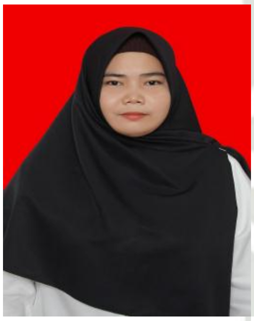
TRACE MATRIKS TOEPLITZ-HESSENBERG KUADRAT

TUGAS AKHIR

Diajukan Sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

Oleh :



MASTIANA SIREGAR
11454206159

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2020

LEMBAR PERSETUJUAN

TRACE MATRIKS TOEPLITZ-HESSENBERG KUADRAT

TUGAS AKHIR

Oleh:

MASTIANA SIREGAR
11454206159

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 08 Mei 2020

Ketua Program Studi	**Pembimbing**
Ari Pani Desvina, M.Sc.	**Rahmawati, S.Si, M.Sc.**
NIP. 19811225 200604 2 003	**NIK. 130517046**

LEMBAR PENGESAHAN

TRACE MATRIKS TOEPLITZ-HESSENBERG KUADRAT

TUGAS AKHIR

Oleh:

MASTIANA SIREGAR
11454206159

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 08 Mei 2020

Pekanbaru, 08 Mei 2020
Mengesahkan,

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag.	**Ari Pani Desvina, M.Sc.**
NIP. 19660604 199203 1 004	**NIP. 19811225 200604 2 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua :**Sri Basriati, M.Sc.**

Sekretaris : **Rahmawati, S.Si, M.Sc.**

Anggota I : **Fitri Aryani, M.Sc.**

Anggota II :**Mohammad Soleh, M.Sc.**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta ada pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan atas izin penulis dan harus dilakukan mengikut kaedah dan kebiasaan ilmiah serta menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin tertulis dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam pada form peminjaman.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan di dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 08 Mei 2020

Yang membuat pernyataan,

MASTIANA SIREGAR
11454206159

LEMBAR PERSEMBAHAN

Tiada tempat yang pantas mengadu kecuali pada-Mu,
Tiada tempat yang layak untuk meminta kecuali pada-Mu,
Kini kubersyukur ya Allah atas kelulusan yang kau berikan padaku.
Untuk Rasulullah Shallallahu „alaihi wasallam terima kasih atas tauladan mu

*« **Motivasi Menuntut Ilmu** «*

"Harta Yang Tak Pernah Habis Adalah Ilmu Pengetahuan dan Ilmu Yang Tak Ternilai Adalah Pendidikan"

*« **Motivasi hidup** «*

"Badai pasti akan berlalu, jadi bersabarlah dan berusaha
karena usaha tidak akan mgkhianati hasil"
(Mastiana Siregar)

Karya kecilku ini ku persembahkan untuk ;

Ibuku Masrona Harahap dan Ayahku Pandan Siregar

Teruntuk ibuku tersayang, terimakasih tak terhingga karena telah menyayangi dan mendidik diri ini yang penuh kekurangan. Dan untuk ayahku, terimakasih atas kerja keras ayah diri ini menjadi kepribadian yang lebih baik. Terimakasih telah mendo"akanku di setiap sujudmu tanpa mengenal lelah.

Untuk pembimbingku (Rahmawati, S.Si, M.Sc)

Terimakasih untuk segala rasa sabar, ikhlas dalam membimbing diri ini yang masih sering lalai dan banyak kekurangan. Terimakasih telah memberikan masukan dan motivasi untuk penyelesaian tugas akhir ini.

***Untuk Semua dosen Program Studi Matematika FST** ;*

Terimakasih untuk semua ilmu-ilmu yang diajarkan selama saya masih duduk di bangku kuliah dan nasehat serta motivasinya.

TRACE MATRIKS TOEPLITZ-HESSENBERG KUADRAT

MASTIANA SIREGAR
11454206159

Tanggal Sidang : 08 Mei 2020
Periode Wisuda : 2020

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bentuk umum dan *trace* dari suatu matriks Toeplitz-Hessenberg kuadrat dengan menggunakan pembuktian langsung. Langkah dimulai dengan menentukan nilai setiap entri-entri matriks Toeplitz-Hessenber kuadrat dengan cara mengalikan matriks Toeplitz-Hessenberg $H_n \times H_n$. Selanjutnya, entri-entri pada diagonal utama matriks Toeplitz-Hessenber kuadrat tersebut dijumlahkan untuk mendapatkan bentuk umum *Trace* matriks Toeplitz-Hessenberg kuadrat. Hasil akhir penelitain ini diperoleh bentuk umum dan *trace* dari suatu matriks Toeplitz-Hessenberg kuadrat.

