n^5\right)\right) \times \left(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right)^{-1}$$

$$= \left(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + c_4e_n^4 + O\left(e_n^5\right)\right) \times \left(1 - \left(2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right)\right.$$

$$\left. + 2\left(c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O\left(e_n^3\right)\right)^2 - \ldots\right)$$

sehingga diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = (e_n - c_2e_n^2 + (-2c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + (7c_2c_3 + 4c_2^3 - 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5) \qquad (2.59)$$

Selanjutnya, substitusikan Persamaan (2.59) ke Persamaan (2.47)

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - (e_n - c_2e_n^2 + (-2c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + (7c_2c_3 + 4c_2^3 - 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5)$$

$$= \sim + e_n - \left(e_n - c_2e_n^2 + \left(-2c_3 + 2c_2^2\right)\right)e_n^3 + (7c_2c_3 + 4c_2^3 - 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5)$$

$$= \sim + -c_2e_n^2 + 2\left(c_3 - c_2^2\right)e_n^3 + (7c_2c_3 + 4c_2^3 - 3c_4)e_n^4 + O(e_n^5) \qquad (2.60)$$

Dengan demikian, maka

$$f(y_n) = f(\sim + e_n)$$

$$= f(\sim) + f'(\sim)(y_n - \sim) + \frac{f''(\sim)}{2!}(y_n - \sim)^2 + \frac{f'''(\sim)}{3!}(y_n - \sim)^4 + \frac{f(4)(\sim)}{4!}(y_n - \sim)^4 O\left(e_n^5\right) \qquad (2.61)$$

Karena $f(\sim) = 0,$ maka dengan melakukan manipulasi aljabar pada Persamaan (2.61) diperoleh

$$= f'(\sim) + \left(c_2e_n^2\right) + \frac{1}{2!}f''(\sim)\left(c_2e_n^2\right)^2 + \frac{1}{3!}f'''(\sim)\left(c_2e_n^2\right)^3 + \frac{1}{4!}f''(\sim)\left(c_2e_n^2\right)^4 + O\left(e_n^5\right)$$

$$= f'(\sim)\left[c_2e_n^2 + \left(-2c_3 + 2c_2^2\right)e_n^3 + (7c_2c_3 + 4c_2^3 - 3c_4)e_n^4 + O\left(e_n^5\right)\right] \qquad (2.62)$$

Untuk,

$$Af(x_n)+Bf(y_n)=A+(Ac_2+Bc_2)e_n+\left(Ac_3+B\left(2c_3-2c_2^2\right)\right)e_n^2+$$
$$\left(Ac_4+B\left(-c_2\left(-3c_3+4c_2^2\right)+3c-10c_2c_3\right)\right)e_n^4+O\left(e_n^5\right) \quad (2.63)$$

dan untuk

$$Cf(x_n)+Df(y_n)=Ce_n+(Cc_2+Dc_2)e_n^2+(Cc_3+D(2c_3-2c_2^2))e_n^3+$$
$$(Cc_4+D(-c_2(-3c_2+4c_2^2)+3c_4-10c_2c_3))e_n^4+O(e_n^5) \quad (2.64)$$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{Af(x_n)+Bf(y_n)}{Cf(x_n)+Df(y_n)}=1+\frac{(Cc_2+Dc_2)e_n}{C}+\frac{(Cc_3+D(2c_3-2c_2^3))e_n^2}{C}+$$
$$\frac{(Cc_4+D(-c_2(-3c_3+4c_2^2)+3c_4-10c_2c_3))e_n^3}{C}+O(e_n^4)$$
$$=\frac{(Cc_2+Dc_2)e_n}{C}+\frac{(Cc_3+D(2c_3-2c_2^3))e_n^2}{C}+$$
$$\frac{(Cc_4+D(-c_2(-3c_3+4c_2^2)+3c_4-10c_2c_3))e_n^3}{C}+O(e_n^4) \quad (2.65)$$

