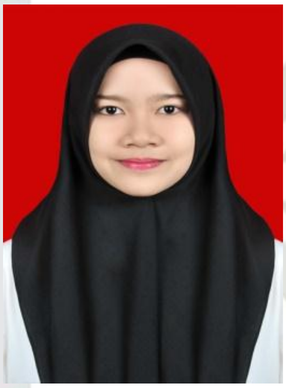
TRACE MATRIKS TOEPLITZ PENTADIAGONAL SIMETRIS KUADRAT

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Program Studi Matematika

Oleh :



ANDREPA YUNIKA PUTRI
11654203687

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2020

LEMBAR PERSETUJUAN

TRACE MATRIKS TOEPLITZ PENTADIAGONAL SIMETRIS KUADRAT

TUGAS AKHIR

Oleh:

ANDREPA YUNIKA PUTRI
11654203687

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 3 Agustus 2020

Ketua Program Studi	Pembimbing
Ari Pani Desvina, M.Sc.	**Rahmawati, M.Sc.**
NIP. 19811225 200604 2 003	**NIK. 130 517 046**

LEMBAR PENGESAHAN

TRACE MATRIKS TOEPLITZ PENTADIAGONAL SIMETRIS KUADRAT

TUGAS AKHIR

Oleh:

ANDREPA YUNIKA PUTRI
11654203687

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau di Pekanbaru, pada tanggal 3 Agustus 2020

Pekanbaru, 3 Agustus 2020
Mengesahkan

Dekan	Ketua Program Studi
Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag.	**Ari Pani Desvina, M.Sc.**
NIP. 19660604 199203 1 004	**NIP. 19811225 200604 2 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua	**: Dr. Yuslenita Muda, M.Sc.**
Sekretaris	**: Rahmawati, M.Sc.**
Anggota I	**: Corry Corazon Marzuki, M.Si.**
Anggota II	**: Zukrianto, M.Si.**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta ada pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan atas izin penulis dan harus dilakukan mengikut kaedah dan kebiasaan ilmiah serta menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin tertulis dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam pada form peminjaman.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan di dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 3 Agustus 2020
Yang membuat pernyataan,

ANDREPA YUNIKA PUTRI
11654203687

LEMBAR PERSEMBAHAN

"Barangsiapa yang mempelajari ilmu pengetahuan yang seharusnya ditujukan untuk mencari ridho Allah SWT, bahkan hanya untuk mendapatkan kedudukan atau kekayaan duniawi maka ia tidak akan mendapatkan baunya surga nanti pada hari kiamat" (H.R Abu Hurairah)

Alhamdulillahirobbil 'alamin

Segala puji dan syukur kehadirat Allah Subhanahu Wa Ta'ala atas segala nikmat, rahmat dan kasih sayang-Mu telah memberikan kesempatan, kekuatan, dan membekaliku dengan ilmu pengetahuan sehingga terselesaikan Tugas Akhir ini. Shalawat beserta salam selalu tercurahkan kepada Baginda Nabi Muhammad Shalallahu 'alaihi Wasallam, semoga sampai pada kita semua mendapatkan pertolongan di hari kiamat nanti. Aamiin ya robbal alamin.

Untuk Mamaku tercinta, (Albetri) kupersembahkan karya kecil ini untuk menghibur hati mama yang telah banyak berkorban untukku sedari kecil. Karena aku sadar bahwa selama ini mama berjuang tanpa lelah untuk membiayai hidupku setelah Papa meninggal dunia. Aku tahu, mama selalu berusaha untuk membuatku bahagia layaknya anak yang memiliki orang tua pada umumnya. Terimakasih mama, atas segala do'a dan semangat yang tak henti-hentinya mendukungku dan memberikan semangat kepadaku,

Untuk Abangku tersayang, (Aldi Andreas Satria Pratama, S.E) yang telah menjadi panutan dan pengganti sosok seorang Papa. Rasa kebanggaan dan kagumku terus mengalir karena abang selalu menjaga, melindungi, mengajariku banyak hal, dan berusaha keras untuk membiayai kuliahku hingga aku mendapatkan gelar Sarjana. Terimakasih Abangku, pengorbananmu tak akan pernah mampu aku gantikan dengan hal apapun.

Untuk Ibu Rahmawati, M.Sc. selaku pembimbing Tugas Akhirku, yang selalu ada waktu untuk bimbingan ditengah kesibukan ibu. Terimakasih bu, pengalaman berharga dalam penyusunan Tugas Akhir ini tidak akan kulupakan dan merupakan langkah awal untuk meraih kesuksesanku di masa depan. Kepada seluruh Dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN SUSKA Riau, terimaksih untuk ilmu yang telah diajarkan kepadaku selama dibangku kuliah.

Untuk teman-temanku Jurusan Matematika angkatan 16, terimakasih atas kenangan, canda tawa, serta dukungan dari kalian semua tidak akan pernah kulupakan.

TRACE MATRIKS TOEPLITZ PENTADIAGONAL SIMETRIS KUADRAT

<u>ANDREPA YUNIKA PUTRI</u>

11654203687

Tanggal Sidang : 3 Agustus 2020
Tanggal Wisuda: 2020

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas KM 15 No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Trace dari suatu matriks berpangkat sering dibahas pada beberapa bidang matematika, seperti analisis jaringan, teori bilangan, sistem dinamik, teori matriks, dan persamaan diferensial. Penelitian ini membahas *trace* matriks Toeplitz pentadiagonal simetris kuadrat. Proses yang dilakukan dalam penelitian ini yaitu menentukan bentuk umum matriks Toeplitz pentadiagonal simetris kuadrat yang dinotasikan sebagai $P_m{}^2$ dengan cara mengalikan $P_m \cdot P_m$. Kemudian untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks Toeplitz pentadiagonal simetris kuadrat yang dinotasikan sebagai $tr(P_m)^2$ dengan cara menjumlahkan entri-entri pada diagonal utama matriks Toeplitz pentadiagonal simetris kuadrat dan diaplikasikan dalam beberapa contoh soal.

