NILAI KETAKTERATURAN TOTAL DARI EMPAT *COPY* GRAF BINTANG

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains pada
Program Studi Matematika

Oleh:

YUSNITA SARI
11554202525

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIMRIAU
PEKANBARU
2020

LEMBAR PERSETUJUAN

NILAI KETAKTERATURAN TOTAL DARI EMPAT *COPY* GRAF BINTANG

TUGAS AKHIR

Oleh:

YUSNITA SARI
11554202525

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, 31 Juli 2020

Ketua Program Studi	Pembimbing
Ari Pani Desvina, M.Sc.	**Corry Corazon Marzuki, M.Si**
NIP. 19811225 200604 2 003	**NIP. 19860320 201503 2 003**

LEMBAR PENGESAHAN

NILAI KETAKTERATURAN TOTAL DARI EMPAT *COPY* GRAF BINTANG

TUGAS AKHIR

Oleh:

YUSNITA SARI
11554202525

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 31 Juli 2020

Pekanbaru, 31 Juli 2020
Mengesahkan

Dekan	Ketua Program Studi
Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M. Ag	**Ari Pani Desvina, M.Sc.**
NIP. 19660604 199203 1 004	**NIP. 19811225 200604 2 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua	**: Rahmadeni, M.Si**
Sekretaris	**: Corry Corazon Marzuki, M.Si**
Anggota I	**: Fitri Aryani, M.Sc**
Anggota II	**: Sri Basriati, M.Sc.**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islan Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum, dengan ketentuan bahwa hak cipta ada pada penulis. Referensi kepustkaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan atas izin penulis dan harus dilakukan mengikuti kaedah dan kebiasaan ilmiah serta menye utkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin tertulis dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan dapat meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya dengan mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam pada form peminjaman.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 31 Juli 2020

Yang membuat pernyataan,

YUSNITA SARI
11554202525

LEMBAR PERSEMBAHAN

"Allah akan meninggikan orang-orang Beriman diantaramu dan orang-orang yang diberi Ilmu Pengetahuan beberapa derajat"

(Q.S Al-Mujadalah: 11)

Sembah sujud serta syukur ku kepada Allah Subhana Wa Ta"ala. Taburan cinta dan kasih sayang-Nya telah memberikanku kekuatan serta membekaliku dengan ilmu. Atas karunia serta kemudahan yang Allah SWT berikan, akhirnya Tugas Akhir ini dapat terselesaikan. Sholawat dan salam ku ucapankan untuk arwah junjungan umat yakni Nabi besar Muhammad Shallallahu „Alaihi Wasalam yang telah membawa umatnya dari alam kegelapan ke alam yang berilmu pengetahuan.

Untuk EMAK dan ABAH

Sebagai tanda bakti, hormat dan rasa terima kasih yang terhingga kupersembahkan karya ini kepada EMAK dan ABAH. Terima kasih karena telah memberikan kasih sayang yang tiada batas yang tak mungkin dapat ku balas hanya dengan selembar kertas ini. Kini lelah dan keringat EMAK dan ABAH tidak berakhir sia-sia. Semoga ini menjadi langkah awal untuk membuat EMAK dan ABAH bahagia. Terima kasih EMAK... Terima kasih ABAH...

Abang – dan Adikku

Tiada tawa yang paling indah saat berkumpul bersama kalian, walaupun sering betengkar tapi hal ini selalu menjadikan warna yang tak akan bisa dilupakan. Terima kasih Saudaraku...

Sahabatku

Terimakasih untuk sahabat yang selalu memberi semangat, do'a dan motivasi serta kasih sayangnya. Dan untuk keluarga besarku serta semua pihak yang terlibat, terima kasih untuk semua dukungannya dalam bentuk apapun, doa, nasehat serta saran dalam proses penyelesaian karyaku ini.

YUSNITA SARI

JULI 2020

NILAI KETAKTERATURAN TOTAL DARI EMPAT *COPY* GRAF BINTANG

YUSNITA SARI
11554202525

Tanggal Sidang : 31 Juli 2020
Tanggal Wisuda : 2020

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. Soebrantas KM 15 No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf dan k adalah bilangan bulat positif. Pelabelan-k total pada graf G adalah suatu pemetaan $\lambda: V \cup E \longrightarrow \{1,2,\dots,k\}$. Bobot titik x dinyatakan $wt(x) = \lambda(x) + \sum_{ux\in E} \lambda(ux)$ dan bobot sisi xy dinyatakan $wt(xy) = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y)$. Suatu pelabelan-$k$ dikatakan total tak teratur total, jika bobot setiap titik berbeda dan bobot setiap sisi berbeda. Nilai ketakteraturan total (*totally irregularity strength*) dari graf G dinotasikan dengan $ts(G)$ adalah nilai k minimum atau label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur total. Dalam tugas akhir ini diperoleh $ts(4S_n) = 2n + 1$ dengan n merupakan bilangan bulat positif dan $n \geq 3$.

Kata kunci: *Empat copy graf bintang, nilai ketakteraturan total, pelabelan total tak teratur total.*

TOTAL IRREGULARITY STRENGTH OF FOUR COPIES OF STAR

<u>YUSNITA SARI</u>
11554202525

Date of Final Exam : 31 July 2020
Date of Graduation :   2020

Mathematics Department
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas Street No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

Let $G = (V, E)$ be a graph and k is a positive integers. Total labeling-k on G is a mapping $\lambda: V \cup E \longrightarrow \{1,2,\ldots,k\}$. The weight of the vertex x is represented by $wt(x) = \lambda(x) + \sum_{ux\in E} \lambda(ux)$ and the weight of the edge xy is represented by $wt(xy) = \lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y)$. A total-$k$ labeling of G is called a tottaly irregular total labeling, if the weight of every two distinct vertices are different and the wight of every two distinct edges are different. The minimum k such that a graph G has a totally irregular total k- labeling is called the total irregularity strength of G, denoted by $ts(G)$. In this thesis obthained $ts(4S_n) = 2n + 1$ where n is a positive integer and $n \geq 3$.

Keywords: *Four copies of star, total irregularity strength, totally irregular total labaling.*

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Alhamdulillahirabbil'alamin, segala puji dan syukur kehadirat Allah *Subhanahu Wata'ala* yang telah memberikan rahmat, nikmat, kesempatan dan kesehatan sehingga penulis bisa menyelesaikan tugas akhir ini. Shalawat dan salam kita sampaikan buat junjungan alam Nabi Muhammad *Shalallahu Alaihi Wassalam* karena berkat perjuangan beliaulah kita umat manusia yang dibawa dari alam kegelapan ditujukan ke alam yang penuh dengan ilmu pengetahuan.

Penulisan tugas akhir ini merupakan salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 pada Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Penulis menyadari sepenuhnya akan keterbatasan pengetahuan yang penulis miliki. Sehingga dalam penulisan skripsi ini banyak terdapat kekurangan dan jauh dari kata sempurna, karena itu dengan segala kerendahan hati penulis mengharapkan saran dan kritik yang membangun dalam rangka penyempurnaan walaupun dengan segala keterbatasan tersebut penulis tetap berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis sendiri maupun bagi pembaca sekalian.