Kata kunci: Matriks Toeplitz-Hessenberg, pembuktian langsung. *trace*

TRACE MATRIX TOEPLITZ-HESSENBERG SQUARE

MASTIANA SIREGAR
11454206159

Date of Final Exam : 08 May 2020
Date of Graduation : 2020

Mathematics Study Program
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

This study aims to determine the general form and trace of a Toeplitz-Hessenberg squared matrix by using direct proof. The step starts with determining the value of each Toeplitz-Hessenber squared matrix entries by multiplying the Toeplitz-Hessenberg matrix $H_n \times H_n$. Next, the entries in the main diagonal of the square Toeplitz-Hessenber matrix are summed to get the general form of the Trace Toeplitz-Hessenberg squared matrix. The final results of this study obtained the general form and trace from a Toeplitz-Hessenberg squared matrix.

Keywords: *Matrix Toeplitz-Hessenberg, direct proof, trace*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah Swt, yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua, sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini dengan judul **"*Trace* Matriks Toeplitz-Hessenberg Kuadrat".** Shalawat beriring salam penulis hadiahkan untuk insan terpilih kekasih Allah Swt yakni Nabi Muhammad Saw, yang membawa umatnya dari alam kegelapan menuju alam yang penuh dengan ilmu pengetahuan. Dalam penyusunan dan penyelesaian Tugas Akhir ini, penulis banyak sekali mendapat ilmu, bimbingan, bantuan, motivasi, perhatian serta semangat dari berbagai pihak, terutama kedua orang tua saya tercinta Bapak Pandan Siregar dan Masrona Harahap. Terimakasih atas do'a, pengorbanan, materi yang tidak henti-hentinya serta kasih sayang yang sangat tulus yang telah Bapak dan Ibu berikan kepada penulis. Selanjutnya, penulis mengucapkan terimakasih juga kepada :

1. Bapak Prof. Dr. KH. Ahmad Mujahidin, S.Ag., M.Ag., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, S.Si., M.Sc., selaku Ketua Sidang dan Pembimbing Akademis yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik.
4. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
5. Ibu Rahmawati, S.Si., M.Sc., selaku Pembimbing Tugas Akhir yang telah memberikan waktu, arahan, bimbingan, motivasi, ilmu serta penjelasan mengenai Tugas Akhir dari awal hingga selesai.
6. Ibu Fitri Aryani, M.Sc., selaku Penguji I dan Sekretaris Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik.

7. Bapak Mohammad Soleh, M.Sc., selaku Penguji II yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga Tugas Akhir ini dapat terselesaikan dengan baik.
8. Bapak/Ibu Dosen dan Staf Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
9. Terimakasih buat teman-teman sebimbingan Muhammad Abdul Hadi, Mudrikah Mufti Amini, Dimas, Rakhmad Hatami yang telah meluangkan waktunya untuk mengajariku dan memotivasi dalam menyelesaikan Tugas Akhir ini.
10. Terimakasih untuk Sahabat dan teman-temanku Repi Trisna Winti, Rysfan, Wita Wahyuni, Rina Putriani, Nela Aprianti, Nurjannah Sri Hartini, Putra Nanda, Padri, Juni Era dan Riani yang telah memberikan semangat dan motivasi.
11. Teman-teman seperjuangan KKN yang tak terlupakan Tri Suryani, Adenna, Maya, Nanda, Fauziah, Dewi Anggraini, Erliza Sensini, Paruhuman, Almizan, Rifki, Adriyan dan Fajri yang telah memberikan semangat.
12. Teman-teman seperjuangan Program Studi Matematika dan terkhusus untuk Matematika kelas C yang tidak bisa disebutkan namanya satu persatu, terimakasih atas kebersamaan yang diberikan selama ini sehingga mewarnai masa perkuliahanku. Semoga kebaikan yang telah mereka berikan kepada penulis menjadi amal kebaikan dan mendapat balasan yang setimpal dari Allah Swt. Aamiin.