Kata kunci: Matriks Toeplitz pentadiagonal simetris, pembuktian langsung, *trace*

TRACE OF SYMMETRIC PENTADIAGONAL TOEPLITZ MATRIX QUADRATE

ANDREPA YUNIKA PUTRI

11654203687

Date of Final Exam : 3^{rd} August, 2020
Date of Graduation : 2020

Mathematics Departement
Faculty of Sience and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas KM 15 No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

Trace of powers of matrices arise in several fields of mathematics, more specially network analysis, number theory, dynamic system, matrix theory, dan differential equations. The research will discuss the trace of symmetric pentadiagonal Toeplitz matrix quadrate. There are two steps in determining the general form of the trace of symmetric pentadiagonal Toeplitz matrix quadrate which is denoted as $P_m^{\ 2}$ by multiplying $P_m \cdot P_m$. Futhermore, to get the general form of the trace of symmetric pentadiagonal Toeplitz matrix quadrate is obtained which is denoted as $tr(P_m)^2$ by add up the entries on the main diagonal on the symmetric pentadiagonal Toeplitz matrix quadrate and applied in several sample questions.

Key Word: *symmetric pentadiagonal Toeplitz matrix, direct proof, trace*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum warohmatullahi wabarokatuh.

Alhamdulillahirabbil'alamiin, segala puji dan syukur kehadirat Allah Subhanahu wa Ta'aala, dengan izin dan karunia-Nya penulis mampu untuk menyelesaikan tugas akhir ini dengan judul **"*Trace* Matriks Toeplitz Pentadiagonal Simetris Kuadrat"**. Shalawat dan salam kita sampaikan buat junjungan alam Nabi Muhammad Shalallahu Alaihi Wassalam karena berkat perjuangan beliaulah kita umat manusia yang dibawa dari alam kegelapan ditujukan ke alam yang penuh dengan ilmu pengetahuan.

Tugas akhir ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat dalam memperoleh gelar sarjana di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Dalam penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini, penulis banyak sekali mendapat dukungan dan bimbingan dari berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada Ibunda tercinta (Albetri), abangku (Aldi Andreas Satria Pratama, S.E) dan kakak iparku (Rizka Nalia Rismal, A.Md) yang telah memberikan dukungan, do'a serta kasih sayang yang tulus kepada penulis.

Kemudian penulis juga mengucapkan terima kasih banyak kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Akhmad Mujahidin, M.Ag., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc., selaku Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
5. Bapak Wartono, M.Sc., selaku Pembimbing Akademik penulis yang telah memberi dukungan dan semangat kepada penulis.

6. Ibu Rahmawati, M.Sc., selaku Pembimbing Tugas Akhir yang telah memberikan bimbingan serta arahan sehingga Tugas Akhir penulis dapat diselesaikan.
7. Ibu Corry Corazon Marzuki., M.Si., selaku Penguji 1 yang telah memberikan kritikan dan saran dalam penulisan tugas akhir ini
8. Bapak Zukrianto, M.Si., selaku Penguji 2 yang telah memberikan kritikan dan saran dalam penulisan tugas akhir ini.
9. Bapak dan Ibu Dosen di lingkungan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, khususnya di Jurusan Matematika.
10. Teman-teman seperjuangan Jurusan Matematika angkatan 2016 khususnya kelas A.
11. Semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian tugas akhir ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari dalam penyusunan dan penulisan tugas akhir ini masih terdapat banyak kekurangan. Oleh sebab itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari pembaca. Semoga tugas akhir ini dapat digunakan dan bermanfaat bagi penulis atau pun pihak-pihak yang membutuhkan.

Pekanbaru, 3 Agustus 2020

Andrepa Yunika Putri

DAFTAR ISI

Halaman

LEMBAR PERSETUJUAN .... **ii**

LEMBAR PENGESAHAN .... **iii**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL .... **iv**

LEMBAR PERNYATAAN .... **v**

LEMBAR PERSEMBAHAN .... **vi**

ABSTRAK .... **vii**

ABSTRACT .... **viii**

KATA PENGANTAR .... **ix**

DAFTAR ISI .... **xi**

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang I-1

1.2 Rumusan Masalah I-4

1.3 Batasan Masalah I-4

1.4 Tujuan Penelitian I-4

1.5 Manfaat Penelitian I-4

1.6 Sistematika Penulisan I-5

BAB II LANDASAN TEORI

2.1 Matriks dan Jenis-jenis Matriks II-1

2.2 Operasi Matriks II-5

2.3 *Trace* Matriks II-6

2.4 *Trace* Matriks Toeplitz-Hessenberg Kuadrat.. II-7

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

BAB IV PEMBAHASAN

4.1 Bentuk Umum Matriks Toeplitz Pentadiagonal Simetris Kuadrat IV-1

4.2 Bentuk Umum *Trace* Matriks Toeplitz Pentadiagonal Simetris Kuadrat IV-27

4.3 Aplikasi Bentuk Umum dan *Trace* Matriks Toeplitz Pentadiagonal Simetris Kuadrat Dalam Bentuk Contoh IV-28

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan V-1

5.2 Saran V-4

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Trace dari suatu matriks berpangkat sering dibahas pada beberapa bidang matematika, seperti analisis jaringan, teori bilangan, sistem dinamik, teori matriks, dan persamaan diferensial. Menurut Anton (2005), *trace* matriks pada dasarnya adalah jumlah dari entri-entri pada diagonal utama dari sebuah matriks. *Trace* matriks tidak terdefinisi jika sebuah matriks bukan matriks bujur sangkar. Beberapa jenis matriks bujur sangkar yang dapat ditentukan bentuk umum *trace* matriks antara lain yaitu matriks simetris, matriks Toeplitz, matriks Toeplitz pentadiagonal simetris dan sebagainya. Menurut Elouafi (2018), matriks Toeplitz pentadiagonal simetris dengan bentuk umum $m \times m$ diberikan sebagai berikut:

$$P_m = P_m(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & a & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & b & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & b & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & b & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & b & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c & b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & c & b & a \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

Perhitungan *trace* matriks digunakan pada matriks berpangkat lebih besar dari satu, perlu dilakukan perpangkatan matriks yang melibatkan proses perkalian matriks.

