BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Sejarah Graf

Lahirnya teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler seorang matematikawan berkebangsaan Swiss pada Tahun 1736 melalui tulisan Euler yang berisi tentang upaya pemecahan masalah jembatan Konisberg yang sangat terkenal di Eropa. Apakah mungkin melalui ketujuh buah jembatan itu masing-masing tepat satu kali, dan kembali lagi ke tempat semula? Sebagian penduduk kota sepakat bahwa memang tidak mungkin melalui setiap jembatan itu hanya sekali dan kembali lagi ke tempat asal mula keberangkatan, tetapi mereka tidak dapat menjelaskan mengapa demikian jawabannya, kecuali dengan cara coba-coba. Euler memodelkan masalah ini ke dalam graf. Daratan (titik-titik yang dihubungkan oleh jembatan) dinyatakannya sebagai titik (noktah) yang disebut simpul (*vertex*), dan jembatan dinyatakan sebagai garis yang disebut sisi (*edge*). Setiap titik diberi label huruf A, B, C, D. Jawaban yang dikemukakan Euler adalah orang tidak mungkin melalui ketujuh jembatan itu masing-masing satu kali dan kembali lagi ke tempat asal keberangkatan jika derajat setiap simpul tidak seluruhnya genap. Yang dimaksud dengan derajat adalah banyaknya garis yang bersisian dengan titik.

Secara matematis, graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik (*vertices atau node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges atau arcs*) yang menghubungkan sepasang titik (Rinaldi Munir, 2010).

Definisi diatas menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada, minimal satu. Pengaitan titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola graf tertentu. Graf yang hanya mempunyai satu buah simpul tanpa sebuah sisi pun dinamakan graf trivial.

Titik pada graf dapat diberi nama dengan huruf, seperti $a, b, c, \ldots$,atau dengan bilangan asli $1, 2, 3, \ldots$, atau gabungan keduanya. Sedangkan sisi yang menghubungkan titik u dengan v dinyatakan dengan pasangan (u, v) atau dinyatakan dengan lambang $e_1, e_2, \ldots$. Dengan kata lain, jika e adalah sisi yang menghubungkan titik u dengan titik v, maka e dapat ditulis sebagai $e = (u, v)$.

2.2 Jenis-Jenis Graf

Berdasarkan sifatnya graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori (jenis) bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda, berdasarkan banyak titik, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi.

Berdasarkan ada tidaknya sisi ganda pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi 2 jenis:

1. Graf sederhana (*simple graph*)

   Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung sisi ganda maupun *loop*.

2. Graf tak-sederhana (*unsimple graph*)

   Graf tak-sederhana adalah graf yang mengandung sisi ganda atau *loop*. Ada dua macam graf tak-sederhana, yaitu graf ganda *(multigraph)* dan graf semu *(pseudograph)*. Graf ganda adalah graf yang mengandung sisi ganda. Graf semu adalah graf yang mengandung sisi ganda dan *loop*.

Sisi graf dapat mempunyai orientasi arah. Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dibedakan atas 2 jenis, yaitu :

1. Graf tak berarah (*undirected graph*)

   Graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah disebut graf tak berarah. Pada graf tak berarah, urutan pasangan titik yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Pada graf tak berarah, urutan pasangan titik yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi (v_j, v_k) = (v_k, v_j) adalah sisi yang sama.

2. Graf berarah (*directed graph atau digraph*)

   Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah disebut sebagai graf berarah. Kita lazim menyebut sisi berarah dengan sebutan busur (arc). Pada graf berarah, (v_j, v_k) dan (v_k, v_j) menyatakan dua buah busur yang berbeda, dengan kata lain,

($v_j \neq v_k$). Untuk busur (v_j, v_k) , v_j titik dinamakan titik asal (*initial vertex*) dan titik v_k dinamakan titik terminal (*terminal vertex*).

Terdapat beberapa jenis graf yang sering digunakan. Berikut akan dijelaskan definisi dari beberapa jenis graf.

