TRACE MATRIKS TOEPLITZ-HESSENBERG BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF TIGA

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

Oleh:

MUDRIKAH MUFTI AMINI
11454105605

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2020

LEMBAR PERSETUJUAN

TRACE MATRIKS TOEPLITZ-HESSENBERG BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF TIGA

TUGAS AKHIR

Oleh:

MUDRIKAH MUFTI AMINI
11454105605

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 25 Juni 2020

Ketua Program Studi	Pembimbing
Ari Pani Desvina, M.Sc.	Rahmawati, S.Si., M.Sc.
NIP. 19811225 200604 2 003	NIK. 130517046

LEMBAR PENGESAHAN

TRACE MATRIKS TOEPLITZ-HESSENBERG BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF TIGA

TUGAS AKHIR

Oleh:

MUDRIKAH MUFTI AMINI
11454105605

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 25 Juni 2020

Pekanbaru, 25 Juni 2020
Mengesahkan,

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag.	**Ari Pani Desvina, M.Sc.**
NIP. 19660604 199203 1 004	**NIP. 19811225 200604 2 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua : **Dr. Yuslenita Muda, M.Sc.**

Sekretaris : **Rahmawati, S.Si., M.Sc.**

Anggota I : **Fitri Aryani, M.Sc.**

Anggota II : **Ade Novia Rahma, M.Mat.**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau serta terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh tugas akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam tugas akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan di dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 25 Juni 2020

Yang membuat pernyataan,

MUDRIKAH MUFTI AMINI

11454105605

LEMBAR PERSEMBAHAN

Alhamdulillah hirobbil a'lamiin.. ungkapan rasa syukur kepada Allah *Subhanahu wata'ala* atas nikmat dan karunia-Nya yang tidak pernah putus untuk semua ciptaan-Nya. Dan Sholawat beriringkan salam kepada Nabi Muhammad *Shallallahu'alaihi wasallam* dengan lafazh Allahhummasholli'ala sayyidina Muhammad wa'ala ali sayyidina Muhammad. Dengan perbanyak sholawat kepada-nya semoga kita mendapat syafaat dari-nya di hari kiamat kelak.

Aamiin

Berikutnya beberapa ungkapan untuk orang-orang tersayang, terhebat, dan segalanya dalam hidupku:

"Tak ada yang bisa ku perbuat. Hanya ucapan terimakasih yang hanya sanggup kuberikan. Terimakasih untuk setiap do'a, setiap ketulusan, setiap lelah yang kalian sembunyikan, keringat yang tak kalian perlihatkan, luka yang tak kalian hiraukan, dan airmata yang tak pernah aku ketahui.

Terimakasih Amak, Ayah. Terimakasih."

Allahummagfirlii waliwaalidayya warhamhumaa kamaa robbayaanii shogiiraa. Ampunkan lah dosa keduanya dan bahagiakanlah keduanya di dunia maupun di akhirat. *Aamiin ya robbal a'lamiin*

TRACE MATRIKS TOEPLITZ-HESSENBERG BERPANGKAT BILANGAN BULAT POSITIF TIGA

MUDRIKAH MUFTI AMINI
11454105605

Tanggal Sidang : 25 Juni 2020
Periode Wisuda :

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Penelitian ini membahas tentang *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat positif tiga. Terdapat dua langkah dalam menentukan bentuk umum *trace* matriks tersebut. Pertama, menentukan entri-entri diagonal utama pada matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat positif tiga yang dinotasikan sebagai H_n^3 dengan cara mengalikan $H_n^2 \cdot H_n$, dimana $H_n^2 = H_n \cdot H_n$. Selanjutnya, dengan menggunakan Definisi *trace* diperoleh hasil berupa bentuk umum *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat positif tiga yang dinotasikan sebagai $tr(H_n^3)$.

Kata kunci: *trace matriks, matriks Toeplitz-Hessenberg, pembuktian langsung.*

TRACE TOEPLITZ-HESSENBERG MATRIX POWER POSITIVE INTEGER OF THREE

MUDRIKAH MUFTI AMINI
11454105605

Date of Final Exam : 25th June 2020
Date of Graduation :

Mathematics Department
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

The study was discussing about trace Toeplitz-Hessenberg matrix power positive integer of three. There are two steps to determine the general form trace of the matrix. First, determining major diagonal entries of Toeplitz-Hessenberg matrix power positive integer of three denoted as H_n^3 by calculating $H_n^2 \cdot H_n$, where $H_n^2 = H_n \cdot H_n$. Next, by using a trace definition it was obtained the result of general trace the Toeplitz-Hessenberg matrix power positive integer of three denoted as $tr(H_n^3)$.