Demi kesempurnaan Tugas Akhir ini, besar harapan penulis kepada pembaca untuk memberikan kritik dan saran yang sifatnya membangun agar Tugas Akhir ini dapat digunakan dan bermanfaat bagi penulis atau pun pihak-pihak yang memerlukan.

Pekanbaru, 08 Mei 2020

Mastiana Siregar

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ilmu matematika memiliki banyak kajian dasar, salah satunya adalah matriks. Menurut Anton dan Rorres (2004), matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks. Terdapat beberapa jenis matriks diantaranya adalah matriks Toeplitz, matriks Hessenberg, matriks Toeplitz-Hessenberg dan sebagainya. Menurut Gray (2005), sebuah matriks Toeplitz adalah matriks berukuran $n \times n$ dinotasikan sebagai $T_n = [t_{kj}; k, j = 0,1, \cdots, n-1]$, dengan $t_{kj} = t_{k-j}$ sebuah matriks dengan bentuk umum sebagai berikut:

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ t_{(n-1)} & t_{(n-1)} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

Menurut Slowik (2018), matriks Hessenberg (Matriks Hessenberg bawah) adalah matriks $H = [h_{ij}]$ yang memenuhi kondisi $h_{ij} = 0$ untuk $j - i > 1$. Matriks Hessenberg merupakan matriks bujur sangkar yang hampir menyerupai matriks segitiga. Perbedaannya adalah pada matriks segitiga (bawah) entri-entri di atas diagonal utamanya bernilai 0, sedangkan pada matriks Hessenberg, entri-entri diatas diagonal kedua (diatas diagonal utama) yang bernilai 0. Gabungan dari matriks Toeplitz dan Hessenberg disebut matriks Toeplitz-Hessenberg. Bentuk umum matriks Teoplitz-Hessenberg adalah sebagai berikut:

$$H_n = \begin{bmatrix} h_1 & h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & h_{n-6} & \cdots & h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \cdots & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \cdots & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \\ h_n & h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \cdots & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

dengan $h_0, h_k \neq 0$ untuk setiap $k > 0$. Hal ini dijelaskan oleh Merca (2013).

Salah satu pembahasan menarik dalam matriks adalah menenentukan *Trace* matriks. *Trace* matriks adalah jumlah elemen-elemen diagonal utama dari matriks bujur sangkar. *Trace* dari matriks sering dibahas pada beberapa bidang matematika, seperti teori bilangan dan sistem dinamik. Pembahasan *trace* matriks telah banyak dilakukan oleh peneliti-peneliti sebelumnya. Pahade dan Jha pada tahun 2015 yang membahas mengenai *trace* suatu matriks real yang berpangkat bilangan bulat positif berukuran 2×2, hasilnya berupa persamaan bentuk umum *trace* dari matriks tersebut,

untuk n genap, yaitu:

$$TrA^n = \sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)] \cdots \left[n-\left(r+(r-1)\right)\right] (\det(A))^r \, (tr(A))^{n-2r}$$

dan untuk n ganjil, yaitu:

$$TrA^n = \sum_{r=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)] \cdots \left[n-\left(r+(r-1)\right)\right] (\det(A))^r \, (tr(A))^{n-2r}$$

Tahun 2017, Pahade dan Jha telah melakukan penelitian mengenai *trace* dari suatu matriks ketetanggaan yang berpangkat bilangan bulat positif, dengan hasil yang diperoleh dari *trace* matriks ketetanggaan sebagai berikut: untuk k bilangan genap yaitu:

$$TrA^k = \sum_{r=1}^{n/2} s(k,r)\, n(n-1)^r (n-2)^{k-2r}$$

dan untuk k bilangan ganjil

$$TrA^k = \sum_{r=1}^{n-1/2} s(k,r)\, n(n-1)^r (n-2)^{k-2r}$$

dengan $S(k,r)$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$S(k,r) = 1, S\left(k, k/2\right) = 1, S\left(k, k - 1/2\right) = \frac{k-1}{2}$$

$$S(k,r) = S(k-1,r) + S(k-2,r-1) = 1$$

Tahun 2018, Aryani dkk telah melakukan penelitian mengenai *trace* matriks Toeplitz Kompleks khusus ukuran 3×3 berpangkat bilangan bulat positif, dengan bentuk matriks sebagai berikut:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a+bi & 0 \\ a+bi & 0 & a+bi \\ 0 & a+bi & 0 \end{bmatrix}; \ \forall\, a, b, \in R \text{ dan } i = \text{imajiner}$$