1. Graf kosong (*null graph*)

   Suatu graf dikatakan kosong bila graf tersebut hanya memiliki himpunan titik tanpa adanya sisi.

2. Graf terhubung (*connected graph*) dan graf tak terhubung (*disconnected graph*).

   Suatu graf disebut sebagai graf terhubung apabila untuk setiap pasang titik u dan v didalam himpunan V terdapat lintasan dari u ke v yang juga harus berarti ada lintasan dari v ke u. Jika tidak, maka graf G disebut graf tidak terhubung (*disconnected graph*).

3. Graf lingkaran (*cycle graph*)

   Graf terhubung reguler yang berderajat 2 disebut sebagai graf lingkaran.

4. Graf lintasan (*path graph*)

   Graf yang dihasilkan dari graf lingkaran dengan menghapus sebuah sisi pada graf lingkaran disebut graf lintasan.

5. Graf roda (*wheel graph*)

   Graf roda adalah graf yang dihasilkan dengan menambah sebuah titik pada graf lingkaran dan titik tersebut terhubung kesemua titik dari titik pada graf lingkaran dengan sisi baru.

6. Graf regular

   Sebuah graf dikatakan graf regular bila derajat setiap titiknya sama.

7. Graf dua partisi

   Graf bipartite merupakan sebuah graf G yang himpunan titiknya dapat dikelompokkan menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2, sedemikian hingga setiap sisi didalam G menghubungkan sebuah titik di V_1 kesebuah titik di V_2.

8. Graf pohon

Graf pohon adalah graf terhubung yang tidak mengandung sirkuit. Graf G adalah graf pohon jika dan hanya jika terdapat hanya satu dan hanya satu jalur diantaranya setiap pasang titik dari graf G.

9. Graf Hutan

Graf tidak terhubung yang tidak mengandung sirkuit. Setiap komponen di dalam graf terhubung tersebut adalah pohon.

10. Graf bintang

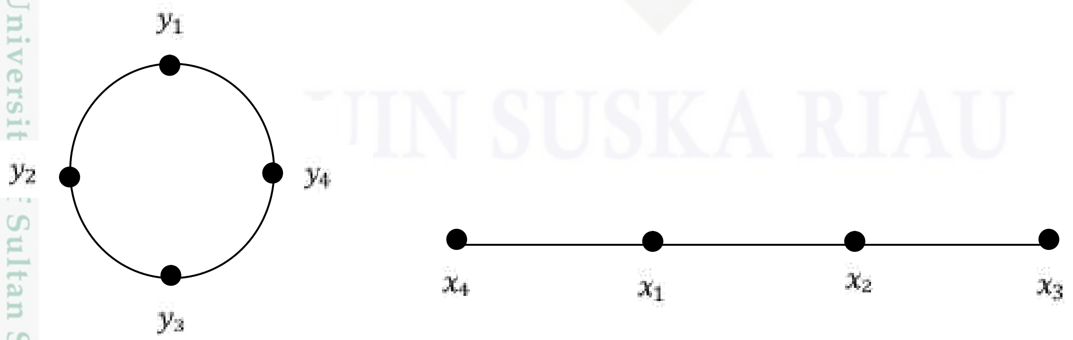
Graf bintang adalah sebuah graf yang terdiri dari sisi dan titik, dimana satu titik sebagai titik pusat, yaitu titik yang berderajat.