Keywords: *trace matrix, Toeplitz-Hessenberg matrix, direct proof*

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin

Puji syukur kepada Allah *Subhanahu wata'ala* yang senantiasa melimpahkan rahmat, karunia, dan petunjuk-Nya sehingga penulis bisa menyelesaikan tugas akhir ini. Shalawat beriringan salam kepada Nabi Muhammad *Shallallahu'alaihi wasallam* yang telah membawa kita dari zaman yang tidak berpengetahuan sampai zaman yang memiliki kemajuan ilmu dan teknologi yang kita rasakan pada saat ini.

Penelitian tugas akhir ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat dalam memperoleh gelar sarjana sains dan teknologi pada program studi matematika. Dalam penyusunan dan penyelesaian penelitian tugas akhir ini, penulis banyak sekali mendapat bimbingan, bantuan, arahan, nasehat, petunjuk, perhatian serta semangat dari berbagai pihak terutama orang tua tercinta Ayahanda Aminullah Amani dan Ibunda Nurida yang tidak pernah lelah dan tiada henti melimpahkan kasih sayang, perhatian, motivasi yang membuat penulis mampu untuk terus dan terus melangkah, pelajaran hidup, juga materi yang tak mungkin bisa terbalas. Jasa-jasamu kan selalu kukenang hingga akhir hayatku dan semoga Allah menjadikan jasa-jasamu sebagai amalan soleh, Aamiin. Kemudian penulis juga mengucapkan terima kasih yang tak terhingga kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Ahmad Mujahidin, S.Ag., M.Ag., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika.
4. Ibu Rahmawati, S.Si., M.Sc., selaku Pembimbing Tugas Akhir yang telah memberi bimbingan, pengarahan serta ilmunya.
5. Ibu Dr. Yuslenita Muda, M.Sc., selaku Ketua Sidang yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga selesainya tugas akhir ini.

6. Ibu Fitri Aryani, M.Sc., selaku Sekretaris Program Studi Matematika, Pembimbing Akademik dan Penguji I yang telah memberikan bimbingan, kritikan, saran, serta ilmunya.
7. Ibu Ade Novia Rahma, M.Mat., selaku Penguji II yang telah memberikan kritikan dan saran sehingga selesainya tugas akhir ini.
8. Seluruh Dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi yang telah banyak memberi nasehat, bimbingan, serta bantuan kepada penulis.
9. Keluarga tercinta, yang telah memberikan motivasi, dukungan, do'a, materi, dan kasih sayang yang sangat tulus kepada penulis.
10. Sahabat-sahabatku dari GG'14 yang terus memberikan dukungan dan doa selama ini.
11. Seluruh teman-teman seperjuangan Program Studi Matematika angkatan 2014 terkhusus lokal C.
12. Semua pihak yang telah banyak membantu baik secara langsung maupun tidak langsung dalam penyelesaian tugas akhir ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

semoga kebaikan yang telah mereka berikan kepada penulis menjadi amal kebaikan dan mendapat balasan yang setimpal dari Allah *Subhanahu wata'ala*. *Aamiin.*

Dalam penulisan ini penulis sadar bahwa penelitian tugas akhir ini belum sempurna. Namun, penulis sudah berusaha untuk mencapai hasil yang maksimal. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Akhir kata penulis harap semoga penelitian tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pihak-pihak yang memerlukan.

Pekanbaru, 25 Juni 2020

Mudrikah Mufti Amini

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar merupakan salah satu kajian yang dibahas dalam bidang matematika. Aljabar terdiri dari berbagai macam topik pembahasan, salah satunya adalah pembahasan mengenai matriks. Menurut Anton dan Rorres (2004), matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks. Berdasarkan entri-entri penyusunnya, terdapat berbagai macam jenis, diantaranya matriks diagonal, matriks identitas, matriks segitiga, matriks Toeplitz, matriks Hessenberg, matrik Toeplitz-Hessenberg, dan sebagainya. Menurut Merca (2013), matriks Toeplitz-Hessenberg adalah sebuah matriks $n \times n$ dengan bentuk umum sebagai berikut:

$$H_n = \begin{bmatrix} h_1 & h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \cdots & h_1 & h_0 & 0 \\ h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \cdots & h_2 & h_1 & h_0 \\ h_n & h_{n-1} & h_{n-2} & \cdots & h_3 & h_2 & h_1 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

dengan $h_0, h_k \neq 0$ untuk setiap $k > 0$.