Penulis mengucapkan terima kasih dan penghargaan setulus-tulusnya kepada semua pihak yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini baik secara langsung maupun tidak langsung, terutama kepada :

1. Bapak Prof. Dr. K.H. Akhmad Mujahidin MA. selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Ahmad Darmawi. M.Ag selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc. selaku Ketua Program Studi Matematika yang telah memberi dukungan dan semangat kepada penulis.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc. selaku Sekretaris Program Studi Matematika yang telah memberi dukungan dan semangat kepada penulis.

5. Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si. selaku Pembimbing Akademik dan Pembimbing Tugas Akhir yang telah banyak membantu, mendukung, mebimbing serta memberikan arahan sehingga tugas akhir penulis dapat diselesaikan.
6. Ibu Fitri Aryani, M.Sc. dan ibu Sri Basriati, M.Sc. selaku Penguji yang telah memberikan kritikan dan saran kepada penulis.
7. Seluruh Dosen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi yang telah banyak memberi nasehat, bimbingan, serta ilmu kepada penulis.
8. Terimakasih untuk saudaraku Kasrimanto dan Muhammad Iqbal.
9. Seluruh keluarga besarku yang telah memberikan semangat dan doa agar bisa menyelesaikan Tugas Akhir ini.
10. Terimakasih teman sedari dulu, Aan Deni Masrudy, S.Pi yang selalu memberikan semangat, doa, dan motivasi.
11. Terimakasih untuk Era Napra, Yuliana, Desi, Shinta dong", Jojo, Hara Ivan, Ari, dan Wiwik, Kak Della, Kak Maya manjah yang selalu membantu menyelesaikan Tugas Akhir ini, memberikan semangat, doa, dan motivasi.
12. Teman-temanku angkatan 2015 teristimewa bagi teman-teman kelas B 2015
13. Dan semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.

Dalam penulisan ini penulis sadar bahwa tugas akhir ini belum sempurna. Maka dari itu kritik dan saran membangun kearah perbaikan dan penyempurnaan skripsi ini penulis terima dengan senang hati. Penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Pekanbaru, 31 Juli 2020

Penulis

Yusnita Sari

DAFTAR ISI

Halaman

LEMBAR PERSETUJUAN ii
LEMBAR PENGESAHAN iii
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL iv
LEMBAR PERNYATAAN v
LEMBAR PERSEMBAHAN vi
ABSTRAK vii
ABSTRACT viii
KATA PENGANTAR ix
DAFTAR ISI xi
DAFTAR GAMBAR xiii

BAB I PENDAHULUAN
1.1 Latar Belakang I-1
1.2 Rumusan Masalah I-3
1.3 Batasan Masalah I-3
1.4 Tujuan Penelitian I-3
1.5 Manfaat Penelitian I-3
1.6 Sistematika Penulisan I-3

BAB II LANDASAN TEORI
2.1 Pengertian Graf II-1
2.2 Jenis-jenis Graf II-2
2.3 Pelabelan Graf II-5
2.3.1 Pelabelan Total Tak Teratur Titik II-6
2.3.2 Pelabelan Total Tak Teratur Sisi II-6
2.3.3 Pelabelan Total Tak Teratur Total II-7
2.4 Induksi Matematika II-5

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

BAB IV PEMBAHASAN

4. 1 Pemberian Nama Titik dan Nama Sisi pada Graf $4S_n$.. IV-1

4.2 Batas Bawah Nilai Ketakteraturan Total dari Graf $4S_n$ IV-2

4.3 Pelabelan Total Tak Teratur Total pada Graf $4S_n$ IV-5

4.4 Nilai Ketakteraturan Total pada Graf $4S_n$ IV-30

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan V-1

5.2 Saran V-1

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

DAFTAR GAMBAR

Gambar		Halaman
2.1	Graf Sederhana	II-2
2.2	Graf Tak Sederhana	II-3
2.3	Graf Tak Berarah	II-3
2.4	Graf Berarah	II-3
2.5	Graf Lingkaran C_6	II-4
2.6	Graf Lintasan P_4	II-4
2.7	Graf Bipartit	II-4
2.8	Graf Bintang S_5	II-5
2.9	Suatu Pelabelan-3 Total Tak Teratur Total untuk Graf $2S_2$	II-12
2.10	Bobot Semua Sisi Pada Graf $2S_2$	II-12
2.11	Bobot Semua Titik Pada Graf $2S_2$	II-13
2.12	Suatu Pelabelan-6 Total Tak Teratur Total untuk Graf $2S_6$	II-13
2.13	Bobot Semua Sisi Pada Graf $2S_6$	II-13
2.14	Bobot Semua Titik Pada Graf $2S_6$	II-14
4.1	Ilustrasi empat *copy* graf bintang $(4S_n)$	IV-2
4.2	Pelabelan Total Tak Teratur Total pada $4S_3$	IV-6
4.3	Pelabelan Total Tak Teratur Total pada $4S_4$	IV-8
4.4	Pelabelan Total Tak Teratur Total pada $4S_5$	IV-10
4.5	Pelabelan Total Tak Teratur Total pada $4S_6$	IV-13
4.6	Pelabelan Total Tak Teratur Total pada $4S_7$	IV-16
4.7	Pelabelan Total Tak Teratur Total pada $4S_8$	IV-20
4.8	Pelabelan Total Tak Teratur Total pada $4S_9$	IV-24
4.9	Pelabelan Total Tak Teratur Total pada $4S_{10}$	IV-28
4.10	Pelabelan Total Tak Teratur Total pada $4S_{14}$	IV-47

BAB 1
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang masih menarik untuk dibahas karena karena teori-teorinya masih aplikatif sampai saat ini dan dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisis model atau rumusan, teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan permasalahan. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek yang lainnya. (Purwanto, 1998).

Teori graf muncul pertama kali pada tahun 1736 ketika seorang matematikawan Swiss bernama Leonardo Euler mencoba mencari solusi yang menggambarkan suatu masalah lintasan yang melalui jembatan dan pulau ditengah kota Konigberg. Dari permasalahan itu, akhirnya Euler mengembangkan beberapa konsep mengenai teori graf. Masalah tersebut digambarkan melalui titik dan sisi yang menghubungkan antar titik, yang akhirnya berkembang dan dikenal dengan graf (Munir, R. 2009).

Penelitian mengenai teori graf terus mengalami perkembangan. Salah satu pembahasan yang terus berkembang adalah pelabelan pada graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sadlacek (1964). Berdasarkan jenis elemen-elemen yang dilabeli maka pelabelan dibagi kedalam tiga jenis, yaitu pelabelan titik, pelabelan sisi dan pelabelan total. Suatu pelabelan dengan domain berupa himpunan titik dari suatu graf disebut pelabelan titik (*vertex labeling*), sedangkan pelabelan dengan domain berupa himpunan sisi dari suatu graf disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domain dari pemetaan tersebut adalah gabungan himpunan titik dan himpunan sisi maka pelabelan tersebut dinamakan pelabelan total (*total labeling*) (Wallis, 2001).