Hasil yang diperoleh yaitu untuk n genap;

$$tr(A_3)^2 = (2)^{\frac{n}{2}+1} \cdot (a+bi)^n$$

dan untuk n ganjil

$$tr(A_3)^2 = 0.$$

Pada tahun 2019, Aryani dan Husna melakukan penelitian tentang *trace* matriks Toeplitz Tridiagonal 3×3 berpangkat bilangan bulat positif dengan entri-entrinya bilangan real, dengan bentuk matriks sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{bmatrix} \text{ dengan } b, c \neq 0; \ \forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$$

Hasil yang diperoleh yaitu untuk n genap;

$$tr(A_3)^n = 3a^n + 4\sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r$$

dan untuk n ganjil

$$tr(A_3)^n = 3a^n + 4\sum_{r=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2r} 2^{r-1} a^{n-2r} b^r c^r.$$

Berdasarkan hasil penelitian-penelitian diatas, penulis tertarik untuk menyelesaikan rumus bentuk umum dari *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg bilangan bulat positif dengan matriks Toeplitz-Hessenberg yang sama seperti Persamaan (1.1), sehingga pada tugas akhir ini penulis memberi judul **”*Trace* Matriks Toeplitz-Hessenberg kuadrat ”**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, perumusan masalah dalam tugas akhir ini yaitu: “Bagaimana bentuk umum *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg kuadrat ordo $n \times n$?”.

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah, maka harus dilakukan batasan masalah agar tujuan dari penelitian ini dapat dicapai dengan baik dan tepat. Permasalahan pada penelitian ini dibatasi pada hal-hal sebagai berikut:

1. Matriks yang digunakan dalam penelitian ini adalah matriks Toeplitz-Hessenberg pada Persamaan (1.1) berordo $n \times n$, dengan $n \geq 2$
2. Perpangkatan matriks hanya untuk $(H_n)^2$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian tugas akhir ini adalah mendapatkan bentuk umum *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg kuadrat ordo $n \times n$.

1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian yang telah dikemukakan di atas, maka manfaat yang dapat diambil adalah sebagai berikut:

1. Penulis mengharapkan dapat mengembangkan wawasan keilmuan dalam matematika mengenai bentuk umum *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg kuadrat ordo $n \times n$.
2. Penulis dapat mengetahui lebih banyak tentang materi *trace* matriks yang tentunya akan sangat memberikan konstribusi untuk mempermudah dalam menyelesaikan soal-soal yang berhubungan dengan bentuk umum *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg kuadrat ordo $n \times n$.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam Tugas Akhir ini mencakup lima bab, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisikan latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisi teori-teori pendukung yang berkaitan dengan *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg kuadrat ordo $n \times n$.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisikan langkah-langkah atau prosedur dalam menentukan bentuk umum *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg kuadrat.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini berisikan penjelasan bagaimana mendapatkan bentuk umum *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg kuadrat.

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini berisikan kesimpulan dari hasil dan pembahasan yang telah dilakukan pada Bab IV dan saran dari penulis

BAB II
LANDASAN TEORI

Bab ini berisikan tentang materi atau teori-teori yang diperlukan untuk menyelesaikan bentuk umum *trace* matriks Teoplitz-Hessenberg kuadrat. Adapun teori pendukungnya sebagai berikut :

2.1 Matriks dan Jenis-Jenis Matriks

Definisi 2.1 (Anton dan Rorres, 2004) Suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks.

Simbol dari suatu matriks menggunakan huruf kapital, sedangkan untuk menyatakan entri-entri yang berada didalam suatu matriks menggunakan huruf kecil. Entri yang terletak pada baris i dan kolom j dalam matriks A akan dinyatakan sebagai $[a_{ij}]$. Matriks dengan m baris dan n kolom disebut matriks $m \times n$. Matriks dengan jumlah baris dan kolom yang sama disebut matriks bujur sangkar. Misalkan m dan n adalah bilangan bulat positif, matriks $m \times n$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan

a_{ij} : Entri matriks baris ke-i kolom ke-j

i : $1,2,3,\cdots,m$, indeks baris

j : $1,2,3,\cdots,n$, indeks kolom

Matriks diatas juga dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$A_{m\times n} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

Terdapat beberapa jenis matriks diantaranya adalah matriks segitiga atas, matriks segitiga bawah, matriks Toeplitz, matriks Hessenberg, matriks Toeplitz-