2.3 Hasil Kali *Comb* dan Hasil Kali Korona

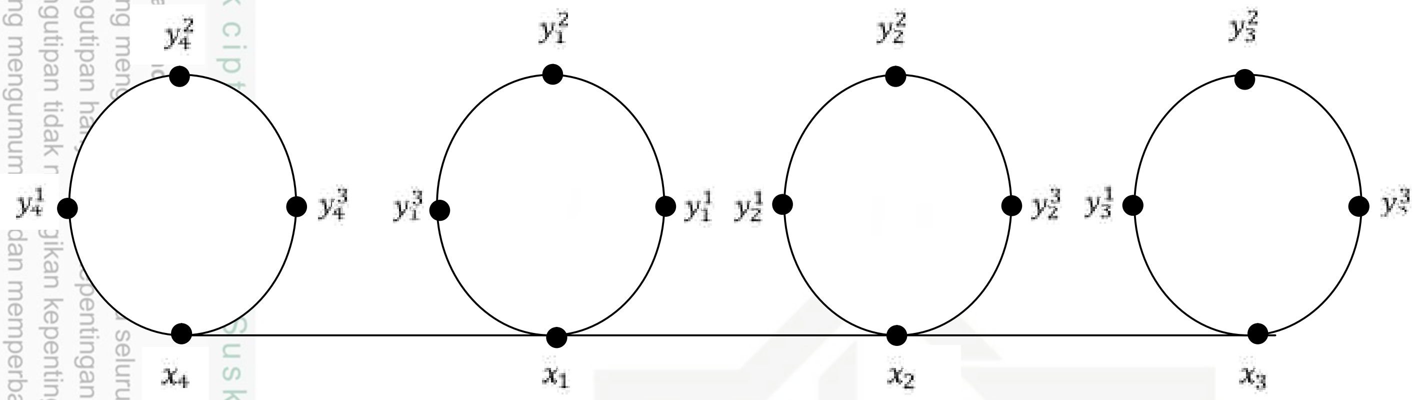
a. Hasil Kali *Comb*

Definisi 2.2 (Saputro, dkk, 2013) Diberikan graf G dan H adalah dua graf terhubung. Misalkan titik x (titik cangkok) adalah titik di graf H. Hasil kali *comb* dari G dan H, dinotasikan dengan $G \rhd H$, adalah sebuah graf yang diperoleh dengan melakukan satu penggandaan pada G dan menggandakan H sebanyak $|V\ G\ |$ dan mencangkokkan penggandaan graf H ke- i di titik x ke titik ke-i dari graf G.

Berikut ini contoh penamaan graf $P_4 \rhd C_4$.



(a) (b)



(c)

Gambar 2.1 (a) Graf C_4; (b) Graf P_4; (c) Graf $P_4 \rhd C_4$

b. Hasil Kali Korona *(Corona Product)*

Hasil kali korona $G_1 \Theta G_2$ dari dua graf G_1 dan G_2 didefinisikan oleh Frucht Harary (Harary, 1996), sebagai graf G yang diperoleh dengan membuat satu penggandaan dari graf G_1 yang mempunyai P_1 titik dan menggandakan graf G_2 sebanyak P_2 kemudian menghubungkan titik ke-i graf G_1 ke setiap titik hasil penggandaan graf G_2 ke-i.

2.4 Pelabelan Graf

a. Definisi Pelabelan Graf

Pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf (titik/sisi) dengan bilangan bulat positif. Wallis, dkk (2000) menyatakan bahwa pelabelan pada suatu graf adalah pemetaan yang memetakan unsur-unsur pada suatu graf (titik atau sisi) ke bilangan-bilangan (biasanya ke bilangan bulat positif atau bilangan bulat non negatif). Jika domain dari pemetaan adalah titik, maka pelabelannya disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi maka pelabelannya disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domainnya adalah titik dan sisi maka pelabelannya disebut pelabelan total (*total labeling*).

Bobot (*weight*) dari elemen graf adalah jumlah dari semua label yang berhubungan dengan elemen graf tersebut (Wallis, 2001). Bobot dari titik v dengan pelabelan λ adalah $wt(v) = \lambda(v) + \sum_{uv \in E} \lambda(uv)$. Sedangkan bobot dari sisi uv adalah $wt(uv) = \lambda(u) + \lambda(uv) + \lambda(v)$.