Terdapat beberapa jenis pelabelan graf yang telah dikaji, salah satunya adalah pelabelan-k total tak teratur. Menurut Bača, dkk., memperkenalkan pelabelan total tak teratur yang mempunyai dua tipe yakni pelabelan total tak teratur titik dan pelabelan total tak teratur sisi. Suatu pelabelan $f: V \cup E \longrightarrow \{1,2,\dots,k\}$ pada $G = (V, E)$ disebut pelabelan-k total tak teratur titik jika untuk setiap dua buah titik yang berbeda u dan v pada G memenuhi $wt(u) \neq wt(v)$, dimana $wt(u)$ dan $wt(v)$ berturut-turut adalah bobot dari titik u dan v. Bobot dari u dari G didefinisikan sebagai $wt(u) = \lambda(u) + \sum_{uv \epsilon E} \lambda(uv)$. Nilai minimum k sehingga G memiliki pelabelan-k total tak teratur titik dinamakan nilai total ketakteraturan titik dari G, dinotasikan dengan $tvs(G)$. Suatu pelabelan $f: V \cup E \longrightarrow \{1,2,\dots,k\}$ pada $G = (V, E)$ disebut pelabelan-k total tak teratur sisi dikatakan pelabelan-k total tak teratur sisi jika untuk setiap dua buah sisi yang berbeda e dan f pada G memenuhi $wt(e) \neq wt(f)$, dimana $wt(e)$ dan $wt(f)$ berturut-turut adalah bobot dari sisi e dan f. Bobot dari suatu sisi $e = (uv)$ di G didefinisikan sebagai $wt(e) = \lambda(u) + \lambda(uv) + \lambda(v)$. Nilai minimum k sehingga G memiliki pelabelan-k total tak teratur sisi dinamakan nilai total ketakteraturan sisi dari G, dinotasikan dengan $tes(G)$ (Bača, dkk., 2007).

Pada tahun 2013, Marzuki, dkk,. memperkenalkan pelabelan total tak teratur total yang merupakan kombinasi pelabelan total tak teratur titik dan pelabelan total tak teratur sisi. Suatu pelabelan $f: V \cup E \longrightarrow \{1,2,\dots,k\}$ pada $G = (V, E)$ disebut pelabelan-k total tak teratur total dari G, jika untuk setiap dua titik x dan y yang berbeda di $V(G)$ memenuhi $wt(x) \neq wt(y)$ dan untuk setiap sisi x_1x_2 dan y_1y_2 yang berbeda di $E(G)$ yang memenuhi $wt(x_1x_2) \neq wt(y_1y_2)$ dimana $wt(x) = f(x) + \sum f(xz)$ dan $wt(x_1x_2) = f(x_1) + f(x_1x_2) + f(x_2)$. Nilai minimum k sehingga G memiliki pelabelan-k total tak teratur total disebut nilai total ketakteraturan total dari G, dinotasikan dengan $ts(G)$.

Tahun 2015, Tilukay, dkk,. memperkenalkan pelabelan total tak teratur total yang merupakan kombinasi pelabelan total tak teratur titik dan pelabelan total tak teratur sisi. yang berjudul “On The Total Irregularity Strength of Fan, Wheel, Triangular Book, and Friendship Graphs” diperoleh $ts(f_n) = \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$ untuk $n \geq 3$,

$ts(W_n) = \left\lceil\frac{2n+2}{3}\right\rceil$ untuk $n \geq 3$, $ts(P_1 \odot S_n) = \left\lceil\frac{2n+3}{3}\right\rceil$ untuk $n \geq 3$, $ts(F_n) = n + 1$ untuk $n \geq 2$.

Tahun 2014, Ramdani, R. Meneliti pelabelan total tak teratur total yang merupakan kombinasi pelabelan total tak teratur titik dan pelabelan total tak teratur sisi. Dalam papernya, "Nilai total ketakteraturan total dari dua *copy* graf bintang", Hasil dari penelitian Rismawati Ramdani., diperoleh $ts(2S_n) \geq n + 1$.

Masih banyak jenis graf yang belum dibahas nilai ketakteraturan totalnya. Berdasarkan uraian-uraian diatas, maka penulis tertarik untuk meneliti nilai total ketakteraturan total (ts) dari graf bintang dengan judul **"Nilai Ketakteraturan Total Dari Empat *Copy* Graf Bintang** ".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang sebelumnya, masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah bagaimana rumus umum nilai ketakteraturan total dari empat *copy* graf bintang.

1.3 Batasan Masalah

Agar tidak terjadi perluasan pembahasan, maka diperlukan batasan masalah dalam penelitian tugas akhir ini. Penulis membatasi masalah hanya berkaitan dengan nilai ketakteraturan total dari empat *copy* graf bintang dengan $n \in Z$ dimana $n \geq 3$.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah untuk mendapatkan rumus nilai ketakteraturan total dari empat *copy* graf bintang.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Menambah pengetahuan mengenai graf
2. Mengetahui nilai ketakteraturan total dari empat *copy* graf bintang.
3. Sebagai sarana infornasi dan referensi bagi pihak yang membutuhkan.
4. Sebagai bahan pengembangan ilmu selanjutnya.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan Tugas Akhir ini mencakup lima bab yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini menjelaskan tentang pengertian graf, jenis-jenis graf dan pelabelan graf.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini menjelaskan tentang jenis penelitian dan langkah-langkah menyelesaikan masalah $ts(4Sn) \geq 2n + 1$.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan secara terperinci tentang hasil-hasil yang diperoleh dari $ts(4Sn) \geq 2n + 1$.

BAB V PENUTUP

Bab ini menjelaskan tentang kesimpulan dari pembahasan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

Bab ini berisi teori-teori pendukung yang dapat membantu penulis untuk menyelesaikan permasalahan yang akan dibahas pada bab selanjutnya.

2.1 Pengertian Graf

Menurut catatan sejarah, masalah jembatan Konigsberg adalah masalah yang pertama kali menggunakan graf. Pada tahun 1736 M, seorang matematikawan Swiss, L.Euler adalah orang pertama kali yang menemukan jawaban masalah itu dengan pembuktian sederhana. Euler memodelkan masalah ini kedalam graf. Graf digunakan untuk menggambarkan objek-objek agar lebih mudah dimengerti (Amir. Zubaidah, 2010).

Definisi 2.1 (Amir. Zubaidah, 2010) Sebuah graf G berisikan dua himpunan yaitu himpunan hingga tak kosong $V(G)$ yang elemen-elemennya disebut titik dan himpunan (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemennya disebut sisi, sedemikian hingga setiap eleman e dalam $E(G)$ adalah sebuah pasangan tidak berurut dari titik di $V(G)$. disebut himpunan titik-titik dari G dan $E(G)$ disebut himpunan sisi dari G.

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) yang ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ yang dalam hal ini V adalah himpunan tak kosong dari simpul-simpul (*verlices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang simpul.

Berdasarkan kedua pengertian diatas, dapat disimpulkan bahwa graf adalah kumpulan dua himpunan yaitu himpunan hingga tak kosong $V(G)$ yang elemen elemennya disebut titik dan himpunan (mungkin kosong) $E(G)$ yang elemenya disebut sisi. Untuk setiap $e \epsilon E(G)$ adalah sebuah pasangan tak berurut dari titik di $V(G)$.