Hessenberg dan sebagainya. Berikut adalah matriks yang mendukung dalam penulisan tugas akhir ini:

1. Matriks Segitiga

Matriks segitiga terbagi menjadi 2 jenis antara lain:

a. Matriks Segitiga Atas (*upper triangular*)

Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar yang semua entri dibawah diagonal utama bernilai nol.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.1 Diberikan matriks segitiga atas A ordo 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

b. Matriks Segitiga Bawah (*lower triangular*)

Matriks segitiga bawah adalah matriks bujur sangkar yang semua entri di atas diagonal utama bernilai nol.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.2 Diberikan matriks segitiga bawah A ordo 4×4 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & 6 & 0 \\ 7 & 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

2. Matriks Toeplitz

Definisi 2.2 (Gray, 2005) Sebuah matriks Toeplitz adalah matriks berukuran $n \times n$ dinotasikan sebagai $T_n = [t_{kj}; k, j = 0,1, \cdots, n-1]$, dengan $t_{kj} = t_{k-j}$ sebuah matriks dengan bentuk sebagai berikut:

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ t_{(n-1)} & t_{(n-1)} & \cdots & t_1 & t_0 \end{bmatrix}$$

Contoh 2.3 Diberikan matriks Toeplitz berorde 4×4 adalah sebagai berikut:

$$T_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Matriks Hessenberg

Matriks Hessenberg (matriks Hessenberg bawah) merupakan matriks bujur sangkar yang hampir menyerupai matriks segitiga. Perbedaannya adalah pada matriks segitiga (bawah) entri-entri diatas diagonal utamanya bernilai 0, sedangkan pada matriks Hessenberg, entri-entri diatas diagonal kedua (diatas diagonal utama) yang bernilai 0.

Definisi 2.3 (Kaygisiz dan Sahin, 2013) Sebuah matriks berukuran $n \times n$, $H_n = [h_{ij}]$ disebut matriks Hessenberg bawah jika $h_{ij} = 0$ untuk $j - i > 1$, yaitu:

$$H_{n\times n} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \cdots & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n-1,1} & h_{n-1,2} & h_{n-1,2} & \cdots & h_{n-1,n} \\ h_{n,1} & h_{n,2} & h_{n,2} & \cdots & h_{n,n} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.4 Diberikan matriks Hessenberg bawah ordo 4×4 sebagai berikut:

$$H_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 0 \\ 3 & 9 & 7 & 4 \\ 4 & 3 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Gabungan dari matriks Toeplitz dengan matriks Hessenberg disebut matriks Toeplitz-Hessenberg yang didefinisikan pada definisi berikut:

4. Matriks Toeplitz-Hessenberg

Definisi 2.4 (Merca, 2013) Matriks Toeplitz-Hessenberg mempunyai bentuk umum $n \times n$ sebagai berikut:

$$H_n = \begin{bmatrix} h_1 & h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & h_{n-6} & \cdots & h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \cdots & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \cdots & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \\ h_n & h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \cdots & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \end{bmatrix}$$

dengan $h_0, h_k \neq 0$ untuk setiap $k > 0$.

Contoh 2.5 Diberikan matriks Toeplitz-Hessenberg ordo 4×4 sebagai berikut:

$$H_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 \\ 7 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

2.2 Perpangkatan Matriks

Definisi 2.5 (Kariadinata, 2013) Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka pangkat bilangan bulat tak negatif dari A didefinisikan sebagai:

$$A^0 = I, \qquad A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n\,faktor} \quad (n > 0)$$

Akan tetapi, jika A dapat dibalik, maka kita mendefinisikan pangkat bilangan bulat negatif menjadi

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\cdots A^{-1}}_{n\,faktor} \quad (n > 0).$$

Contoh 2.6 Jika diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, tentukanlah matriks A^3!

Penyelesaian:

Kita ketahui bahwa $A^3 = A \times A \times A$, maka

$$A^3 = A \times A \times A$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 66 & 81 & 96 \\ 102 & 126 & 150 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 468 & 576 & 684 \\ 1062 & 1305 & 1548 \\ 1656 & 2034 & 2412 \end{bmatrix}$$

2.3 *Trace* Matriks

Definisi 2.6 (Anton dan Rorres, 2004) Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka *trace* dari A yang dinyatakan sebagai $tr(A)$, didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama A. *Trace* dari A tidak dapat didefinisikan jika A bukan matriks bujur sangkar.