2.5 Pelabelan Total Tak Teratur Titik

Misalkan $G = (V, E)$, pelabelan-k total didefinisikan sebagai pemetaan, $\lambda: V \cup E \to \{1, 2, \ldots, k\}$. Baca, Jendrol, Miller dan Ryan mendefinisikan bahwa, pelabelan-k total dikatakan sebagai pelabelan-k total tak teratur titik dari graf G jika untuk setiap titik x dan y yang berbeda maka $wt(x) \neq wt(y)$.

$wt(x)$ merupakan bobot titik *x* yang dinyatakan sebagai:

$$wt(x) = \lambda(x) + \sum_{ux \in E} \lambda(ux)$$

Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor komunikasi, transportasi, penyimpanan data komputer dan pemancar frekuensi radio. Pada sistem pengaturan frekuensi radio, permintaan yang besar atas pelayanan *wireless* dan terbatasnya frekuensi yang tersedia memerlukan penggunaan yang efisien.

Masalah yang muncul adalah bagaimana agar gelombang sinyal yang digunakan dapat efisien dan tidak terjadi interferensi. Topik pengoptimalan label pada graf sedemikian hingga membuat setiap bobot titiknya berbeda dipelajari melalui nilai total ketakteraturan titik (tvs), pada sistem pengaturan frekuensi radio, tvs dapat berupa jarak terkecil yang memungkinkan dua pemancar untuk melakukan transmisi data tanpa mengalami interferensi.

Nilai total ketakteraturan titik graf G (*total vertex irregularity strength*) dinotasikan dengan $tvs(G)$ adalah nilai k minimum atau label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur titik. Baca dkk menunjukkan batas bawah dan batas atas nilai dari nilai total ketakteraturan titik untuk sebarang graf.

Teorema 2.1 (Lolita, 2014) Untuk setiap graf lintasan $P_m \odot P_2$, m ≥ 2 dan m bilangan genap,

$$tvs\ P_m \odot P_2 = \frac{2m+2}{3}$$

Bukti :

Derajat titik terkecil dari graf $P_m \odot P_2$ adalah 2. Perhatikan bahwa jumlah titik yang berderajat dua pada $P_m \odot P_2$ adalah $2m$. Supaya mendapatkan pelabelan optimal, titik-titik yang berderajat terkecil dilabeli sedemikian sehingga bobot untuk titik-titik berderajat 2 tersebut dimulai dari $3, 4, 5, \ldots, 2m+2$. Sementara bobot titik graf $P_m \odot P_2$ yang berderajat 2 adalah jumlah dari 3 buah bilangan bulat positif yang disebut label, yaitu 1 label titik itu sendiri dan 2 label sisi yang bersisian dengan titik tersebut. Oleh karena itu, kita dapatkan label terbesar minimum yang digunakan yaitu $\frac{2m+2}{3}$ dan tidak mungkin lebih kecil dari $\frac{2m+2}{3}$. Jadi, kita dapatkan bahwa $tvs\ P_m \odot P_2 \geq \frac{2m+2}{3}$.

Untuk $m \geq 3$ dan m bilangan ganjil, maka ikuti aturan pemberian nama titik-titik pada graf $P_m \odot P_2$ berikut:

a. Pemberian nama titik-titik pada graf P_m

Beri nama titik-titik ke, $\frac{m}{2}, \frac{m+2}{2}, \frac{m-2}{2}, \ldots, 2, \frac{m+4}{2}, \frac{m+6}{2}, \ldots, m, 1$ pada graf P_m secara berurutan dengan label $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_m$.

b. Pemberian nama titik-titik pada graf P_2

Titik-titik pada graf P_2 yang terkait dengan titik x_i dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, m-1$ diberi nama dengan y_i^k dengan $k = 1$ untuk titik ke 2 dari P_2 dan $k = 2$ untuk titik ke 1 dari P_2. Sedangkan titik-titik pada graf P_2 yang terkait dengan titik x_i dengan $i = \frac{m+2}{2}, \frac{m+4}{2}, \ldots, m$ diberi nama dengan y_i^k dengan $k = 1$ untuk titik ke 1 dari P_2 dan $k = 2$ untuk titik ke 2 dari P_2.