Definisi-definisi di atas menyatakan bahwa V tidak boleh boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sebuah sisi, tetapi simpulnya harus ada, minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu buah simpul tanpa sebuah sisi pun dinamakan graf trivial.

Simpul pada graf dapat dinomori dengan huruf seperti $a, b, c, d, \ldots$ atau dengan bilangan asli $1,2,3,4, \ldots$ atau gabungan keduanya. Misal u dan v adalah titik-titik. Sedangkan sisi yang menghubungkan simpul u dengan simpul v dinyatakan dengan pasangan (u, v) adalah sisi dari G atau dinyatakan dengan lambang $e_1, e_2, e_3, \ldots$. dengan kata lain, jika e adalah sisi yang menghubungkan simpul u dengan simpul v, simpul u dan simpul v berhubungan langsung *(adjacent)* di G, u dan v adalah titik-titik akhir dari sisi e, sisi e terkait *(incident)* dengan titik u atau v, maka dapat ditulis sebagai berikut:

$$e = (u, v)$$

Selain itu, sebuah graf dapat dipresentasikan dalam bentuk diagram dimana setiap titik g digambarkan dengan sebuah *noktah* dan setiap sisi yang menghubungkan dua titik di G digambarkan dengan sebuah kurva sederhana (ruas garis) dengan titik akhir di kedua titik tersebut.

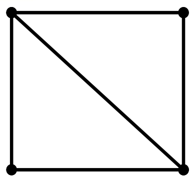
2.2 Jenis-jenis Graf

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori atau jenis tergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan pada graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau sisi gelang, berdasarkan jumlah titik atau berdasarkan orientasi arah pada sisi dan berdasarkan struktur.

Berdasarkan ada tidaknya sisi ganda atau sisi gelang pada suatu graf, maka secara umum graf dapat dibedakan menjadi dua jenis, yaitu (Munir. R, 2009):

1. Graf Sederhana (*Simple Graph*)

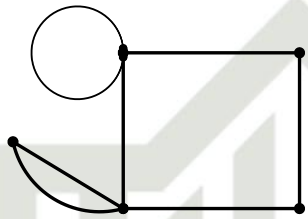
   Graf sederhana adalah graf yang tidak mempunyai sisi ganda maupun gelang. Pada graf sederhana sisi adalah pasangan tidak terurut *(unordered pairs)*. Contoh dari graf sederhana dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Graf Sederhana

2. Graf Tak Sederhana (*Unsimple Graph*)

Graf tak sederhana adalah graf yang mengandung sisi ganda atau gelang. Ada dua macam graf tak sederhana, yaitu: graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudograph*). Contoh dari graf tak sederhana dapat dilihat pada Gambar 2.2.

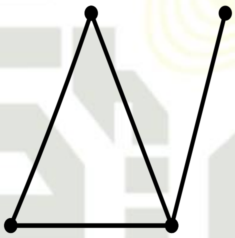


Gambar 2.2 Graf Tak Sederhana

Berdasarkan orientasi arah pada sisinya, maka secara umum graf dapat dibedakan menjadi dua jenis, yaitu (Vasudev, 2006):

1. Graf Tak Berarah (*Undirected Graph*)

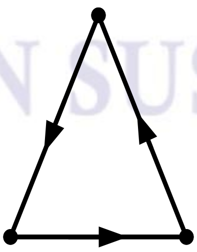
Jika setiap sisi dari graf G tidak memiliki arah maka graf disebut graf tak berarah. Contoh dari graf tak berarah dapat dilihat pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Graf Tak Berarah

2. Graf Berarah (*Directed Graph*)

Jika setiap sisi dari graf G memiliki arah maka graf disebut graf berarah. Contoh dari graf tak berarah dapat dilihat pada Gambar 2.4.

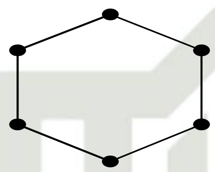


Gambar 2.4 Graf Berarah

Pada graf sederhana (*simple graph*) terdapat beberapa graf khusus, yaitu: (Wibisono, 2008)

1. Graf lingkaran (*Cycle*)

Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran n titik dinotasikan dengan C_n. Contoh dari graf lingkaran dapat dilihat pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Graf Lingkaran C_6

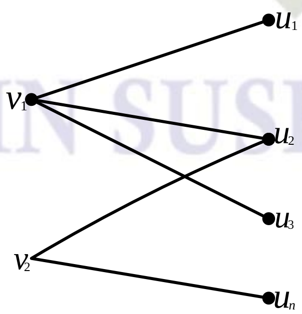
2. Graf lintasan (*Path*)

Graf lintasan adalah suatu graf berorde n yang memiliki titik awal v_1 dan titik akhir v_n masing-masing berderajat satu dan titik yang lain berderajat dua, dinotasikan dengan P_n. Contoh dari graf lintasan dapat dilihat pada Gambar 2.6.

Gambar 2.6 Graf Lintasan P_4

3. Graf Bipartit

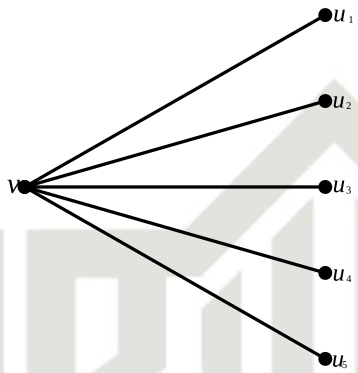
Suatu graf G disebut graf bipartit jika himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan X dan Y sedemikian sehingga setiap sisi menghubungkan suatu titik di X kesuatu titik di Y.



Gambar 2.7 Graf Bipartit

4. Graf Bintang

Graf bintang dinotasikan dengan S_n, adalah suatu graf bipat lengkap $K_{1,n}$.



Gambar 2.8 Graf Bintang $S_5 \approx K_{1,5}$

2.3 Pelabelan Graf

Pelabelan graf adalah pemetaan yang memasangkan elemen-elemen graf dengan bilangan-bilangan bulat positif. Suatu graf Pelabelan dengan domain himpunan titik disebut pelabelan titik (*vertex labelling*), pelabelan dengan domain himpunan sisi disebut pelabelan sisi (*edge labelling*), dan pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi disebut pelabelan total (*total labelling*).

Bobot (*weight*) dari elemen graf adalah jumlah dari semua label yang berhubungan dengan elemen graf tersebut. Bobot dari titik v dengan pelabelan f adalah $w_f(v) = f(v) + \sum_{uv\epsilon E} f(uv)$. Sedangkan bobot dari sisi uv adalah $w_f(uv) = f(u) + f(uv) + f(v)$.