Pembahasan mengenai *trace* matriks telah banyak diteliti oleh beberapa peneliti sebelumnya. Pada tahun 2015, Pahade dan Jha melakukan penelitian yang berjudul "*Trace of Positive Integer Power of Real Matrices*" yang membahas mengenai bentuk umum *trace* matriks ordo 2×2 berpangkat bilangan bulat positif. Hasil dari persamaan bentuk umum *trace* dari matriks tersebut sebagai berikut:

untuk n genap yaitu:

$$TrA^n = \sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det A)^r (trA)^{n-2r}$$

untuk n ganjil yaitu:

$$TrA^n = \sum_{r=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det A)^r (trA)^{n-2r}.$$

Pada tahun 2017, Pahade dan Jha melakukan penelitian kembali tentang *trace* matriks ketetanggaan yang berpangkat bilangan bulat positif. Hasil dari penelitian tersebut diperoleh bentuk umum *trace* matriks ketetanggaan sebagai berikut:

untuk k bilangan genap yaitu:

$$Tr\,A^k = \sum_{r=1}^{n/2} s(k,r)n(n-1)^r (n-2)^{k-2r}$$

untuk k bilangan ganjil yaitu:

$$Tr\,A^k = \sum_{r=1}^{n-1/2} s(k,r)n(n-1)^r (n-2)^{k-2r}$$

dengan $S(k,r)$ yang didefinisikan sebagai berikut :

$$S(k,r)=1, S(k,k/2)=1, S(k,k-1/2)=\frac{k-1}{2}$$
$$S(k,r)=S(k-1,r)+S(k-2,r-1)=1.$$

Pada tahun 2019, Aryani dan Husna meneliti *trace* matriks Toeplitz Tridiagonal 3×3 berpangkat bilangan bulat positif dengan bentuk matriks:

$$A=\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{bmatrix}, \text{ dengan } b,c \neq 0; \forall a,b,c \in R.$$

Hasil yang diperoleh dari penelitian tersebut adalah:

$$tr(A_3)^n = \begin{cases} 3a^n + 4\displaystyle\sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1}a^{n-2r}b^r c^r & ,\text{untuk } n \text{ ganjil}. \\ 3a^n + 4\displaystyle\sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1}a^{n-2r}b^r c^r & ,\text{untuk } n \text{ genap}. \end{cases}$$

Di tahun yang sama, Rahmawati dkk (2019) meneliti *trace* yang berjudul "*Trace Matriks Toeplitz Simetris Bentuk Khusus Ordo* 3×3 *Berpangkat Bilangan Bulat Positif*" yang membahas mengenai bentuk umum *trace* matriks Toeplitz simetris ordo 3×3 dengan bentuk matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}, \text{ dengan } a \in R$$

dengan *trace* matriks sebagai berikut:

$$tr({A_3}^n) = \begin{cases} 0 & ,\text{untuk } n \text{ ganjil}. \\ 2^{\frac{n}{2}+1}a^n & ,\text{untuk } n \text{ genap}. \end{cases}$$

Pada tahun 2020, Mastiana Siregar membahas "*Trace Matriks Toeplitz-Hessenberg Kuadrat*" dengan bentuk umum matriks Toeplitz-Hessenberg ordo $n\times n$, $n \geq 2$ yaitu:

$$H_n = \begin{bmatrix} h_1 & h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & h_{n-6} & \cdots & h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \cdots & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \cdots & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \\ h_n & h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \cdots & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \end{bmatrix}$$

dan diperoleh

$$tr(H_n)^2 = nh_1^2 + 2(n-1)h_0h_2.$$

Berdasarkan uraian hasil penelitian-penelitian diatas, penulis tertarik untuk menyelesaikan rumus bentuk umum dari *trace* matriks Toeplitz pentadiagonal simetris Persamaan (1.1), sehingga pada tugas akhir ini penulis memberi judul "***Trace*** **Matriks Toeplitz Pentadiagonal Simetris Kuadrat** ".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dijelaskan di atas, maka dapat diambil suatu rumusan masalah yaitu: "Bagaimana bentuk umum *trace* matriks Toeplitz pentadiagonal simetris kuadrat?"

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang diberikan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Matriks yang digunakan adalah matriks Toeplitz pentadiagonal simetris pada Persamaan (1.1).
2. Perpangkatan matriks hanya untuk $(P_m)^2$ dengan $m \geq 4$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari tugas akhir ini adalah untuk mendapatkan bentuk umum dari *trace* matriks Toeplitz pentadiagonal simetris kuadrat.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan tugas akhir ini adalah:

1. Menambah ilmu pengetahuan dalam bidang matematika, khususnya tentang *trace* matriks.
2. Apabila diperoleh bentuk umum dari *trace* matriks Toeplitz pentadiagonal simetris tersebut maka ketika dihadapkan pada permasalahan untuk menentukan *trace* matriks dengan ordo lebih tinggi maka akan mempermudah dalam pengerjaan penentuan *trace* matriks tersebut.
3. Sebagai sarana informasi bagi pembaca dan sebagai bahan referensi bagi pihak yang membutuhkan.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dibagi menjadi V(lima) bab. Berikut penjelasan tentang masing–masing bab:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini menjelaskan beberapa teori dan definisi yang berkaitan tentang matriks dan jenis–jenis matriks, perkalian dan perpangkatan matriks, *trace* matriks.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini menjelaskan langkah–langkah atau prosedur dalam menentukan bentuk umum *trace* matriks Toeplitz pentadiagonal simetris kuadrat.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan tentang bagaimana mendapatkan rumus umum *trace* matriks Toeplitz pentadiagonal simetris kuadrat.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisikan tentang kesimpulan dari seluruh pembahasan dan saran-saran untuk pembaca.

BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab II akan dijelaskan beberapa teori dan definisi yang berkaitan tentang matriks dan jenis-jenis matriks, perkalian dan perpangkatan matriks, *trace* matriks.

2.1. Matriks dan Jenis-Jenis Matriks

Definisi 2.1 (Anton, 2013) Sebuah matriks adalah jajaran bilangan-bilangan berbentuk persegi atau persegi panjang. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri matriks.

Berikut bentuk umum dari matriks ordo $m \times n$ sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan matriks diatas, dapat ditulis dengan cara lebih ringkas yaitu,

$$[a_{ij}]_{m\times n} \text{ atau } [a_{ij}].$$

Pada baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ dari matriks A juga biasanya dilambangkan dengan simbol A_{ij}. Untuk matriks diatas dikatakan sebagai $A_{ij} = [a_{ij}]$. Matriks A dengan m baris dan n kolom dan entri $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ dikatakan sebagai diagonal utama dari matriks A.

Terdapat beberapa jenis matriks diantaranya adalah matriks simetris, matriks Toeplitz, matriks pentadiagonal, matriks Toeplitz pentadiagonal simetris dan sebagainya. Berikut adalah matriks yang mendukung dalam penulisan tugas akhir ini:

1. Matriks Simetris

Definisi 2.2 (Larson, 2007) Matriks A adalah matriks simetris jika $A = A^T$. Jika $A = [a_{ij}]$ adalah matriks simetris, maka $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua $i \neq j$. Berikut matriks untuk ordo $m \times n$ sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

transpos dari matriks A dilambangkan dengan A^T untuk ordo $n \times m$ diberikan sebagai berikut:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Contoh 2. 1 Diberikan suatu matriks A berukuran 3×3 yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ maka } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Matriks Toeplitz

Matriks Toeplitz merupakan matriks bujur sangkar yang setiap diagonalnya dari kiri ke kanan bawah adalah konstan atau tetap.

Definisi 2.3 (Gray, 2006) Sebuah matriks Toeplitz adalah matriks berukuran $n \times n$ dinotasikan dengan $T_n = [t_{kj}; k, j = 0,1,\cdots,n-1]$ dengan $t_{kj} = t_{k-j}$ sebuah matriks dengan formula:

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \ddots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \ddots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \ddots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{(n-1)} & t_{(n-2)} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix}.$$

Contoh 2.2 Diberikan matriks Toeplitz berordo 4×4 sebagai berikut:

$$T_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 3 & 2 \\ 8 & 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Matriks Pentadiagonal

Definisi 2.4 (Nassif, 2013) Matriks pentadiagonal adalah sebuah matriks bujur sangkar yang terdiri dari lima diagonal tak nol yaitu diagonal utama d, dua subdiagonal atas u dan v, dua subdiagonal bawah l dan m:

$$A=\begin{pmatrix} d(1) & u(1) & v(1) & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ l(1) & d(2) & u(2) & v(2) & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ m(1) & l(2) & d(3) & u(3) & v(3) & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & m(2) & l(3) & d(4) & u(4) & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & m(n-4) & l(n-3) & d(n-2) & u(n-2) & v(n-2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m(n-3) & l(n-2) & d(n-1) & u(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m(n-2) & l(n-1) & d(n) \end{pmatrix}.$$

Contoh 2.3 Diberikan matriks pentadiagonal berordo 4×4 adalah sebagai berikut:

$$A_4=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 7 \\ 8 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 9 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Matriks Toeplitz Pentadiagonal

Matriks Toeplitz pentadiagonal merupakan gabungan dari matriks Toeplitz dan matriks pentadiagonal. Berikut diberikan definisi yang berkaitan dengan matriks Toeplitz pentadiagonal.

Definisi 2.5 (Huang, 2017) Matriks Toeplitz pentadiagonal bentuk umum $n\times n$ sebagai berikut:

$$T=\begin{pmatrix} a & b & d & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & d & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & c & a & b & \cdots & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & c & a & \cdots & b & d & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & e & b & \cdots & a & b & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & \cdots & c & a & b & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e & c & a \end{pmatrix}$$

dengan $\forall a,b,c,d,e \in R$.**Contoh 2.4** Diberikan matriks Toeplitz pentadiagonal berordo 5×5 adalah sebagai berikut:

$$T=\begin{bmatrix}1&2&3&0&0\\4&1&2&3&0\\5&4&1&2&3\\0&5&4&1&2\\0&0&5&4&1\end{bmatrix}.$$

5. Matriks Toeplitz Pentadiagonal Simetris

Matriks Toeplitz pentadiagonal simetris merupakan gabungan matriks Toeplitz, dengan matriks pentadiagonal simetris. Berikut definisi yang berkaitan dengan matriks Toeplitz pentadiagonal simetris.

Definisi 2.6 (Elouafi, 2018) Matriks Toeplitz pentadiagonal simetris bentuk umum $m\times m$ sebagai berikut:

$$P_m=P_m(a,b,c)=\begin{bmatrix}a&b&c&0&0&0&\cdots&0&0&0&0&0&0\\b&a&b&c&0&0&\cdots&0&0&0&0&0&0\\c&b&a&b&c&0&\cdots&0&0&0&0&0&0\\0&c&b&a&b&c&\cdots&0&0&0&0&0&0\\0&0&c&b&a&b&\cdots&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&c&b&a&\cdots&0&0&0&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&0&0&\cdots&a&b&c&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&\cdots&b&a&b&c&0&0\\0&0&0&0&0&0&\cdots&c&b&a&b&c&0\\0&0&0&0&0&0&\cdots&0&c&b&a&b&c\\0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&c&b&a&b\\0&0&0&0&0&0&\cdots&0&0&0&c&b&a\end{bmatrix}.$$

Contoh 2.5 Diberikan matriks Toeplitz pentadiagonal simetris berordo 5×5 adalah sebagai berikut:

$$P_5=P_5(4,5,6)=\begin{bmatrix}4&5&6&0&0\\5&4&5&6&0\\6&5&4&5&6\\0&6&5&4&5\\0&0&6&5&4\end{bmatrix}.$$

2.2. Operasi Matriks

Operasi matriks yang akan dibahas adalah perkalian dua matriks dan perpangkatan matriks.