Sehingga himpunan titik dari graf $P_m \odot P_2$ adalah:

$V(P_m \odot P_2) = \{x_i, y_i^k | 1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq k \leq 2\}$, dan himpunan sisi dari graf $P_m \odot P_2$ adalah:

$E(P_m \odot P_2) = \{x_i y_i^k \mid 1 \leq i \leq m$ dan $k = 1\} \cup \{y_i^k y_i^{k+1} \mid 1 \leq i \leq m$ dan $k = 1\} \cup \{x_i x_j \mid 1 \leq i \leq m - 1 \; dan \; 2 \leq j \leq m\}$.

Didefinisikan $r_i = \frac{2i+2}{3}$ untuk $2 \leq i \leq m$.

Pelabelan r_m total tak teratur titik dengan pelabelan λ sebagai berikut:

Untuk m ≥ 6

Rumus pelabelan titik dan pelabelan sisi didapat dengan melihat pola yang telah diperoleh pada graf $P_m \odot P_2$, dengan $m = 2, 4, \ldots, 10$. Sebelum merumuskan pelabelan titik dan pelabelan sisi tersebut, terlebih dahulu didefinisikan $r_i = \frac{2i+2}{3}$ untuk $1 \leq i \leq m$.

Untuk $m \geq 6$

a. Pelabelan titiknya adalah:

$$\lambda\, x_i = \begin{cases} 2m - 2r_m + 1 & ;\text{jika } i = 1 \\ 2m + i - 2r_i - 2r_m + 2 & ;\text{jika } 2 \leq i \leq \frac{m-2}{2} \\ \frac{5m+4}{2} - 2r_i - r_m & ;\text{jika } i = m \\ 2m + i - 2r_i - 2r_m + 5 & ;\text{jika } i = \frac{m}{2} \\ 2m + i - 2r_m + 4 - 2r_i & ;\text{jika } \frac{m+2}{2} \leq i \leq m - 2 \\ \frac{3m+2i+8}{2} - 2r_i - r_m & ;\text{jika } i = m - 1, \end{cases}$$

$$\lambda\, y_i^k = \begin{cases} 1 & ;\text{jika } i = 1 \text{ dan } 1 \leq k \leq 2 \\ r_i + k - 2 & ;\text{jika } 2 \leq i \leq m \text{ dan } 1 \leq k \leq 2. \end{cases}$$

b. Pelabelan sisinya adalah:

$$\lambda\, x_i y_i^k = \begin{cases} k & ;\text{jika } i = 1 \text{ dan } 1 \leq k \leq 2 \\ r_i & ;\text{jika } 2 \leq i \leq m \text{ dan } 1 \leq k \leq 2, \end{cases}$$