Maka, dengan menggunakan ekspansi deret dalam sehingga bentuk

$$\frac{Af(x_n)+Bf(y_n)}{Cf(x_n)+Df(y_n)}=\frac{A}{C}+\frac{\left(-\frac{A(Cc_2+Dc_2)}{C}+Ac_2+Bc_2\right)e_n}{C}+\frac{1}{C}\left((A(-\frac{Cc_3+D(2c_3-2c_2^2}{C}\right)$$
$$+\frac{(Cc_2+Dc_2)^2}{C^2})-\frac{(Ac_2+Bc_2)(Cc_2+Dc_2)}{C}+Ac_3+B(2c_3-2c_2^2))e_n^2)$$
$$+\frac{1}{C}\left(\left(\begin{array}{l}(Ac_2+Bc_2)\left(-\frac{Cc_3+D(2c_3-2c_2^2)}{C}+\frac{(Cc_2+Dc_2)^2}{C^2}\right)+\\ A(\frac{Cc_4+D(-c_2(-3c_3+4c_2^2)+3c_4-10c_2c_3)}{C}+\\ \frac{2(Cc_2+Dc_2)(Cc_3+D(2c_3-2c_2^2))}{C_2})+\\ Ac_4+B(-c_4(-3c_3+4c_2^2)+3c_4-10c_2c_3)\\ -\frac{(Ac_3+B(2c_3-2c_2^2))(Cc_2+Dc_2)}{C}\end{array}\right)e_n^3\right)+O(e_n^4)$$
$$(2.66)$$

Selanjutnya kita masukan A, B, C dan D maka didapat

$$\frac{Af(x_n)+Bf(y_n)}{Cf(x_n)+Df(y_n)} = c_2 e_n + (-c_2^2 + 2c_3)e_n^2 + (c_2(3c_3 - 3c_2^2) - c_2(-3c_3 + 4c_2^2)$$

$$+3c_4 - 10c_2c_3 + (2c_3 - 2c_2^2)c_2)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (2.67)$$

Kemudian subtitusikan Persamaan (2.66) dan Persamaan (2.58) ke Persamaan (2.55) sehingga diperoleh:

$$x_{n+1} = \sim - (2c_2^3 - c_2c_3)e_n^4 + O(e_n^5) \qquad (2.68)$$

Karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \sim$, maka Persamaan (2.63)

menjadi $e_{n+1} + \sim \; = \sim - (2c_2^3 - c_2c_3)e_n^4 + O(e_n^5)$

$$e_{n+1} = (2c_2^3 - c_2c_3)e_n^4 + O(e_n^5) \qquad (2.69)$$

Persamaan (2.68) merupakan orde konvergensi dari Persamaan (2.55).

2.6 Fungsi Kuadratik

Persamaan adalah sebuah pernyataan bahwa dua kuantitas setara, dan menyelesaikan suatu persamaan berarti menentukan nilai-nilai dari faktor yang tidak diketahui nilainya. Nilai dari faktor-faktor yang tidak diketahui disebut sebagai akar dari persamaan. Persamaan kuadrat adalah persamaan pangkat yang tertinggi dari kuantitas yang tidak diketahui adalah dua. yang berbentuk

$$\text{¤}(x) = ax^2 + bx + c \qquad (2.70)$$

Misalkan $\text{¤}(x)$ menginterpolasi dititk $(x_n, f(x_n))$, sehingga diperoleh:

$$\text{¤}'(x) = 2ax + b \qquad (2.71)$$

Asumsikan $\text{¤}'(x) \approx \text{¤}'(x_n)$, sehingga diperoleh:

$$\text{¤}'(x_n) = 2ax_n + b \qquad (2.72)$$

Asumsikan bahwa $\text{¤}'(x_n) = f'(x_n)$, sehingga diperoleh:

$$\text{¤}'(x_n) = f'(x_n)$$

$$2ax_n + b = f'(x_n)$$

$$b = f'(x_n) - 2ax_n \qquad (2.73)$$

Substitusikan Persamaan (2.72) kedalam Persamaan (2.71) sehingga diperoleh:

$$\text{¤}^{'}(x) = 2ax + f^{'}(x_n) - 2ax_n \tag{2.74}$$