Tahun 2007, Bača, dkk., memperkenalkan dua jenis dari pelabelan total tak teratur yaitu: pelabelan total tak teratur titik dan pelabelan total tak teratur sisi. Kemudian pada tahun 2013, Marzuki, dkk., memperkenalkan pelabelan total tak teratur total yang merupakan kombinasi pelabelan total tak teratur titik dan pelabelan total tak teratur sisi. Berikut ini penjelasan tentang pelabelan total tak teratur berdasarkan jenis-jenisnya:

2.3.1 Pelabelan Total Tak Teratur Titik

Pelabelan total tak teratur titik merupakan salah satu jenis pelabelan total tak teratur yang diperkenalkan oleh Bača, dkk. Pelabelan total tak teratur titik sudah banyak digunakan untuk mencari nilai total ketakteraturan titik berbagai jenis graf. Berikut ini definisi pelabelan total tak teratur titik:

Definisi 2.2 (Bača, dkk., 2007) Pelabelan-k total dikatakan pelabelan-k total tak teratur titik dari graf G, jika untuk setiap titik u dan v yang berbeda maka $w_f(x) \neq wt(y)$, dimana $w_f(x) = f(x) + \sum_{uv \in E} f(ux)$. Nilai total ketakteraturan titik *(total vertex irregularity strength)* dari graf G, yang dinotasikan dengan $tvs(G)$ adalah label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur titik. Penelitian mengenai nilai $tvs(G)$ dilakukan oleh Bača, dkk., dengan diberikan batas atas dan batas bawah seperti dituliskan pada teorema berikut ini.

Teorema 2.1 (Bača, dkk., 2007) Misalkan G adalah graf (p,q) dengan derajat minimum δ dan derajat maksimum Δ, maka:

$$\left\lceil \frac{p+\delta}{\Delta+1} \right\rceil \leq tvs(G) \leq p + \Delta - 2\delta + 1$$

Teorema 2.2 (Bača, dkk., 2007) Misalkan K_p adalah graf lengkap dengan p titik, maka

$$tvs(K_p) = 2$$

2.3.2 Pelabelan Total Tak Teratur Sisi

Pelabelan total tak teratur sisi juga diperkenalkan oleh Bača, dkk, berikut ini definisi pelabelan total tak teratur sisi:

Definisi 2.3 (Bača, dkk., 2007) Pelabelan-k total dikatakan pelabelan-k total tak teratur sisi dari graf G, jika untuk sebarang dua sisi $e = u_1v_1$ dan $w = u_2v_2$ yang berada di graf G berlaku $w_f(e) \neq w_f(w)$, dengan $w_f(e) = f(u_1) + f(e) + f(v_1)$

dan $w_f(w) = f(u_2) + f(w) + f(v_2)$. Nilai total ketakteraturan sisi *(total edge irregularity strength)* dari graf G, yang dinotasikan dengan $tes\,(G)$ adalah label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur sisi.

Penelitian mengenai nilai *tes(G)* dilakukan oleh Bača, dkk., dengan diberikan batas atas dan batas bawah seperti dituliskan pada teorema berikut ini:

Teorema 2.3 (Bača, dkk., 2007) Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi tak kosong E, maka:

$$\left\lceil \frac{|E| + 2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E|$$

Pada penelitian yang sama, Bača, dkk., memberikan nilai *tes(G)* jika G adalah graf lintasan atau graf lingkaran. Hasil penelitian tersebut diberikan pada teoremateorema berikut ini.

Teorema 2.4 (Bača, dkk., 2007) Misalkan P_n adalah graf lintasan dengan banyaknya sisi n, dimana $n \geq 1$ maka

$$tes(P_n) = \left\lceil \frac{n + 2}{3} \right\rceil$$

2.3.3 Pelabelan Total Tak Teratur Total

Pelabelan total tak teratur total merupakan kombinasi pelabelan total tak teratur titik dan pelabelan total tak teratur sisi. Berikut ini definisi pelabelan total tak teratur total:

Definisi 2.4 (Marzuki, dkk., 2013) Pelabelan-k total dikatakan pelabelan-k total tak teratur total dari graf G, jika untuk setiap titik x dan y yang berbeda maka $w_f(x) \neq w_f(y)$, dan untuk setiap sisi x_1x_2 dan y_1y_2 yang berbeda maka $w_f(x_1x_2) \neq w_f(y_1y_2)$. Nilai keteraturan total (*totally irregularity strength*) dari graf G, yang dinotasikan $ts(G)$ adalah label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur total.

Penelitian mengenai nilai $ts(G)$ dilakukakan oleh C.C. Marzuki, dkk., dengan diberikan batas atas dan batas bawah seperti dituliskan pada teorema berikut ini.

Teorema 2.5 (Marzuki, dkk., 2013) Untuk setiap graf G, maka

$$ts(G) \geq max\,\{tes(G), tvs(G)\}$$

Teorema 2.6 (Marzuki, dkk., 2013) Misalkan n suatu bilangan bulat positif dan C_n adalah lingkaran dengan sisi n. Maka

$$ts(C_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$$

Teorema 2.7 (Marzuki, dkk., 2013) Misalkan n suatu bilangan bulat positif dan P_n adalah lingkaran dengan sisi n. Maka

$$ts(P_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil & \text{untuk } n = 2 \text{ atau } n = 5 \\ \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil & \text{untuk n lainnya} \end{cases}$$

Penelitian mengenai penentuan nilai total ketakteraturan total dari dua *copy* graf bintang diberikan oleh Rismawati Ramdani tahun 2014. Penelitian tersebut, diberikan nilai total ketakteraturan total dari dua *copy* graf bintang. Hasil penelitian tersebut diberikan teorema berikut ini.

Teorema 2.8 (Ramdani, R. 2014) Misalkan $n \geq 2$, maka $ts(2S_n) = n + 1$

Bukti : Graf $2S_n$ memiliki titik 2_n berderajat 1 dan 2 titik berderajat n. Maka bobot terkecil da $2S_n$ri sedikitnya 2 dan bobot terbesar dari suatu titik berderajat 1 sedikitnya $2n + 1$, sehingga label terbesar dari titik berderajat 1 adalah sedikitnya $\left\lceil \frac{2n+1}{2} \right\rceil = n + 1$. Bobot terkecil dari suatu titik berderajat n sedikitnya $2n + 2$ dan bobot terbesar n dari suatu titik berderajat n adalah $2n + 3$, sehingga label terbesar dari suatu titik berderajat adalah sedikitnya Dengan demikian

$$tvs(2S_n) \geq \max\{n + 1{,}3\} = n + 1$$

Selain itu, banyaknya sisi dari $2S_n$ adalah sehingga berdasarkan Teorema 2.3

$$tes(2S_n) \geq \left\lceil \frac{2n+1}{3} \right\rceil$$

Dengan demikian berdasarkan Teorema 2.7 $ts(2S_n) \geq n + 1$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $ts(2S_n) \leq n + 1$

- **Kasus I**: Untuk $n \in \{2{,}3{,}4\}$

Definisikan suatu pelabelan f pada $2S_n$ sebagai berikut :

$$f(u_i) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } i = 0 \\ \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil \text{untuk } 1 \leq i \leq n; \end{cases}$$

$$f(u_0 u_i) = \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil \text{ untuk } 1 \leq i \leq n;$$

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } i = 0 \\ \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \text{ untuk } i = 1 \\ i + 1\text{untuk } i = 4 \end{cases}$$

$$f(v_0 v_1) = \begin{cases} 3 \text{ untuk } i = 1 \\ \left\lceil \frac{n+4}{2} \right\rceil \text{ untuk } i = 2 \\ 4 \text{ untuk } i = 3 \\ 5 \text{ untuk } i = 3 \end{cases}$$