Banyak hal yang dapat dihitung dari suatu matriks, seperti perkalian matriks, determinan matriks, invers matriks, *trace* matriks dan sebagainya. Menurut Anton dan Rorres (2004), *trace* matriks merupakan penjumlahan entri-entri pada diagonal utama dari matriks bujursangkar, namun *trace* dari suatu matriks tidak dapat didefinisikan apabila matriks tersebut bukan matriks bujursangkar. Perhitungan *trace* matriks terlihat sederhana pada matriks berpangkat satu, namun jika matriks tersebut berpangkat lebih besar dari satu maka perhitungan *trace* matriks akan lebih rumit, ditambah lagi jika matriks tersebut memiliki ordo yang besar. Untuk dapat menentukan *trace* dari matriks berpangkat, perlu dilakukan perpangkatan matriks terlebih dahulu yang melibatkan proses perkalian matriks. Sehingga untuk mempermudah mendapatkan *trace* dari suatu matriks berpangkat besar tanpa harus menghitung perpangkatan matriks, banyak peneliti yang meneliti tentang rumus umum untuk menentukan *trace* dari matriks berpangkat, diantaranya Pahade dan Jha pada tahun 2015 yang membahas mengenai *trace* suatu matriks real yang berpangkat bilangan bulat positif berukuran 2×2, hasilnya berupa persamaan bentuk umum *trace* dari matriks tersebut sebagai berikut yaitu untuk n genap

$$trA^n = \sum_{r=0}^{n/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}$$

dan untuk n ganjil

$$trA^n = \sum_{r=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r}$$

Selanjutnya pada penelitiannya yang lain, Pahade dan Jha pada tahun 2017 membahas mengenai *trace* dari suatu matriks ketetanggaan yang berpangkat bilangan bulat positif. Hasil yang diperoleh dari penelitian tersebut merupakan bentuk umum *trace* dari matriks ketetanggaan sebagai berikut yaitu untuk k genap

$$tr(A^k) = \sum_{r=1}^{n/2} s(k,r)n(n-1)^r (n-2)^{k-2r}$$

dan untuk k ganjil

$$tr(A^k) = \sum_{r=1}^{n-1/2} s(k,r)n(n-1)^r (n-2)^{k-2r}$$

dengan $S(k,r)$ yang didefinisikan sebagai berikut :

$$S(k,r) = 1, S(k,k/2) = 1, S(k,k-1/2) = \frac{k-1}{2},$$

$$S(k,r) = S(k-1,r) + S(k-2,r-1).$$

Pada tahun 2018, Aryani dan Yulianis juga telah meneliti tentang *trace* matriks berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif, dengan matriks bentuk khusus

$$A=\begin{bmatrix}0 & a\\ b & 0\end{bmatrix},\ \ \forall a,b\in R.$$

dari penelitian tersebut diperoleh bentuk umum *trace* dari matriks bentuk khusus tersebut yaitu :

$$tr(A^{-n})=\begin{cases}0 & \text{, untuk } n \text{ ganjil.}\\ \dfrac{2}{(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}}} & \text{, untuk } n \text{ genap.}\end{cases}$$

Selanjutnya pada tahun 2019, Aryani dan Husna juga telah meneliti tentang *trace* matriks Toeplitz tridiagonal 3×3 berpangkat bilangan bulat positif dengan bentuk matriks

$$A_3=\begin{bmatrix}a & b & 0\\ c & a & b\\ 0 & c & a\end{bmatrix}, \text{ dengan } b,c\neq 0;\ \forall a,b,c\in R.$$

hasil yang diperoleh dari penelitian tersebut yaitu :

$$tr(A_3)^n=\begin{cases}3a^n+4\displaystyle\sum_{r=1}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2r}2^{r-1}a^{n-2r}b^rc^r & \text{, untuk } n \text{ ganjil.}\\ 3a^n+4\displaystyle\sum_{r=1}^{\frac{n}{2}}\binom{n}{2r}2^{r-1}a^{n-2r}b^rc^r & \text{, untuk } n \text{ genap.}\end{cases}$$

Dari uraian latar belakang diatas dan penelitian-penelitian sebelumnya, maka penulis tertarik untuk meneliti tentang *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat positif tiga, sehingga pada tugas akhir ini penulis memberi judul: "***Trace* Matriks Toeplitz-Hessenberg Berpangkat Bilangan Bulat Positif Tiga**".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang diatas, maka rumusan masalah pada penelitian tugas akhir ini yaitu: "Bagaimana bentuk umum *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat positif tiga?".

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang diberikan pada penelitian tugas akhir ini yaitu matriks yang digunakan adalah matriks Toeplitz-Hessenberg pada Persamaan (1.1) ordo $n \times n$ dengan $n \geq 2$.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian tugas akhir ini adalah untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat positif tiga.