1. Perkalian Matriks

Pembahasan mengenai perkalian antar matriks akan dijelaskan pada definisi berikut.

Definisi 2.7 (Larson, 2007) Jika $A=[a_{ij}]$ adalah matriks $m\times n$ dan $B=[b_{ij}]$ adalah matriks $n\times p$, maka hasil kali AB adalah matriks $m\times p$.

$$AB=[c_{ij}]$$

dengan

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

$$=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\cdots+a_{in}b_{nj}.$$

Definisi ini menjelaskan bahwa untuk menemukan entri baris ke$-i$ dan kolom ke$-j$ dari perkalian AB, kalikan entri pada baris ke$-i$ dari matriks A dan dengan entri yang bersesuaian pada kolom ke$-j$ dari matriks B, selanjutnya jumlahkan hasilnya.

Contoh 2.6

Jika $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & -2\\ 5 & 0\end{bmatrix}$ dan $B=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -4 & 1\end{bmatrix}$ maka:

$$AB=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & -2\\ 5 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -4 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-9 & 1\\ -4 & 6\\ -15 & 10\end{bmatrix}.$$

2. Perpangkatan Matriks

Pembahasan mengenai perpangkatan matriks akan dijelaskan pada definisi berikut.

Definisi 2.8 (Anton, 2013) Jika A adalah sebuah matriks persegi, maka kita definisikan pangkat-pangkat bilangan bulat tak negatif A menjadi

$$A^0 = I \text{ dan } A^n = AA\cdots A \text{ [} n \text{ faktor]}$$

dan jika A dapat dibalik, maka didefinisikan pangkat bilangan bulat negatif dari A yaitu:

$$A^{-n} = \left(A^{-1}\right)^n = A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1} \text{ [} n \text{ faktor] .}$$

Contoh 2.7 Jika diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ maka A^3 yaitu:

$$A^3 = A \times A \times A$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 & 50 & 28 \\ 28 & 64 & 40 \\ 20 & 44 & 58 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 206 & 462 & 438 \\ 276 & 620 & 564 \\ 282 & 642 & 422 \end{bmatrix}.$$

2.3. *Trace* Matriks

Definisi 2.9 (Anton, 2005) Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka *trace* dari A dinotasikan sebagai $tr(A)$. Didefinisikan sebagai jumlah dari entri pada diagonal utama dari A. *Trace* A tidak terdefinisi jika A bukan matriks bujur sangkar.

Contoh 2.8 Diberikan matriks $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 5 & 4\\ 1 & -2 & 7\end{bmatrix}$ maka $tr(A)$ yaitu:

$$\begin{aligned} tr(A) &= -1+5+7 \\ &= 11. \end{aligned}$$

2.4. *Trace* Matriks Toeplitz-Hessenberg Kuadrat

Salah satu pembahasan mengenai *trace* suatu matriks berpangkat telah dibahas oleh Mastiana Siregar (2020) dalam penelitiannya yang berjudul "*Trace* Matriks Toeplitz-Hessenberg Kuadrat". Penelitian tersebut membahas mengenai bentuk umum *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg kuadrat dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Diberikan H_n suatu matriks Toeplitz-Hessenberg ordo $n\times n$ dengan $n\geq 2$ yaitu:

$$H_n = \begin{bmatrix} h_1 & h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & h_{n-6} & \cdots & h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \cdots & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \cdots & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \\ h_n & h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \cdots & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

2. Menentukan bentuk umum $(H_n)^2$ dengan cara mengalikan $H_n \times H_n$.

   Berdasarkan Definisi 2.8 diperoleh matriks $(H_n)^2$ yaitu:

$$(H_n)^2 = H_n \cdot H_n$$

$$= \begin{bmatrix} h_1 & h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & h_{n-6} & \cdots & h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \cdots & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \cdots & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \\ h_n & h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \cdots & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 & h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & h_{n-6} & \cdots & h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \cdots & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \cdots & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \\ h_n & h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \cdots & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \end{bmatrix}$$

$$(H_n)^2 = \begin{bmatrix} \sum_{r=1}^{2} h_r\, h_{2-r} & \sum_{r=0}^{1} h_r\, h_{1-r} & \sum_{r=0}^{0} h_r\, h_{0-r} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum_{r=1}^{3} h_r\, h_{3-r} & \sum_{r=0}^{2} h_r\, h_{2-r} & \sum_{r=0}^{1} h_r\, h_{1-r} & \sum_{r=0}^{0} h_r\, h_{0-r} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum_{r=1}^{4} h_r\, h_{4-r} & \sum_{r=0}^{3} h_r\, h_{3-r} & \sum_{r=0}^{2} h_r\, h_{2-r} & \sum_{r=0}^{1} h_r\, h_{1-r} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum_{r=1}^{5} h_r\, h_{5-r} & \sum_{r=0}^{4} h_r\, h_{4-r} & \sum_{r=0}^{3} h_r\, h_{3-r} & \sum_{r=0}^{2} h_r\, h_{2-r} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{r=1}^{n-2} h_r\, h_{n-2-r} & \sum_{r=0}^{n-3} h_r\, h_{n-3-r} & \sum_{r=0}^{n-4} h_r\, h_{n-4-r} & \sum_{r=0}^{n-5} h_r\, h_{n-5-r} & \cdots & \sum_{r=0}^{2} h_r\, h_{2-r} & \sum_{r=0}^{1} h_r\, h_{1-r} & \sum_{r=0}^{0} h_r\, h_{0-r} & 0 \\ \sum_{r=1}^{n-1} h_r\, h_{n-1-r} & \sum_{r=0}^{n-2} h_r\, h_{n-2-r} & \sum_{r=0}^{n-3} h_r\, h_{n-3-r} & \sum_{r=0}^{n-4} h_r\, h_{n-4-r} & \cdots & \sum_{r=1}^{3} h_r\, h_{3-r} & \sum_{r=0}^{2} h_r\, h_{2-r} & \sum_{r=0}^{1} h_r\, h_{1-r} & \sum_{r=0}^{0} h_r\, h_{0-r} \\ \sum_{r=1}^{n} h_r\, h_{n-r} & \sum_{r=0}^{n-1} h_r\, h_{n-1-r} & \sum_{r=0}^{n-2} h_r\, h_{n-2-r} & \sum_{r=0}^{n-3} h_r\, h_{n-3-r} & \cdots & \sum_{r=1}^{4} h_r\, h_{4-r} & \sum_{r=0}^{3} h_r\, h_{3-r} & \sum_{r=0}^{2} h_r\, h_{2-r} & \sum_{r=0}^{1} h_r\, h_{1-r} \\ \sum_{r=1}^{n} h_r\, h_{n+1-r} & \sum_{r=0}^{n} h_{r-1}\, h_{n+1-r} & \sum_{r=0}^{n-1} h_r\, h_{n-1-r} & \sum_{r=0}^{n-2} h_r\, h_{n-2-r} & \cdots & \sum_{r=1}^{5} h_r\, h_{5-r} & \sum_{r=0}^{4} h_r\, h_{4-r} & \sum_{r=0}^{3} h_r\, h_{3-r} & \sum_{r=0}^{2} h_r\, h_{2-r} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