Berdasarkan pelabelan f di atas, diperoleh bobot pada setiap titik dan setiap sisi sebagai berikut :

1. Untuk $n = 2$

   Bobot pada setiap titik pada $2S_2$ adalah

$$w_f(u_0) = 4$$
$$w_f(u_1) = 2$$
$$w_f(u_2) = 3$$
$$w_f(v_0) = 7$$
$$w_f(v_1) = 5$$
$$w_f(v_2) = 6$$

   Bobot pada setiap sisi pada $2S_2$ adalah

$$w_f(u_0 u_1) = 3$$
$$w_f(u_0 u_2) = 4$$
$$w_f(v_0 v_1) = 6$$
$$w_f(v_0 v_2) = 7$$

   Dapat dilihat bahwa bobot semua titik dan bobot sisi pada $2S_2$ berbeda

2. Untuk $n = 3$

   Bobot pada setiap titik pada $2S_3$ adalah

$$w_f(u_0) = 6$$
$$w_f(u_1) = 2$$
$$w_f(u_2) = 3$$
$$w_f(u_3) = 4$$
$$w_f(v_0) = 12$$
$$w_f(v_1) = 5$$
$$w_f(v_2) = 7$$
$$w_f(v_3) = 8$$

Bobot pada setiap sisi pada $2S_3$ adalah

$$w_f(u_0u_1) = 3$$
$$w_f(u_0u_2) = 4$$
$$w_f(u_0u_3) = 5$$
$$w_f(v_0v_1) = 6$$
$$w_f(v_0v_2) = 8$$
$$w_f(v_0v_3) = 9$$

Dapat dilihat bahwa bobot semua titik dan bobot sisi pada $2S_3$ berbeda

3. Untuk $n = 4$

Bobot pada setiap titik pada $2S_4$ adalah

$$w_f(u_0) = 9$$
$$w_f(u_1) = 2$$
$$w_f(u_2) = 3$$
$$w_f(u_3) = 4$$
$$w_f(u_5) = 5$$
$$w_f(v_0) = 17$$
$$w_f(v_1) = 6$$
$$w_f(v_2) = 7$$
$$w_f(v_3) = 8$$
$$w_f(v_5) = 10$$

Bobot pada setiap sisi pada $2S_4$ adalah

$$w_f(u_0u_1) = 3$$

$$w_f(u_0u_2) = 4$$

$$w_f(u_0u_3) = 5$$

$$w_f(u_0u_4) = 6$$

$$w_f(v_0v_1) = 6$$

$$w_f(v_0v_2) = 8$$

$$w_f(v_0v_3) = 9$$

$$w_f(v_0v_4) = 16$$

Dapat dilihat bahwa bobot semua titik dan bobot sisi pada $2S_4$ berbeda

- **Kasus 2** : Untuk $n \geq 5$

Definisikan suatu pelabelan f pada $2S_n$ untuk $n \geq 5$ sebagai berikut :

$$f(u_i) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } i = 0 \\ \frac{i}{2} \text{ untuk } 1 \leq i \leq n; \end{cases}$$

$$f(u_0u_i) = \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor \text{ untuk } 1 \leq i \leq n;$$

$$f(v_i) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } i = 0 \\ \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \text{ untuk } 1 \leq i \leq n; \end{cases}$$

$$f(v_0v_1) = \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil \text{ untuk } 1 \leq i \leq n;$$

Berdasarkan pelabelan f di atas, diperoleh bobot pada setiap titik dan bobot pada setiap sisi di $2S_n$ sebagai berikut:

1. Bobot pada setiap titik pada $2S_n$ untuk $n \geq 5$ adalah

$$w_f(u_0) = \begin{cases} \frac{n^2+4n+3}{4} \text{ untuk } n \text{ ganjil} \\ \frac{n^2+4n+4}{4} \text{ untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

$$w_f(u_i) = i + 1 \text{ untuk } 1 \leq i \leq n;$$

$$w_f(v_0) = \begin{cases} \dfrac{3n^2 + 4n + 5}{4} & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ \dfrac{3n^2 + 4n + 4}{4} & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

$$w_f(v_i) = i + 1 \text{ untuk } 1 \leq i \leq n;$$

2. Bobot pada setiap sisi pada $2S_n$ untuk $n \geq 5$ adalah

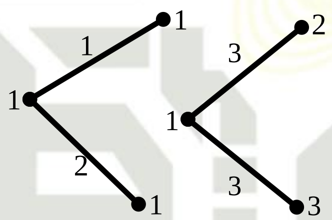
$$w_f(u_0u_1) = i + 2 \text{ untuk } 1 \leq i \leq n;$$

$$w_f(v_0v_1) = n + i + 2 \text{ untuk } 1 \leq i \leq n;$$

Jelas bahwa tidak ada dua titik yang memiliki bobot yang sama dan tidak ada dua sisi yang memiliki bobot yang sama. f Dengan demikian, adalah suatu pelabelan $(n+1)$ total tak teratur total pada $2S_n$, sehingga

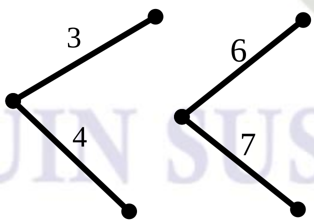
$$ts(2S_n) = n + 1 \qquad \blacksquare$$

Sebagai ilustrasi, pada gambar di bawah ini diberikan suatu pelabelan-3 total tak teratur total untuk graf $2S_n$ berdasarkan pelabelan yang diberikan pada Kasus 1 untuk $n = 2$.



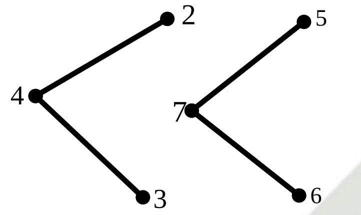
Gambar 2.9 Suatu Pelabelan-3 Total Tak Teratur Total untuk Graf $2S_2$

Bobot semua sisi pada graf $2S_2$ berdasarkan pelabelan pada Gambar 2.9 diberikan pada Gambar 2.10



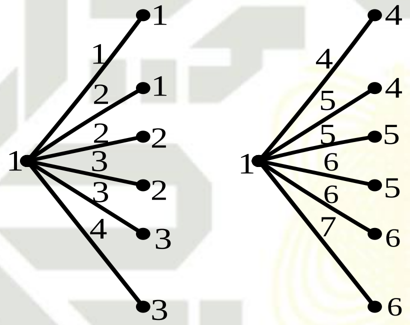
Gambar 2.10 Bobot Semua Sisi Pada Graf $2S_2$ Berdasarkan Pelabelan pada Gambar 2.9

Bobot semua titik pada graf $2S_2$ berdasarkan pelabelan pada Gambar 2.10 diberikan pada Gambar 2.12