1.5 Manfaat penelitian

Adapun manfaat dari penelitian tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Menambah ilmu pengetahuan dalam bidang matematika, khususnya dalam menentukan *trace* dari matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat positif tiga.
2. Memberikan kontribusi penelitian dibidang matematika terutama dibidang aljabar mengenai *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat positif tiga.
3. Sebagai sarana informasi bagi pembaca dan sebagai bahan referensi bagi pihak yang membutuhkan.

1.6 Sistematika Penuliasan

Sistematika penulisan yang digunakan dalam penelitian tugas akhir ini mencakup lima bab, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini menguraikan latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan dari penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisi tentang hal-hal yang dijadikan sebagai dasar teori untuk pengembangan tulisan tugas akhir ini.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisi langkah-langkah yang digunakan untuk mendapatkan rumus umum *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat positif tiga.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini menjelaskan pengaplikasian teori-teori pada landasan teori dengan mengikuti metodologi penelitian sehingga diperoleh bentuk rumus umum *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat positif tiga.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisikan kesimpulan dari seluruh uraian dan saran-saran untuk pembaca.

BAB II
LANDASAN TEORI

Dalam landasan teori ini diberikan teori-teori pendukung yang digunakan dalam menyelesaikan tugas akhir ini yaitu tentang matriks dan jenis-jenis matriks, perkalian matriks, perpangkatan matriks, *trace* matriks, dan *trace* matriks berpangkat.

2.1 Matriks dan Jenis-Jenis Matriks

Pada subbab ini diuraikan pengertian matriks dan jenis-jenis matriks. Adapun pengertian dari suatu matriks dijelaskan dalam definisi berikut.

Definisi 2.1 (Anton dan Rorres, 2004) Suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks.

Matriks dengan m baris dan n kolom disebut matriks $m \times n$. Matriks dengan jumlah baris dan kolom yang sama disebut matriks bujursangkar. Misalkan m dan n adalah bilangan bulat positif, matriks $m \times n$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan:

a_{ij} : Entri matriks baris ke-*i* kolom ke-*j*

i : $1,2,3,\cdots,m$, indeks baris

j : $1,2,3,\cdots,n$, indeks kolom

Berdasarkan entri penyusunnya terdapat beberapa jenis matriks diantaranya:

1. Matriks Segitiga

Matriks segitiga adalah matriks bujursangkar yang entri di atas atau di bawah diagonal utamanya bernilai nol, matriks segitiga terbagi menjadi dua jenis yaitu matriks segitiga atas (*upper triangular*) dan matriks segitiga bawah (*lower* *triangular*). Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar yang semua entri di bawah diagonal utama bernilai nol.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.1 Diberikan matriks segitiga atas ordo 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

dan matriks segitiga bawah adalah matriks bujur sangkar yang semua entri di atas diagonal utama bernilai nol.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.2 Diberikan matriks segitiga bawah ordo 3×3 sebagai berikut:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

2. Matriks Toeplitz

Definisi 2.2 (Gray, 2006) Sebuah matriks Toeplitz adalah matriks berukuran $n \times n$ dinotasikan sebagai $T_n = [t_{kj}; k, j = 0, 1, \ldots, n-1]$, dengan $t_{kj} = t_{k-j}$, sebuah matriks dengan bentuk umum

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(n-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{(n-1)} & t_{(n-2)} & t_{(n-3)} & \cdots & t_0 \end{bmatrix}$$

Contoh 2.3 Diberikan matriks Toeplitz ordo 4×4 sebagai berikut:

$$T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Matriks Hessenberg

Matriks Hessenberg (Hessenberg bawah) merupakan matriks yang memiliki entri bernilai nol diatas diagonal kedua (diatas diagonal utama). Berikut diberikan definisi berkaitan dengan matriks Hessenberg.

Definisi 2.3 (Kaygisiz dan Sahin, 2013) Sebuah matriks berukuran $n\times n$, $H_n = [h_{ij}]$ disebut matriks Hessenberg bawah jika $h_{ij} = 0$ untuk $j - i > 1$, yaitu:

$$H_{n\times n} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ h_{n-1,1} & h_{n-1,2} & h_{n-1,3} & \cdots & h_{n-1,n-1} & h_{n-1,n} \\ h_{n,1} & h_{n,2} & h_{n,3} & \cdots & h_{n,n-1} & h_{n,n} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.4 Diberikan matriks Hessenberg bawah ordo 4×4 sebagai berikut :

$$H_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 7 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

4. Matriks Toeplitz-Hessenberg

Matriks Toeplitz-Hessenberg merupakan gabungan dari matriks Toeplitz dan matriks Hessenberg. Berikut diberikan definisi yang menjelaskan tentang matriks Toeplitz-Hessenberg.