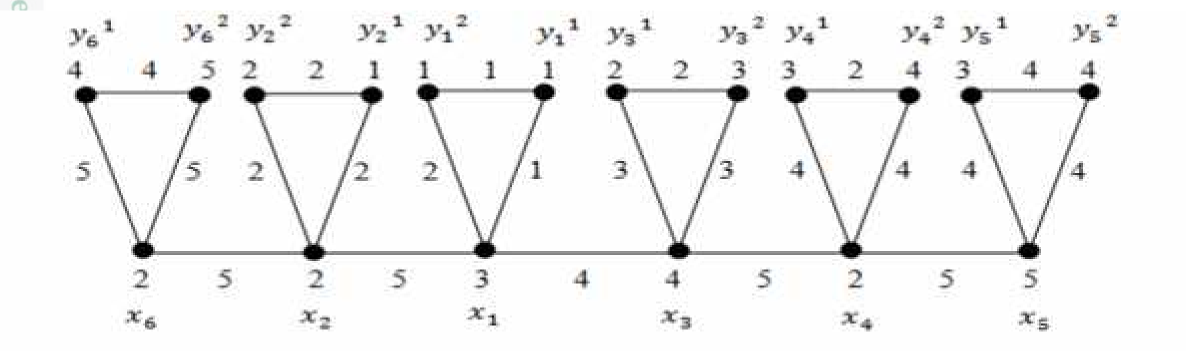
$$\lambda(y_i^k y_i^{k+1}) = \begin{cases} \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil & ; \text{jika } 1 \le i \le 4 \text{ dan } k = 1 \\ \left\lceil \frac{2i-1}{3} \right\rceil & ; \text{jika } 5 \le i \le m \text{ dan } i \,(mod\, 3) = 0 \text{ dan } k = 1 \\ \left\lceil \frac{2i-2}{3} \right\rceil & ; \text{jika } 5 \le i \le m \text{ dan } i \,(mod\, 3) = 1 \text{ dan } k = 1 \\ \left\lceil \frac{2i}{3} \right\rceil & ; \text{jika } 5 \le i \le m \text{ dan } i \,(mod\, 3) = 2 \text{ dan } k = 1, \end{cases}$$

$$\lambda(x_i x_j) = \begin{cases} r_m - 1 & ; \text{jika } i = 1 \text{ dan } j = \frac{m}{2} \\ r_m & ; \text{jika } 1 \le i \le \frac{m-2}{2} \text{ dan } j = i+1 \\ r_m & ; \text{jika } \frac{m}{2} \le i \le m-2 \text{ dan } j = i+1 \\ r_m & ; \text{jika } i = \frac{m-2}{2} \text{ dan } j = m. \end{cases}$$

Bobot titik dari graf $P_m \odot P_2$ pada $wt(y_i^k)$ adalah urutan bilangan bulat positif dimulai dari 3 sampai ke $2m+2$. Sedangkan pada $wt(x_i)$ yaitu urutan bilangan bulat positif yang dimulai dari $2m+3$ sampai ke $3m+2$. Hal ini menunjukkan bahwa setiap titik dalam pelabelan total tak teratur titik dari graf $P_m \odot P_2$ memiliki bobot yang berbeda. Dapat disimpulkan bahwa $tvs(P_m \odot P_2) \le \left\lceil \frac{2m+2}{3} \right\rceil$.

Contoh :

Jika $m = 6$ maka didapatkan $tvs(P_6 \odot P_2) \ge \left\lceil \frac{2(6)+2}{3} \right\rceil = 5$. Pelabelan graf $P_6 \odot P_2$ pada Gambar 4.3 berikut merupakan pelabelan yang optimal dengan menggunakan rumus pelabelan sisi dan pelabelan titik yang telah didapat diatas.



Gambar 2.2 Pelabelan Total Tak Teratur Titik pada Graf $P_m \odot P_2$

Dari Gambar 2.2 dapat dilihat bahwa label terbesar yang digunakan adalah 5 dan pelabelan tersebut mengakibatkan bobot setiap titiknya berbeda, yaitu: $wt\ {y_1}^1 \neq wt\ {y_1}^2 \neq wt\ {y_2}^1 \neq wt\ {y_2}^2 \neq wt\ {y_3}^1 \neq wt\ {y_3}^2 \neq wt\ {y_4}^1 \neq wt\ {y_4}^2 \neq wt\ {y_5}^1 \neq wt\ {y_5}^2 \neq wt\ {y_6}^1 \neq wt\ {y_6}^2 \neq wt\ x_1 \neq wt\ x_2 \neq wt\ x_3 \neq wt\ x_4 \neq wt\ x_5 \neq wt\ x_6$.

Karena telah didapatkan bahwa $tvs\ P_m \odot P_2 \leq \frac{2m+2}{3}$ dan $tvs\ P_m \odot P_2 \geq \frac{2m+2}{3}$, maka dapat disimpulkan baha $tvs\ P_m \odot P_2 = \frac{2m+2}{3}$.