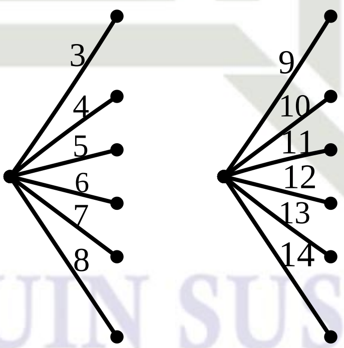
Gambar 2.11 Bobot Semua Titik Pada Graf $2S_2$ Berdasarkan Pelabelan pada Gambar 2.9

Pada gambar dibawah ini, diberikan ilustrasi pelabelan pada kasus 2, yaitu untuk $n = 6$

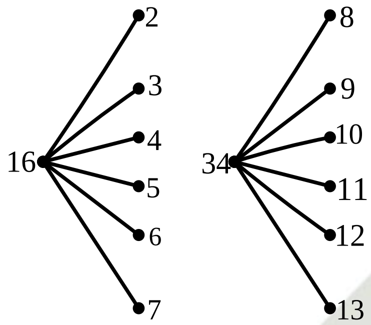


Gambar 2.12 Suatu Pelabelan-6 Total Tak Teratur Total untuk Graf $2S_6$

Bobot untuk semua sisi pada graf $2S_{6,}$ berdasarkan pada Gambar 2.13. sedangkan bobot untuk semua titik pada graf $2S_6$ berdasarkan pada Gambar 2.14.



Gambar 2.13 Bobot Semua Sisi Pada Graf $2S_6$ Berdasarkan Pelabelan pada Gambar 2.12



Gambar 2.14 Bobot Semua Titik Pada Graf $2S_6$ Berdasarkan Pelabelan pada Gambar 2.12

2.4. Induksi Matematika

Induksi matematika adalah metode pembuktian untuk pernyataan perihal bilangan bulat. Induksi matematika merupakan teknik pembuktian yang baku didalam matematika. Melalui induksi matematika kita dapat mengurangi langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk kedalam suatu himpunan kebenaran dengan hanya sejumlah langkah terbatas, didalam induksi matematika berisi prinsip-prinsip induksi matematika, induksi sederhana, perampatan, dan induksi secara umum. (Munir, R. 2005)

1. Prinsip Induksi

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi perihal bilangan bulat positif dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n. Untuk membuktikan proporsi ini kita hanya perlu menunjukkan bahwa :

a. $p(1)$ benar, dan
b. jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq 1$. sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Langkah 1 dinamakan **basis induksi**, sedangkan langkah 2 dinamakan **langkah induks.** Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan $p(n)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan **hipotesis induksi.** Bila kita sudah menunjukkan kedua langkah tersebut benar maka kita sudah membuktikan bawa $p(n)$ benar untuk semua bilangan positif n.

Basis induksi digunakan untuk memperlihatkan bahwa pernyataan tersebut benar bila n diganti dengan 1, yang merupakan bilangan bulat positif terkecil. Kemudian kita harus memperlihatkan bahwa implikasi $p(n) \rightarrow p(n+1)$ benar untuk setiap bilangan bulat positif. Untuk membuktikan implikasi tersebut benar untuk setiap bilangan bulat positif n, kita perlu menunjukkan bahwa $p(n+1)$ tidak mungkin salah bila $p(n)$ benar.

2. Induksi yang Dirampatkan

Kadang-kadang kita ingin membuktikan bahwa pernyataan $p(n)$ benar untuk semua bilangan $\geq n_0$ jadi tidak hanya bilangan bulat yang dimulai dari 1 saja.

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

a. $p(n_0)$ benar, dan
b. jika $p(n)$ benar maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq n_0$. sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.

3. Induksi Kuat

Misalkan $p(n)$ adalah pernyataan perihal bilangan bulat dan kita ingin membuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$. Untuk membuktikan ini, kita hanya perlu menunjukkan bahwa:

a. $p(n_0)$ benar, dan
b. jika $p(n_0), p(n_0+1), \ldots, p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk setiap $n \geq n_0$. Sehingg $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat $n \geq n_0$.

4. Induksi Secara Umum

Bentuk umum metode induksi dapat diterapkan tidak hanya untuk pembuktian proposisi yang menyangkut himpunan bilangan bulat positif, tetapi juga pembuktian yang menyangkut himpunan obyek yang lebih umum. Syaratnya, obyek tersebut harus mempunyai keturunan dan mempunyai elemen terkecil.

Bentuk induksi secara umum dapat dituliskan sebagai berikut:

Misalkan X terurut dengan baik oleh "<", dan $p(x)$ adalah pernyataan perihal elemen x dari X. Kita ingin membuktikan bahwa $p(x)$ benar untuk semua $x \in X$, untuk membuktikan ini perlu ditunjukkan bahwa:

a. $p(x_0)$ benar, yang dalam hal ini x_0 adalah elemen terkecil di X, dan
b. jika $p(y)$ benar untuk $y < x$ maka $p(x)$ juga benar untuk setiap $x \geq x_0$ didalam X.

Sehingg $p(x)$ benar untuk semua bilangan bulat $x \in X$. (Munir, R. 2005)

Contoh :

Untuk semua bilangan bulat tidak-negatif n, buktikan dengan induksi matematika bahwa:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Penyelesaian:

Misalkan $p(n)$ adalah proposisi bahwa untuk semua bilangan bulat tidak-negatif n, $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

1. **Basis Induksi**: $p(0)$ benar karena untuk $n = 0$ (bilangan bulat tidak negatif pertama), kita peroleh:

$$\begin{aligned} 2^0 = 1 &= 2^{0+1} - 1 \\ &= 2^1 - 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. **Langkah Induksi** : Misalkan bahwa $p(n)$ benar,yaitu proporsi

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

diasumsikan benar (hipotesis induksi). Kita harus menunjukkan bahwa $p(n+1)$ juga benar, yaitu

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{(n+1)+1} - 1$$

Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} \\
&= (2^{n+1} + 2^{n+1}) - 1 \\
&= (2.2^{n+1}) - 1 \\
&= 2^{n+2} - 1 \\
&= 2^{(n+1)+1} - 1
\end{aligned}
$$

Karena langkah 1 dan 2 keduanya telah diperlihatkan benar, maka untuk semua bilangan bulat tidak-negatif n, terbukti bahwa $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Jenis penelitian yang penulis gunakan adalah studi pustaka (*literature*) dengan mempelajari buku-buku, menggunakan referensi dari sumber-sumber yang berhubungan dengan pembahasan ini, jurnal serta artikel yang berhubungan dengan penelitian ini. Oleh karena itu, dilakukan beberapa tahapan untuk menentukan nilai total ketakteraturan total dari empat copy graf bintang sebagai berikut :

1. Misalkan $4S_n$ adalah empat *copy* graf bintang dengan n bilangan bulat positif dan $n \geq 3$.
2. Menentukan batas bawah $tvs(4S_n)$ yang akan dibuktikan menggunakan induksi matematika.
3. Menentukan batas bawah $tes\ (4S_n)$ menggunakan Teorema 2.1.
4. Setelah mendapatkan langkah 1 dan 2, kemudian tentukan batas bawah dari $ts\ (4S_n)$ dengan menggunakan Teorema 2.5 dan akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika.
5. Menentukan pelabelan total tak teratur total pada empat *copy* graf bintang $4S_n$ untuk $n = 3,4,5, \dots ,10$, dengan label terbesarnya adalah batas bawah yang diperoleh dari langkah 3.
6. Menentukan rumus untuk label titik dari $4S_n$ dengan mengacu pada pola pelabelan yang terdapat pada langkah 4.
7. Menentukan rumus untuk label sisi dari $4S_n$ dengan mengacu pada pola pelabelan yang terdapat pada langkah 4
8. Berdasarkan langkah yang didapat pada langkah 5 dan 6, dapat ditentukan rumus untuk bobot titik dari $4S_n$
9. Kemudian berdasarkan langkah yang didapat pada langkah 5 dan 6, dapat ditentukan rumus untuk bobot sisi dari $4S_n$
10. Membuktikan pelabelan yang diperoleh merupakan pelabelan total tak teratur total pada empat *copy* graf bintang $4S_n$ untuk $n \geq 3$, dengan membuktikan

bahwa tidak ada titik yang memiliki bobot yang sama dan tidak ada sisi yang memiliki bobot yang sama.