Definisi 2.4 (Merca, 2013) Matriks Toeplitz-Hessenberg adalah sebuah matriks $n \times n$ dengan bentuk umum sebagai berikut :

$$H_n = \begin{bmatrix} h_1 & h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \cdots & h_1 & h_0 & 0 \\ h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \cdots & h_2 & h_1 & h_0 \\ h_n & h_{n-1} & h_{n-2} & \cdots & h_3 & h_2 & h_1 \end{bmatrix}$$

dengan $h_0, h_k \neq 0$ untuk setiap $k > 0$.

Contoh 2.5 Diberikan matriks Toeplitz-Hessenberg ordo 4×4 sebagai berikut :

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 7 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

2.2 Perkalian Matriks

Pembahasan mengenai perkalian matriks akan dijelaskan pada definisi berikut.

Definisi 2.5 (Anton dan Rorres, 2004) Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$, maka hasil kali (*product*) AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri pada baris i dan kolom j dari AB, pisahkanlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil kali yang diperoleh.

Contoh 2.6 :

Diberikan matriks A dan B sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukanlah matriks AB !

Penyelesaian :

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 13 \\ 14 & 13 \end{bmatrix}$$

2.3 Perpangkatan Matriks

Definisi 2.6 (Anton dan Rorres, 2004) Jika A adalah matriks bujursangkar, maka definisi dari pangkat bilangan bulat taknegatif dari A adalah

$$A^0 = I\,, \qquad A^n = \underbrace{AA\ldots A}_{n\ fakttor},\ \ (n > 0)\,.$$

Selanjutnya, jika A dapat dibalik, maka definisi dari pangkat bilangan bulat negatif dari A adalah

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\ldots A^{-1}}_{n\ faktor},\ \ (n > 0)$$

Contoh 2.7 :

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 1 \\ 9 & 6 & 4 \end{bmatrix}$, tentukanlah matriks A^3 !

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} A^3 &= A \times A \times A \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 1 \\ 9 & 6 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 1 \\ 9 & 6 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 1 \\ 9 & 6 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 67 & 38 & 41 \\ 57 & 28 & 38 \\ 108 & 57 & 67 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 1 \\ 9 & 6 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 865 & 465 & 537 \\ 738 & 397 & 465 \\ 1377 & 738 & 865 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.4 *Trace* Matriks

Definisi 2.7 (Anton dan Rorres, 2004) Jika A adalah sebuah matriks bujursangkar, maka *trace* dari A (*trace of* A), yang dinyatakan sebagai $tr(A)$, didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama A. *Trace* dari A tidak dapat didefinisikan jika A bukan matriks bujursangkar.

Contoh 2.8 :

Diberikan matriks $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 11\\ 0 & -3 & 2\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}$, hitunglah nilai *trace* dari matriks A!

Penyelesaian :

dari matriks A dapat diketahui $a_{11}=1$, $a_{22}=-3$, dan $a_{33}=0$.

$$\begin{aligned} tr(A) &= a_{11}+a_{22}+a_{33} \\ &= 1+(-3)+0 \\ &= -2 \end{aligned}$$

2.5 *Trace* Matriks Berpangkat

Pembahasan mengenai *trace* dari suatu matriks berpangkat telah dibahas oleh Pahade dan Jha dalam penelitian nya pada tahun 2015 yang membahas tentang *trace* dari matriks 2×2 berpangkat bilangan bulat positif dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Diberikan matriks $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, $\forall\, a,b,c,d \in R$.

   dapat diperoleh nilai *trace* dan determinan dari matriks A sebagai berikut:

   $$tr(A)=a+d \tag{2.1}$$

   dan

   $$\det(A)=ad-bc \tag{2.2}$$

2. Menentukan $tr(A^2)$ sampai $tr(A^8)$.

Berdasarkan Definisi 2.6, diperoleh matriks A^2 yaitu:

$$\begin{aligned} A^2 &= A \times A \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dengan menggunakan Persamaaan (2.1) dan Persamaan (2.2) dapat ditentukan $tr(A^2)$ yaitu:

$$\begin{aligned} tr(A^2) &= a^2 + 2bc + d^2 \\ &= (tr(A))^2 - 2\det(A) \end{aligned} \tag{2.3}$$

selanjutnya berdasarkan Definisi 2.6, diperoleh matriks A^3 yaitu:

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 A \\ &= \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^3 + abc + bc(a+d) & a^2 b + b^2 c + bd(a+d) \\ ac(a+d) + bc^2 + cd^2 & bc(a+d) + bcd + d^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dengan menggunakan Persamaaan (2.1) dan Persamaan (2.2) dapat ditentukan $tr(A^3)$ yaitu:

$$\begin{aligned} tr(A^3) &= a^3 + d^3 + 3bc(a+d) \\ &= (tr(A))^3 - 3(\det(A))(tr(A)) \end{aligned} \tag{2.4}$$

dengan mengganti A dengan A^2 pada Persamaan (2.3), maka dapat ditentukan $tr(A^4)$ yaitu:

$$\begin{aligned} tr(A^4) &= [tr(A^2)]^2 - 2\det(A^2) \\ &= (tr(A))^4 - 4\det(A)(tr(A))^2 + 2(\det(A))^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

selanjutnya berdasarkan Definisi 2.6, diperoleh matriks A^5 yaitu:

$$\begin{aligned} A^5 &= A^3A^2 \\ &= \begin{bmatrix} a^3+abc+bc(a+d) & a^2b+b^2c+bd(a+d) \\ ac(a+d)+bc^2+cd^2 & bc(a+d)+bcd+d^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dengan menggunakan Persamaaan (2.1) dan Persamaan (2.2) dapat ditentukan $tr(A^5)$ yaitu:

$$\begin{aligned} tr(A^5) &= (a^2+bc)[a^3+abc+bc(a+d)]+c(a+d)[a^2b+b^2c \\ &\quad +bd(a+d)]+b(a+d)[ac(a+d)+bc^2+cd^2] \\ &\quad +(bc+d^2)[bc(a+d)+bcd+d^3 \\ &= (tr(A))^5-5(\det(A))(tr(A))^3+5(\det(A))^2(tr(A)) \end{aligned} \tag{2.6}$$

dengan mengganti A dengan A^2 pada Persamaan (2.4), maka dapat ditentukan $tr(A^6)$ yaitu:

$$\begin{aligned} tr(A^6) &= [tr(A^2)]^3-3(\det(A^2))(tr(A^2)) \\ &= (tr(A))^6-6\det(A)(tr(A))^4+9(\det(A))^2(tr(A))^2-2(\det(A))^3 \end{aligned} \tag{2.7}$$

dengan mengganti A dengan A^2 pada Persamaan (2.5), maka dapat ditentukan $tr(A^8)$ yaitu:

$$\begin{aligned} tr(A^8) &= [tr(A^2)]^4-4\det(A^2)[tr(A^2)]^2+2[(\det(A))^2]^2 \\ &= (tr(A))^8-8(\det(A))(tr(A))^6+20(\det(A))^2(tr(A))^4 \\ &\quad -16(\det(A))^3(tr(A))^2+2(\det(A))^4 \end{aligned} \tag{2.8}$$

dengan melihat kembali Persamaan (2.3), Persamaan (2.5), Persamaan (2.7), dan Persamaan (2.8) maka dapat dibentuk menjadi:

$$tr(A^2) = \frac{(-1)^0}{0!}(\det(A))^0(tr(A))^{2-2\times 0}+\frac{(-1)^1}{1!}2(\det(A))^1(tr(A))^{2-2\times 1}$$

$$\begin{aligned} tr(A^4) &= \frac{(-1)^0}{0!}(\det(A))^0(tr(A))^{4-2\times 0}+\frac{(-1)^1}{1!}4(\det(A))^1(tr(A))^{4-2\times 1} \\ &\quad +\frac{(-1)^2}{2!}2(\det(A))^2(tr(A))^{4-2\times 2} \end{aligned}$$

$$tr(A^6)=\frac{(-1)^0}{0!}(\det(A))^0(tr(A))^{6-2\times 0}+\frac{(-1)^1}{1!}6(\det(A))^1(tr(A))^{6-2\times 1}$$
$$+\frac{(-1)^2}{2!}6(6-3)(\det(A))^2(tr(A))^{6-2\times 2}$$
$$+\frac{(-1)^3}{3!}6(6-4)(6-5)(\det(A))^3(tr(A))^{6-2\times 3}$$

$$tr(A^8)=\frac{(-1)^0}{0!}(\det(A))^0(tr(A))^{8-2\times 0}+\frac{(-1)^1}{1!}8(\det(A))^1(tr(A))^{8-2\times 1}$$
$$+\frac{(-1)^2}{2!}8(8-3)(\det(A))^2(tr(A))^{8-2\times 2}$$
$$+\frac{(-1)^3}{3!}8(8-4)(8-5)(\det(A))^3(tr(A))^{8-2\times 3}$$
$$+\frac{(-1)^4}{4!}8(8-5)(8-6)(8-7)(\det(A))^4(tr(A))^{8-2\times 4}$$

sehingga dapat dibentuk kedalam rumus umum $tr(A^n)$ untuk n genap yaitu:

$$tr(A^n)=\frac{(-1)^0}{0!}(\det(A))^0(tr(A))^{n-2\times 0}+\frac{(-1)^1}{1!}n(\det(A))^1(tr(A))^{n-2\times 1}$$
$$+\cdots+\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}n\left[n-\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]\left[n-\left(\frac{n}{2}+2\right)\right] \tag{2.9}$$
$$\cdots\left[n-\left(\frac{n}{2}+\left(\frac{n}{2}-1\right)\right)\right](\det(A))^{\frac{n}{2}}(tr(A))^{n-2\times\frac{n}{2}}$$

dengan menyederhanakan Persamaan (2.9) maka diperoleh:

$$trA^n=\sum_{r=0}^{n/2}\frac{(-1)^r}{r!}n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r(tr(A))^{n-2r} \tag{2.10}$$