3. Menentukan bentuk umum $tr(H_n)^2$ dengan menggunakan pembuktian langsung.

Dengan menggunakan Persamaan (2.2) dapat ditentukan $tr(H_n)^2$ berdasarkan Definisi (2.9) sebagai berikut:

$$tr(H_n)^2 = \sum_{r=1}^{2} h_r\, h_{2-r} + \sum_{r=0}^{2} h_r\, h_{2-r} + \sum_{r=0}^{2} h_r\, h_{2-r} + \sum_{r=0}^{2} h_r\, h_{2-r} + \cdots + $$

$$+ \sum_{r=0}^{2} h_r\, h_{2-r} + \sum_{r=0}^{2} h_r\, h_{2-r} + \sum_{r=0}^{2} h_r\, h_{2-r} + \sum_{r=1}^{2} h_r\, h_{2-r}$$

$$= (h_0h_2 + h_1^2) + (2h_0h_2 + h_1^2) + (2h_0h_2 + h_1^2) +$$

$$\left(2h_0h_2 + h_1^2\right) + \cdots + \left(2h_0h_2 + h_1^2\right) + \left(2h_0h_2 + h_1^2\right) +$$

$$\left(2h_0h_2 + h_1^2\right) + \left(h_0h_2 + h_1^2\right)$$

$$= \underbrace{h_1^2 + h_1^2 + \cdots + h_1^2}_{n\ faktor} + \underbrace{2h_0h_2 + 2h_0h_2 + \cdots + 2h_0h_2}_{n-1\ faktor}$$

$$tr(H_n)^2 = nh_1^2 + 2(n-1)h_0h_2 \qquad (2.3)$$

4. Mengaplikasikan bentuk umum matriks $(H_n)^2$ dan $tr(H_n)^2$ pada contoh soal.

Contoh 2.9 Diberikan matriks Toeplitz-Hessenberg ordo 6×6 yaitu:

$$H_6 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 7 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 7 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 9 & 7 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 9 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Sehingga berdasarkan Persamaan (2.2) matriks $(H_n)^2$

Dari H_6 diperoleh $n = 6$, $h_0 = 2$, $h_1 = 3$, $h_2 = 7$, $h_3 = 9$, $h_4 = 4$, $h_5 = 5$, $h_0 = 6$