Diberikan matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Maka *trace* dari matriks A adalah:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Contoh 2.7 Tentukanlah *trace* dari matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Dari matriks A diperoleh $a_{11} = 1$, $a_{22} = 2$, $a_{33} = 5$, sehingga

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{ii}$$
$$= a_{11} + a_{22} + a_{33}$$
$$= 1 + 2 + 5$$
$$= 8$$

2.4 *Trace* Matriks Berpangkat

Tahun 2017, pembahasan mengenai *trace* suatu matriks telah dibahas oleh Titik Fatonah dalam penelitiannya yang berjudul "*Trace Matriks Berbentuk Khusus* 2×2 *Berpangkat Bilangan Bulat Positif*". Penelitian tersebut membahas mengenai bentuk umum *trace* dari matriks 2×2 berpangkat bilangan positif dengan entri-entri matriksnya bilangan real. Berikut diberikan langkah-langkah pembentukan persamaannya:

1. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall\ a, b, \in R$

$$\det(A) = -ab \tag{2.1}$$

dan

$$tr(A) = 0 \tag{2.2}$$

2. Menentukan bentuk umum A^n dengan n ganjil dan n genap. Sebelum menentukan bentuk umum $tr(A^n)$ berpangkat bilangan bulat positif, maka diperlukan bentuk umum A^n berpangkat bilangan bulat positif sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

$$A^2 = A \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^2b \\ ab^2 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} a^2b^2 & 0 \\ 0 & a^2b^2 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

$$A^5 = A^4 \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^3b^2 \\ a^2b^3 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

$$A^6 = A^5 \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} a^3b^3 & 0 \\ 0 & a^3b^3 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

$$A^7 = A^6 \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^4b^3 \\ a^3b^4 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

$$A^8 = A^7 \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} a^4b^4 & 0 \\ 0 & a^4b^4 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

$$A^9 = A^8 \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^5b^4 \\ a^4b^5 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

$$A^{10} = A^9 \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} a^5b^5 & 0 \\ 0 & a^5b^5 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

$$A^{11} = A^{10} \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^6b^5 \\ a^5b^6 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

$$A^{12} = A^{11} \cdot A$$

$$= \begin{bmatrix} a^6b^6 & 0 \\ 0 & a^6b^6 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Dengan melihat Persamaan (2.1) sampai Persamaan (2.14) maka dapat diduga bentuk umum A^n yaitu:

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} & \text{,untuk } n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} & \text{,untuk } n \text{ genap} \end{cases} \tag{2.15}$$

3. Membuktikan bentuk umum $tr(A^n)$ dengan n ganjil dan n genap menggunakan induksi matematika.
4. Menentukan bentuk umum $tr(A^n)$ dengan n ganjil dan n genap. Dengan pembuktian langsung. Berdasarkan Persamaan (2.15) maka dapat dibentuk $tr(A^n)$ yaitu:

   i. Untuk n bilangan ganjil

$$tr(A^n) = tr\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}}a^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}}a^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

$$tr(A^n) = 0 \tag{2.16}$$

   ii. Untuk n bilangan genap, yaitu:

$$tr(A^n) = tr\begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$$

$$= a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} + a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}$$

$$= 2a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}$$

$$= 2(ab)^{\frac{n}{2}}$$

$$= 2-(-ab))^{\frac{n}{2}}$$

Sehingga diperoleh:

$$tr(A^n) = 2\left(-\det(A)\right)^{\frac{n}{2}} \tag{2.17}$$

$$= 2(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\det(A)\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Dari Persamaan (2.16) dan Persamaan (2.17) maka dapat ditulis:

$$tr(A^n) = \begin{cases} 0 & ,\text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 2(-1)^{\frac{n}{2}}\left(\det(A)\right)^{\frac{n}{2}} & ,\text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Diberikan matriks Toeplitz-Hessenberg pada Persamaan (1.1)
2. Mengalikan matriks $H_n \times H_n$ untuk mendapatkan matriks ${H_n}^2$.
3. Menentukan bentuk umum $tr(H_n)^2$ dengan menggunakan pembuktian langsung.
4. Mengaplikasikan bentuk umum matriks ${H_n}^2$ dan $tr(H_n)^2$ pada beberapa contoh soal.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan uraian dan pembahasan pada bab-bab sebelumnya dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut: Jika diketahui matriks Toeplitz-Hessenberg Kuadrat ordo $n \times n$, $n \geq 2$ yaitu:

$$H_n = \begin{bmatrix} h_1 & h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & h_{n-6} & \cdots & h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \cdots & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \cdots & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \\ h_n & h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \cdots & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \end{bmatrix}$$