11. Mengaplikasikan rumus $ts\ (4S_n)$ yang telah diperoleh untuk $n\ = 14$

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian dari Bab IV tentang nilai ketakteraturan total dari empat *copy* graf bintang dapat disimpulkan bahwa $ts(4S_n) = 2n + 1$ untuk $n \geq 3$. Hal ini dibuktikan dengan $ts(4S_n) \leq 2n + 1$ dan $ts(4S_n) \geq 2n + 1$. Untuk $ts(4S_n) \leq 2n + 1$ dibuktikan dengan cara menunjukkan adanya pelabelan $ts(4S_n) \leq 2n + 1$ total tak teratur total pada graf $4S_n$. Adapun rumus pelabelan sisi dan pelabelan titik pada graf $4S_n$ sebagai berikut:

1. Rumus pelabelan titik pada graf $4S_n$ untuk $n = 3,4$.

$$f(t_j) = \left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil \text{untuk } j = 1,2,3,4n;$$

$$f(u_i) \begin{cases} 5 \text{ untuk } i = 1 \text{ dan } n = 3 \\ 3 \text{ untuk } i = 2 \text{ dan } n = 3 \\ 4 \text{ untuk } i = 3, 4 \text{ dan } n = 3 \\ 2 \text{ untuk } i = 1,2 \text{ dan } n = 4 \\ 3 \text{ untuk } i = 3 \text{ dan } n = 4 \\ 1 \text{ untuk } i = 4 \text{ dan } n = 4 \end{cases}$$

2. Rumus pelabelan sisi pada graf $4S_n$ untuk $n = 3,4$.

$$f(u_i t_j) = \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor + 1 \text{ untuk } \quad i = 1\ dan\ j \equiv 1\ (mod\ 4) \text{ atau } i = 2\ dan\ j \equiv 2\ (mod\ 4) \text{ atau } i = 3\ dan\ j \equiv 3\ (mod\ 4) \text{ atau } i = 4\ dan\ j \equiv 0\ (mod\ 4).$$

3. Rumus pelabelan titik pada graf $4S_n$ untuk $n \geq 5$

$$f(t_j) = \left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil \text{untuk } j = 1,2,3,4n;$$

$$f(u_i) = \begin{cases} 1\ untuk\ i = 1,2 \\ 2\ untuk\ i = 3 \\ 4 \text{ untuk } i = 4 \end{cases}$$

4. Rumus pelabelan sisi pada graf $4S_n$ untuk $n \geq 5$

$f(u_i t_j) = \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor + 1$ untuk $i = 1\ dan\ j \equiv 1\ (mod\ 4)$ atau $i = 2\ dan\ j \equiv 2\ (mod\ 4)$ atau $i = 3\ dan\ j \equiv 3\ (mod\ 4)$ atau $i = 4\ dan\ j \equiv 0\ (mod\ 4)$

5.2 Saran

Berdasarkan Tugas Akhir ini penulis membahas tentang nilai ketakteraturan total dari empat *copy* graf bintang $(4S_n)$, untuk $n = 3,4,5, \dots, 10$. Bagi pembaca yang berminat untuk meneruskan tugas akhir ini, penulis sarankan untuk melanjutkan pembahasan tentang nilai ketakteraturan total untuk jenis-jenis graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Amir, Zubaidah. "*Matematika Diskrit*". Halaman 1-4. Zanafa Publishing, Pekanbaru. 2010.

Bača, M., Jendrol J., Miller, M., dan Ryan, J. "On Irregular Total Labellings*". Discrete Math*. Vol. 307.Halaman 1378-1388. 2007.

Marzuki, C.C, Salman, A.N.M. & Miller, M., "On The Total Irregularity Strength of Cycles and Paths". *FJMS*. Vol. 82, halaman 1-21, 2013.

Munir, R. "*Matematika Diskrit*". Revisi Kelima. Bandung: Informatika. 2005.

Munir, R. "*Matematika Diskrit*". Edisi 3, Informatika, Bandung. 2009.

Purwanto. *"Teori Graf"*. Malang : IKIP MALANG. 1998.

Ramdani, R. "Nilai Total Ketakteraturan Total dari Dua Copy Graf Bintang". *J.Math. Fund. Sci*. Vol. 8, halaman 4, 2014.

Tilukay, Meilin I, dkk. "*One the Total Irregularity Strength of Fan, Wheel, Tringular Book, and Friendship Graph"* Procedia Computer Science 74 124-131. 2015.

Vasudev, C. "*Graph Theory with Application"*. New Age international Publisher, New Delhi. 2006.

Wallis W D. "*Magic Graphs*". Halaman 11. Birkhauser Boston, New York. 2001.

Wibisono, Samuel. "*Matematika Diskrit*". Edisi 2, halaman 127-129. Graha Ilmu, Yogyakarta. 2008.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Kotabaru, pada tanggal 15 Juli 1996, sebagai anak kedua dari tiga bersaudara pasangan Bapak Rahmad dan Ibu Ermawati, dengan dua saudara yaitu Kasrimanto dan Muhammad Iqbal. Penulis menyelesaikan Pendidikan Formal MI Nurul Huda Kotabaru Seberida pada tahun 2008, Sekolah Menengah Pertama Penulis selesaikan di SMPN 1 Keritang pada tahun 2011 dan menyelesaikan pendidikan Sekolah Menengah Atas dengan Jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA) di SMAN 1 Keritang pada tahun 2014.

Setelah menyelesaikan bangku SMA, pada tahun 2015 penulis melanjutkan Pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau dan lulus di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Jurusan Matematika. Pada tahun 2019 penulis melaksanakan Kerja Praktek di Badan Penyelenggara Jaminan Sosia (BPJS) Kesehatan dengan judul **"PENERAPAN LOGIKA FUZZY DALAM MENENTUKAN JUMLAH PESERTA BPJS KESEHATAN MENGGUNAKAN METODE SUGENO"** yang dibimbing oleh Ibu Rahmawati, M.Si dan diseminarkan pada 26 Juli 2019. Pada bulan Agustus-September 2018 penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kabupaten Indragiri Hilir, Kecamatan Tempuling desa Mumpa.