$$
(H_6)^2 = \begin{bmatrix}
\sum_{r=1}^{2} h_r\, h_{2-r} & \sum_{r=0}^{1} h_r\, h_{1-r} & \sum_{r=0}^{0} h_r\, h_{0-r} & 0 & 0 & 0 \\
\sum_{r=1}^{3} h_r\, h_{3-r} & \sum_{r=0}^{2} h_r\, h_{2-r} & \sum_{r=0}^{1} h_r\, h_{1-r} & \sum_{r=0}^{0} h_r\, h_{0-r} & 0 & 0 \\
\sum_{r=1}^{4} h_r\, h_{4-r} & \sum_{r=0}^{3} h_r\, h_{3-r} & \sum_{r=0}^{2} h_r\, h_{2-r} & \sum_{r=0}^{1} h_r\, h_{1-r} & \sum_{r=0}^{0} h_r\, h_{0-r} & 0 \\
\sum_{r=1}^{5} h_r\, h_{5-r} & \sum_{r=0}^{4} h_r\, h_{4-r} & \sum_{r=0}^{3} h_r\, h_{3-r} & \sum_{r=0}^{2} h_r\, h_{2-r} & \sum_{r=0}^{1} h_r\, h_{1-r} & \sum_{r=0}^{0} h_r\, h_{0-r} \\
\sum_{r=1}^{6} h_r\, h_{6-r} & \sum_{r=0}^{5} h_r\, h_{5-r} & \sum_{r=0}^{4} h_r\, h_{4-r} & \sum_{r=0}^{3} h_r\, h_{3-r} & \sum_{r=0}^{2} h_r\, h_{2-r} & \sum_{r=0}^{1} h_r\, h_{1-r} \\
\sum_{r=1}^{7} h_r\, h_{7-r} & \sum_{r=0}^{6} h_r\, h_{6-r} & \sum_{r=0}^{5} h_r\, h_{5-r} & \sum_{r=0}^{4} h_r\, h_{4-r} & \sum_{r=0}^{3} h_r\, h_{3-r} & \sum_{r=1}^{2} h_r\, h_{2-r}
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
h_1^2 + h_0h_2 & 2h_1h_0 & h_0^2 & 0 & 0 & 0 \\
2h_2h_1 + h_0h_3 & 2h_0h_2 + h_1^2 & 2h_1h_0 & h_0^2 & 0 & 0 \\
2h_3h_1 + h_2^2 + h_0h_4 & 2h_0h_3 + 2h_2h_1 & 2h_0h_2 + h_1^2 & 2h_1h_0 & h_0^2 & 0 \\
2h_4h_1 + 2h_3h_2 + h_0h_5 & 2h_0h_4 + 2h_3h_1 + h_2^2 & 2h_0h_3 + 2h_2h_1 & 2h_0h_2 + h_1^2 & 2h_1h_0 & h_0^2 \\
2h_5h_1 + 2h_4h_2 + h_3^2 + h_0h_6 & 2h_4h_1 + 2h_3h_2 + h_0h_5 & 2h_0h_4 + 2h_3h_1 + h_2^2 & 2h_0h_3 + 2h_2h_1 & 2h_0h_2 + h_1^2 & 2h_1h_0 \\
2h_6h_1 + 2h_5h_2 + 2h_3h_4 & 2h_5h_1 + 2h_4h_2 + h_3^2 + h_0h_6 & 2h_4h_1 + 2h_3h_2 + h_0h_5 & 2h_3h_1 + h_2^2 + h_0h_4 & 2h_2h_1 + h_0h_3 & h_1^2 + h_0h_2
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
3^2 + 2(7) & 2(3)(2) & 2^2 & 0 & 0 & 0 \\
2(7)(3) + 2(9) & 2(2)(7) + 3^2 & 2(3)(2) & 2^2 & 0 & 0 \\
2(9)(3) + 7^2 + 2(4) & 2(2)(9) + 2(7)(3) & 2(2)(7) + 3^2 & 2(3)(2) & 2^2 & 0 \\
2(4)(3) + 2(9)(7) + 2(5) & 2(2)(4) + 2(9)(3) + 7^2 & 2(2)(9) + 2(7)(3) & 2(2)(7) + 3^2 & 2(3)(2) & 2^2 \\
2(5)(3) + 2(4)(7) + 9^2 + 2(6) & 2(4)(3) + 2(9)(7) + 2(5) & 2(2)(4) + 2(9)(3) + 7^2 & 2(2)(9) + 2(7)(3) & 2(2)(7) + 3^2 & 2(3)(2) \\
2(6)(3) + 2(5)(7) + 2(9)(4) & 2(5)(3) + 2(4)(7) + 9^2 + 2(6) & 2(4)(3) + 2(9)(7) + 2(5) & 2(9)(3) + 7^2 + 2(4) & 2(7)(3) + (2)(9) & 3^2 + 2(7)
\end{bmatrix}
$$

dan menurut Persamaan (2.3) diperoleh:

$$
\begin{aligned}
tr(H_n)^2 &= nh_1^2 + 2(n-1)h_0h_2 \\
&= 6(3)^2 + 2(6-1)(2)(7) \\
&= 6(9) + 2(5)(2)(7) \\
&= 54 + 140 \\
&= 194
\end{aligned}
$$

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur dengan langkah−langkah sebagai berikut:

1. Diberikan matriks Toeplitz pentadiagonal simetris pada Persamaan (1.1).
2. Menentukan bentuk umum matriks $(P_m)^2$ dengan cara mengalikan $P_m \cdot P_m$.
3. Menentukan bentuk umum matriks $tr(P_m)^2$ dengan menggunakan pembuktian langsung.
4. Mengaplikasikan bentuk umum matriks $(P_m)^2$ dan $tr(P_m)^2$ ke dalam contoh soal untuk $m = 7$ dan $m = 8$.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah disajikan pada bab sebelumnya, maka kesimpulan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

Diberikan matriks Toeplitz pentadiagonal simetris:

$$P_m = P_m(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & b & a & b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & a & b & c & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & b & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & b & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c & b & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & b & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c & b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & c & b & a \end{bmatrix}$$

Maka,

$$P_m^{\,2}=\left[p_{ij}\right]_{m\times m}=\begin{bmatrix}
a^2+b^2+c^2 & 2ab+bc & 2ac+b^2 & 2bc & c^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
2ab+bc & a^2+2b^2+c^2 & 2ab+2bc & 2ac+b^2 & 2bc & c^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
2ac+b^2 & 2ab+2bc & a^2+2b^2+2c^2 & 2ab+2bc & 2ac+b^2 & 2bc & \cdots & c^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
2bc & 2ac+b^2 & 2ab+2bc & a^2+2b^2+2c^2 & 2ab+2bc & 2ac+b^2 & \cdots & 2bc & c^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
c^2 & 2bc & 2ac+b^2 & 2ab+2bc & a^2+2b^2+2c^2 & 2ab+2bc & \cdots & 2ac+b^2 & 2bc & c^2 & 0 & 0 & 0\\
0 & c^2 & 2bc & 2ac+b^2 & 2ab+2bc & a^2+2b^2+2c^2 & \cdots & 2ab+2bc & 2ac+b^2 & 2bc & c^2 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & c^2 & 2bc & 2ac+b^2 & 2ab+2bc & \cdots & a^2+2b^2+2c^2 & 2ab+2bc & 2ac+b^2 & 2bc & c^2 & 0\\
0 & 0 & 0 & c^2 & 2bc & 2ac+b^2 & \cdots & 2ab+2bc & a^2+2b^2+2c^2 & 2ab+2bc & 2ac+b^2 & 2bc & c^2\\
0 & 0 & 0 & 0 & c^2 & 2bc & \cdots & 2ac+b^2 & 2ab+2bc & a^2+2b^2+2c^2 & 2ab+2bc & 2ac+b^2 & 2bc\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^2 & \cdots & 2bc & 2ac+b^2 & 2ab+2bc & a^2+2b^2+2c^2 & 2ab+2bc & 2ac+b^2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c^2 & 2bc & 2ac+b^2 & 2ab+2bc & a^2+2b^2+c^2 & 2ab+bc\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c^2 & 2bc & 2ac+b^2 & 2ab+bc & a^2+b^2+c^2
\end{bmatrix}.$$

Atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$P_m{}^2 = \left[p_{ij}\right]_{m\times m} = \begin{cases} a^2+b^2+c^2, & untuk\ i=j=1\ dan\ i=j=m \\ a^2+2b^2+c^2, & untuk\ i=j=2\ dan\ i=j=m-1 \\ a^2+2b^2+2c^2, & untuk\ i=j=3,4,\cdots,m-2 \\ 2ab+bc, & untuk\ j=i+1,\ i=1,m-1;dan \\ & \quad i=j+1,\ j=1,m-1 \\ 2ab+2bc, & untuk\ j=i+1,\ i=2,3,\cdots,m-2;dan \\ & \quad i=j+1,\ j=2,3,\cdots,m-2 \\ 2ac+b^2, & untuk\ j=i+2,\ i=1,2,3,\cdots,m-2;dan \\ & \quad i=j+2,\ j=1,2,3,\cdots,m-2 \\ 2bc, & untuk\ j=i+3,\ i=1,2,3,\cdots,m-3;dan \\ & \quad i=j+3,\ j=1,2,3,\cdots,m-3 \\ c^2, & untuk\ j=i+4,\ i=1,2,3,\cdots,m-4;dan \\ & \quad i=j+4,\ j=1,2,3,\cdots,m-4 \\ 0, & untuk\ j=i+k,\ k=5,6,\cdots,m-1,\ dan\ i=1,2,3,\cdots m-k \\ & \quad i=j+k,\ k=5,6,\cdots,m-1,\ dan\ j=1,2,3,\cdots m-k \end{cases}$$

dan

$$tr\left(P_m\right)^2 = ma^2 + 2(m-1)b^2 + 2(m-2)c^2.$$

5.2 Saran

Dalam pembahasan yang telah dikemukakan, penulis membahas tentang langkah-langkah dalam menentukan *trace* dari suatu matriks Toeplitz pentadiagonal simetris kuadrat. Bagi pembaca yang tertarik dengan topik ini, dapat melanjutkan pembahasan tentang menentukan *trace* dari matriks Toeplitz pentadiagonal simetris berpangkat lebih dari dua.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. "*Elementary Linear Algebra Ninth Edition*".Application version, 2005.

Anton, H. "*Elementary Linear Algebra 11th Edition*".Application version, 2013.

Aryani, F. dan Husna N. "*Trace Matriks Toeplitz Tridiagonal Berpangkat Bilangan Bulat Positif*". Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 5, No. 1, Januari 2019.

Elouafi, M. "*On formulae for the determinant of symmetric pentadiagonal Toeplitz matrices*".Arabian Journal of Mathematics, 7(2) , Hal. 91-99, 2018.

Gray, Robert M. "*Toeplitz and Circulant Matrices*". Communication and Information Theory, Vol. 2, No. 3, Hal. 155-239, 2006.

Huang, C., Peng, W., Li, H., Cheng, L., & Jiang, H. "*Computing Diagonals of Toeplitz Pentadiagonal Matrix Inverses via Matrix Mobius Transformations*". In Proceedings of the 2017 IV International Conference on Network, Communication and Computing, Hal. 69-74, 2017.

Larson, R. "*Elementary Linear Algebra*" .Nelson Education, 2007.

Nassif, N., & Fayyad, D. K. "Introduction to Numerical Analysis and Scientific Computing" CRC Press, 2013.

Pahade, J. and Jha, M. "*Trace of Positive Integer Power of Real 2 × 2 Matrices*". Advances in Linear algebra & Matrix Theory,5, Hal.150-155, 2015.

Pahade, J dan Jha, M. "*Trace of Positive Integer Power of Adjacency Matrix*". Global Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 13, No. 6, Hal. Hal.2079-2087, 2017.

Rahmawati, R., Putri, N. A., Aryani, F., dan Rahma, A. N. "*Trace Matriks Toeplitz Simetris Bentuk Khusus Ordo* 3×3 *Berpangkat Bilangan Bulat Positif*". Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 5, No. 2, 2019.

Siregar, M. "*Trace Matriks Toeplitz-Hessenberg Kuadrat*" Skripsi. UIN Sultan Syarif Kasim Riau. 2020.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 28 Juni 1998 di Bekasi, Jawa Barat. Anak kedua dari dua bersaudara pasangan Bapak M. Khaidir Aliamin, S.E., (Alm) dan Ibu Albetri. Penulis menyelesaikan pendidikan Formal Taman Kanak-Kanak di TK IKSAL Solok pada tahun 2004, Sekolah Dasar di SD Negeri 01 Solok pada tahun 2010, Sekolah Menengah Pertama di SMP Negeri 1 Rengat pada tahun 2013, Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 1 Rengat dengan Jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA) pada tahun 2016.

Setelah menyelesaikan pendidikan SMA, pada tahun yang sama penulis melanjutkan pendidikan di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau dan lulus di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Jurusan Matematika. Penulis melaksanakan Kerja Praktek pada tanggal 14 Januari 2019 sampai dengan 14 Februari 2019 di PT. Riau Pos Intermedia Pekanbaru dengan judul **"Optimasi Biaya Transportasi Pengiriman Koran Menggunakan Metode *North West Corner* Dan Metode *Russell's Approximation*"** yang dibimbing oleh Bapak Mohammad Soleh, M.Sc dan diseminarkan tanggal 4 Juli 2019. Pada bulan Juli-Agustus 2019 penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Kota Lama, Kecamatan Rengat Barat, Kabupaten Indragiri Hulu, Provinsi Riau. Pada bulan 3 Agustus 2020 penulis dinyatakan lulus ujian sarjana dengan judul Tugas Akhir "***Trace* Matriks Toeplitz Pentadiagonal Simetris Kuadrat"** yang dibimbing oleh Ibu Rahmawati, S.Si, M.Sc.