Maka

$$
(H_n)^2 = \begin{bmatrix}
\sum_{r=1}^{2} h_r\, h_{2-r} & \sum_{r=0}^{1} h_r\, h_{1-r} & \sum_{r=0}^{0} h_r\, h_{0-r} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\sum_{r=1}^{3} h_r\, h_{3-r} & \sum_{r=0}^{2} h_r\, h_{2-r} & \sum_{r=0}^{1} h_r\, h_{1-r} & \sum_{r=0}^{0} h_r\, h_{0-r} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\sum_{r=1}^{4} h_r\, h_{4-r} & \sum_{r=0}^{3} h_r\, h_{3-r} & \sum_{r=0}^{2} h_r\, h_{2-r} & \sum_{r=0}^{1} h_r\, h_{1-r} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\sum_{r=1}^{5} h_r\, h_{5-r} & \sum_{r=0}^{4} h_r\, h_{4-r} & \sum_{r=0}^{3} h_r\, h_{3-r} & \sum_{r=0}^{2} h_r\, h_{2-r} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\sum_{r=1}^{n-2} h_r\, h_{n-2-r} & \sum_{r=0}^{n-3} h_r\, h_{n-3-r} & \sum_{r=0}^{n-4} h_r\, h_{n-4-r} & \sum_{r=0}^{n-5} h_r\, h_{n-5-r} & \cdots & \sum_{r=1}^{2} h_r\, h_{2-r} & \sum_{r=0}^{1} h_r\, h_{1-r} & \sum_{r=0}^{0} h_r\, h_{0-r} & 0 \\
\sum_{r=1}^{n-1} h_r\, h_{n-1-r} & \sum_{r=0}^{n-2} h_r\, h_{n-2-r} & \sum_{r=0}^{n-3} h_r\, h_{n-3-r} & \sum_{r=0}^{n-4} h_r\, h_{n-4-r} & \cdots & \sum_{r=1}^{3} h_r\, h_{3-r} & \sum_{r=0}^{2} h_r\, h_{2-r} & \sum_{r=0}^{1} h_r\, h_{1-r} & \sum_{r=0}^{0} h_r\, h_{0-r} \\
\sum_{r=1}^{n} h_r\, h_{n-r} & \sum_{r=0}^{n-1} h_r\, h_{n-1-r} & \sum_{r=0}^{n-2} h_r\, h_{n-2-r} & \sum_{r=0}^{n-3} h_r\, h_{n-3-r} & \cdots & \sum_{r=1}^{4} h_r\, h_{4-r} & \sum_{r=0}^{3} h_r\, h_{3-r} & \sum_{r=0}^{2} h_r\, h_{2-r} & \sum_{r=0}^{1} h_r\, h_{1-r} \\
\sum_{r=1}^{n+1} h_r\, h_{n+1-r} & \sum_{r=1}^{n} h_r\, h_{n-r} & \sum_{r=0}^{n-1} h_r\, h_{n-1-r} & \sum_{r=0}^{n-2} h_r\, h_{n-2-r} & \cdots & \sum_{r=1}^{5} h_r\, h_{5-r} & \sum_{r=0}^{4} h_r\, h_{4-r} & \sum_{r=0}^{3} h_r\, h_{3-r} & \sum_{r=0}^{2} h_r\, h_{2-r}
\end{bmatrix}
$$

dan

$$tr(H_n)^2 = nh_1^2 + (2n-2)h_0 h_2, n \geq 2$$

5.2 Saran

Dalam pembahasan yang telah dikemukakan, penulis hanya membahas tentang langkah-langkah dalam menentukan bentuk umum *trace* dari suatu matriks Toeplitz-Hessenberg kuadrat. Bagi pembaca yang tertarik dengan topik ini, dapat melanjutkan pembahasan tentang menentukan bentuk umum *trace* dari suatu matriks Toeplitz-Hessenberg dengan pangkat lebih besar dari dua serta penerapannya

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. dan Rorres, C. *“Dasar-Dasar Aljabar Linear Versi Aplikasi”*. Edisi 8. Erlangga, Jakarta, 2004.