Selanjutnya untuk n bilangan ganjil dengan melihat kembali Persamaan (2.4) dan Persamaan (2.6) maka dapat dibentuk menjadi:

$$tr(A^3)=\frac{(-1)^0}{0!}(\det(A))^0(tr(A))^{3-2\times 0}+\frac{(-1)^1}{1!}(\det(A))^1(tr(A))^{3-2\times 1}$$

$$tr(A^5) = \frac{(-1)^0}{0!}(\det(A))^0 (tr(A))^{5-2\times 0} + \frac{(-1)^1}{1!}5(\det(A))^1(tr(A))^{5-2\times 1} + \frac{(-1)^2}{2!}5(5-3)(\det(A))^2(tr(A))^{5-2\times 2}$$

sehingga dapat dibentuk kedalam rumus umum $tr(A^n)$ untuk n ganjil yaitu:

$$\begin{aligned} tr(A^n) &= \frac{(-1)^0}{0!}(\det(A))^0 (tr(A))^{n-2\times 0} + \frac{(-1)^1}{1!}n(\det(A))^1(tr(A))^{n-2\times 1} \\ &\quad + \cdots + \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} n\left[n-\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\right]\left[n-\left(\frac{n-1}{2}+2\right)\right] \\ &\quad \cdots\left[n-\left(\frac{n-1}{2}+\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\right)\right](\det(A))^{\frac{n-1}{2}}(tr(A))^{n-2\times\frac{n-1}{2}} \end{aligned} \tag{2.11}$$

dengan menyederhanakan Persamaan (2.11) maka diperoleh:

$$trA^n = \sum_{r=0}^{(n-1)/2} \frac{(-1)^r}{r!} n[n-(r+1)][n-(r+2)]\cdots[n-(r+(r-1))](\det(A))^r (tr(A))^{n-2r} \tag{2.12}$$

Berikut diberikan contoh berkaitan dengan Persamaan (2.10) dan Persamaan (2.12)

Contoh 2.9 :

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, tentukan nilai $tr(A^5)$ dan $tr(A^6)$!

Penyelesaian :

$$tr(A) = 2+3 = 5, \qquad \det(A) = 6-1 = 5$$

Maka berdasarkan Persamaan (2.12) nilai $tr(A^5)$:

$$\begin{aligned} tr(A^5) &= (tr(A))^5 - 5(\det(A))(tr(A))^3 + 5(\det(A))^2(tr(A)) \\ &= (5)^5 - 5(5)(5)^3 + 5(5)^2(5) \\ &= 625 \end{aligned}$$

maka berdasarkan Persamaan (2.10) nilai $tr(A^6)$:

$$\begin{aligned} tr(A^6) &= (tr(A))^6 - 6\det(A)(tr(A))^4 + 9(\det(A))^2(tr(A))^2 - 2(\det(A))^3 \\ &= (5)^6 - 6(5)(5)^4 + 9(5)^2(5)^2 - 2(5)^3 \\ &= 2250 \end{aligned}$$

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan pada penulisan tugas akhir ini adalah studi literatur dengan langkah-langkah yang digunakan sebagai berikut:

1. Diberikan matriks Toeplitz-Hessenberg pada Persamaan (1.1).
2. Menentukan bentuk umum diagonal utama dari matriks H_n^3 dengan cara mengalikan matriks $H_n^2 \cdot H_n$, dimana $H_n^2 = H_n \cdot H_n$.
3. Menentukan bentuk umum $tr(H_n^3)$ dengan menggunakan Definisi 2.7.
4. Mengaplikasikan bentuk umum $tr(H_n^3)$ pada beberapa contoh soal.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasakan uraian dan pembahasan pada bab-bab sebelumnya tentang bentuk umum *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat positif tiga diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