Aryani, F. dan Husna N. “*Trace Matriks Toeplitz Tridiagonal* 3×3 *Berpangkat Bilangan Bulat Positif*”. Jurnal Sains Matematika dan Statistika, Vol. 5, No. 1, Januari 2019.

Aryani, F. dkk. “*Trace Matriks Toeplitz Kompleks Khusus Ukuran* 3×3 *Berpangkat Bilangan Bulat Positif*”. *SNTIKI*. Hal. 673-681, November 2018.

Fatonah, T. “*Trace Matriks yang Berbentuk Khusus 2 x 2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif*”. *Skripsi*. UIN Sultan Syarif Kasim Riau, 2017.

Fiedler, M dan Vavrin, Z. “ *Generalized Hessenberg Matrices*”. Linear Algebra and it’s Applications 380, Hal. 95-105, 2004.

Gray, Robert M. “*Toeplitz and Circulant Matrices*”. Communication and Information Theory, Vol. 2, No. 3, Hal. 155-239, 2006.

Kariadinata, R. “*Aljabar Matriks Elementer*” Pustaka Setia Bandung, 2013.

Kaygisiz, K dan Sahin, A. “*Determinants and Permanents of Hessenberg Matrices and Generalized Lucas Polynomials*”. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, Vol. 39, No. 6, Hal. 1065-1078, 2013.

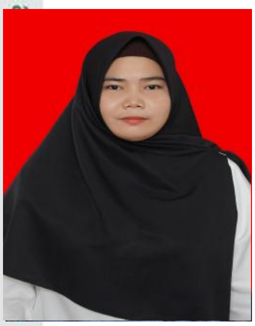
Merca, M. *“A Note on The Determinant of A Toeplitz-Hessenberg Matrix”,* Department of Mathematics, Hal. 10-16, 2013.

Pahade, J dan Jha, M. *“Trace of Positive Integer Power of Real* 2×2 *Matrices”*. Advances in Linear Algebra and Matrix Theory, Vol. 5, Hal. 150-155, 2015.

Pahade, J dan Jha, M. *“Trace of Positive Integer Power of Adjacency Matrix”*. Global Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 13, No. 6, Hal. 2079-2087, 2017.

Slowik, R. *“Inverses and Determinants of Toeplitz-Hessenberg Matrices”*. Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. 22, No. 4, Hal. 901-908, 2018.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis dilahirkan pada tanggal 05 Januari 1996 di Sigama Kabupaten Padang Lawas Utara. Anak ketujuh dari sebelas bersaudara, Pasangan Bapak Pandan Siregar dan Ibu Masrona Harahap. Penulis menyelesaikan pendidikan formal di Sekolah Dasar Negeri 104870 Sid Aek Sigama, pada Tahun 2008. Tahun 2011 penulis menyelesaikan Pendidikan Menengah Pertama di Madrasah Tsanawiyah Negeri Padang Bolak dan menyelesaikan Pendidikan Menengah Atas di Madrasah Aliyah Negeri Nagasaribu Tahun 2014 dengan jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA). Tahun 2014 penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Pekanbaru Riau di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Program Studi Matematika. Tahun 2018 tepatnya pada semester VIII penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) dari tanggal 27 Januari 2018 sampai dengan 25 Februari 2018 di Badan Pusat Statistik yang berlokasi di Jln. Lintas Gunung Tua-Padangsidimpuan Km. 4, Sigama , Kec. Padang Bolak, Kab. Padang Lawas Utara dengan judul "**Analisis Pengaruh Jumlah Wanita Dan Partisipasi Alat Kontrasepsi Terhadap Jumlah Penduduk Di Kabupaten Padang Lawas Utara**" yang dibimbing oleh Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si dan Bapak Akhmad Hasian Harahap, S.E dan diseminarkan pada tanggal 19 Juli 2018. Tahun 2017 penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kabupaten Rokan Hulu di Kecamatan Rambah Hilir, tepatnya di Desa Pasir Utama.

Tanggal 08 Mei 2020 penulis dinyatakan lulus dalam ujian sarjana dengan judul Tugas Akhir "***Trace* Matriks Toeplitz-Hessenberg Kuadrat**" di bawah bimbingan Ibu Rahmawati, S.Si., M.Sc.