Jika diberikan H_n suatu matriks Toeplitz-Hessenberg pada Persamaan (1.1) dengan bentuk umum

$$H_n = \begin{bmatrix} h_1 & h_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & h_{n-6} & \cdots & h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & h_{n-5} & \cdots & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \\ h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & h_{n-4} & \cdots & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \\ h_n & h_{n-1} & h_{n-2} & h_{n-3} & \cdots & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 \end{bmatrix}$$

dengan $h_0, h_k \neq 0$ untuk setiap $k > 0$, maka entri-entri diagonal utama matriks H_n^3 yang dinotasikan dengan h_{ij} untuk setiap $i = j$ adalah

$$h_{ij} = \begin{cases} h_1^3 + 3h_0h_1h_2 + h_0^2h_3, & untuk\ i = j = 1\ dan\ i = j = n \\ h_1^3 + 6h_0h_1h_2 + 2h_0^2h_3, & untuk\ i = j = 2\ dan\ i = j = (n-1) \\ h_1^3 + 6h_0h_1h_2 + 3h_0^2h_3, & untuk\ i = j = 3,4,\ldots,(n-2) \end{cases}$$

Sehingga diperoleh bentuk umum *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat positif tiga sebagai berikut

$$tr(H_n^3) = nh_1^3 + (6n-6)h_0h_1h_2 + (3n-6)h_0^2h_3, \qquad n \geq 2$$

5.2 Saran

Dalam pembahasan yang telah dikemukakan, penulis hanya membahas tentang bentuk umum *trace* matriks Toeplitz-Hessenberg berpangkat bilangan bulat positif tiga. Bagi pembaca yang tertarik dengan topik ini dapat melanjutkan penelitian tentang *trace* suatu matriks dengan matriks yang lebih bervariasi.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard dan Chris Rorres. *”Aljabar Linier Elementer, Edisi Kedelapan”*. Jakarta: Erlangga. 2004.

Gray, Robert M. “*Toeplitz and Circulan Matrices*” Stanford 94305. Department of Electrical Engineering Stanford, USA. 2005.

Husna, Nurul. “Trace Matriks Toeplitz Tridiagonal 3 x 3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif”. *Jurnal Sains Matematika dan Satatistika*. 5, 1. 2019.

Kaygisiz, Kenan dan Adem Sahin. “Determinants and Permanents of Hessenberg Matrices and Generalized Lucas Polynomials”. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*. 39, 6, 1065-1078. 2013.

Merca, Mircea. “A note on the determinant of a Toeplitz-Hessenberg matrix”. *Spec. Matrices*. 2, 10-16. 2014.

Pahade, Jagdish K dan Manoj Jha. “Trace of Positive Integer Power of Real 2 x 2 Matrices”. *Anvances in Linear Algebra & Matrix Theory*. 5, 150-155. 2015.

Pahade, Jagdish K dan Manoj Jha. “Trace of Positive Integer Power of Adjacency Matrix”. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*. 13, 6, 2079-2087. 2017.

Slowik, Roksana. “Inverses and Determinants of Toeplitz-Hessenberg Matrices”. *Taiwanese Journal of Mathematics*. 22, 4, 901-908. 2018.

Yulianis. “Trace Matriks Bentuk Khusus 2 x 2 Berpangkat Bilangan Bulat Negatif”. *Jurnal Sains Matematika dan Satatistika*. 4, 2. 2018.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Karangan Tinggi tanggal 7 Januari 1996, sebagai anak ke enam dari enam bersaudara pasangan Bapak Aminullah Amani dan Ibu Nurida. Penulis menyelesaikan Pendidikan Formal Sekolah Dasar di SDN 009 Kuapan tahun 2008. Pada tahun 2011 penulis menyelesaikan Pendidikan Lanjutan Tingkat Pertama di MTs Darul Hikmah Pekanbaru dan menyelesaikan Pendidikan Menengah Atas dengan jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA) di MA Darul Hikmah pada tahun 2014 di Kota Pekanbaru.

Pada tahun 2014 penulis melanjutkan Pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Pekanbaru Riau dan lulus di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Jurusan Matematika. Pada bulan Juni 2020, penulis melaksanakan Kerja Praktek di Dinas Ketahanan Pangan Provinsi Riau, dengan judul **"Analisis Komparatif Produksi Komoditas Pangan Pertahun di Provinsi Riau dari Tahun 2010-2015 Menggunakan Uji-T Sampel Berpasangan"** yang dibimbing oleh Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si yang diseminarkan pada tanggal 14 Juni 2017. Bulan Juli-September 2017 penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kabupaten Pelalawan, Kecamatan Bunut, desa Keriung. Penulis dinyatakan lulus ujian sarjana pada tanggal 25 Juni 2020 dengan judul Tugas Akhir **"*Trace* Matriks Toeplitz-Hessenberg Berpangkat Bilangan Bulat Positif Tiga"** dengan dosen pembimbing Ibu Rahmawati, S.Si, M.Sc.