KENDALI OPTIMAL DARI SISTEM INVENTORI DENGAN PENINGKATAN BARANG UNTUK SISTEM DESKRIPTOR BERINDEKS SATU PADA WAKTU KONTINU

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh :

MELLANI
11654201287

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2020

LEMBAR PERSETUJUAN

KENDALI OPTIMAL DARI SISTEM INVENTORI DENGAN PENINGKATAN BARANG UNTUK SISTEM DESKRIPTOR BERINDEKS SATU PADA WAKTU KONTINU

TUGAS AKHIR

oleh :

MELLANI
11654201287

Telah diperiksa dan disetujui sebagai Laporan Tugas Akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 18 Juni 2020

Ketua Program Studi	Pembimbing
Ari Pani Desvina, M.Sc.	**Nilwan Andiraja, M.Sc.**
NIP. 19811225 200604 2 003	**NIP. 19840803 201101 1 005**

LEMBAR PENGESAHAN

KENDALI OPTIMAL DARI SISTEM INVENTORI DENGAN PENINGKATAN BARANG UNTUK SISTEM DESKRIPTOR BERINDEKS SATU PADA WAKTU KONTINU

TUGAS AKHIR

oleh :

MELLANI
11654201287

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 18 Juni 2020

Pekanbaru, 18 Juni 2020
Mengesahkan,

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag.	**Ari Pani Desvina, M.Sc.**
NIP. 19660604 199203 1 004	**NIP. 19811225 200604 2 003**

DEWAN PENGUJI :

Ketua	:	**Dr. Yuslenita Muda, M.Sc.**
Sekretaris	:	**Nilwan Andiraja, M.Sc.**
Anggota I	:	**Mohammad Soleh, M.Sc.**
Anggota II	:	**Aprijon, M.Ed.**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebut sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh tugas akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan tugas akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam tugas akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan di dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 18 Juni 2020
Yang membuat pernyataan

MELLANI
11654201287

LEMBAR PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

"Sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan"
(QS. Al Insyirah : 6)

Alhamdulillah penulis ucapkan kepada Allah SWT yang telah memberikan kemudahan sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini. Semoga keberhasilan ini menjadi langkah awal untuk masa depan penulis dan ilmu yang diperoleh dapat bermanfaat.

Tugas akhir ini saya persembahkan untuk

❖❖❖ Ayahanda Naswir dan Ibunda Eliza ❖❖❖

Terimakasih telah senantiasa memberikan doa, dukungan dan kasih sayang yang berlimpah. Jasa dan pengorbanan yang kalian berikan tidak akan pernah terbalaskan. Tugas akhir ini saya persembahkan sebagai wujud terimakasih atas pengorbanan dan dukungan yang telah kalian berikan.

❖❖❖ Dosen pembimbing Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc dan Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi ❖❖❖

Terimakasih atas waktu dan bimbingan yang telah dicurahkan sehingga saya dapat menyelesaikan tugas akhir ini.

❖❖❖ Abang-abangku yang luar biasa (Inov, Aad, Faldi, Imul dan Daud) ❖❖❖

Terimakasih atas dukungan yang telah kalian diberikan. Semoga awal dari kesusksesan saya ini dapat membanggakan kalian.

❖❖❖ Sahabat-sahabatku Risma dan Rani ❖❖❖

Terimakasih karena selalu ada di sisi saya saat suka ataupun duka. Kebersamaan kita akan menjadi kenangan yang tidak ingin saya lupakan.

KENDALI OPTIMAL DARI SISTEM INVENTORI DENGAN PENINGKATAN BARANG UNTUK SISTEM DESKRIPTOR BERINDEKS SATU PADA WAKTU KONTINU

MELLANI
11654201287

Tanggal Sidang : 18 Juni 2020
Periode Wisuda :

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Teori kendali merupakan metode yang dapat diimplementasikan dalam menyelesaikan permasalahan sehari-hari salah satunya yaitu masalah inventori. Masalah inventori berkaitan dengan tingkat produksi dan tingkat inventorinya. Oleh karena itu, kendali optimal dapat digunakan dalam menyelesaikan permasalahan inventori. Penelitian ini membahas tentang kendali optimal sistem inventori dengan peningkatan barang untuk sistem deskriptor berindeks satu pada waktu kontinu. Dalam penyelesaiannya, peneliti membuat sistem dinamik inventori baru pada waktu kontinu di mana telah diberikan deskriptor. Kemudian berdasarkan persamaan baru tersebut, peneliti memperoleh persamaan Hamilton dan persamaan Lagrange. Persamaan-persamaan tersebut didiferensialkan dan membentuk persamaan diferensial biasa orde dua nonhomogen yang solusinya adalah persamaan tingkat inventori dan persamaan tingkat produksi. Persamaan tingkat inventori dapat digunakan untuk menganalisa kestabilan persamaan dinamiknya. Berdasarkan perhitungan simulasi diperoleh tingkat inventori meningkat stabil, yang artinya inventori terus bertambah dari waktu awal hingga waktu akhir.

Kata kunci: *Deskriptor, Inventori, Kendali Optimal, Produksi, Teori Kendali*

OPTIMAL CONTROL OF INVENTORY SYSTEM WITH INCREASES OF ITEMS FOR SINGLE-INDEXED DESCRIPTOR SYSTEM IN CONTINUOUS TIME

MELLANI
11654201287

Date of Final Exam : *June 18th ,2020*
Period of Graduation Ceremony :

Departement of Mathemathics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
HR. Soebrantas Street No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

Control theory is a method that can be implemented in solving everyday problems, one of which is inventory. Inventory problems are related to the level of production and level of inventory. therefore, optimal control can be used in solving inventory problems. This study discusses the optimal control of the inventory system with an increase of items for single indexed descriptor system in continuous time. In completion, the researcher created a new dynamic inventory system in continuous time during which a descriptor was given. Then based on the new equation, the researcher obtains the Hamilton equation and the Lagrange equation. These equations are differentiable and form a non-homogeneous ordinary second-order differential equation whose solution is the inventory level equation and the production level equation. Inventory level equations can be used to analyze the stability of dynamic equations. Based on simulation calculations, the inventory level has increased stably, which means that inventory continues to increase from the beginning to the end time.

Keywords: *Descriptor, Inventory,Optimal Control, Production, Control Theory*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sholawat serta salam selalu tercurah kepada junjungan alam Nabi Muhammad *Shalallahu Alaihi Wassalam*, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan judul "Kendali Optimal dari Sistem Inventori dengan Peningkatan Barang untuk Sistem Deskriptor Berindeks Satu pada Waktu Kontinu" sebagai syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains pada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Penulis telah banyak mendapatkan bantuan, bimbingan, dan petunjuk dari berbagai pihak baik secara langsung maupun tidak langsung dalam menyelesaikan tugas akhir ini, untuk itu dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. K.H. Akhmad Mujahidin, S.Ag., M.Ag., Selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Ari Pani Desvina, S.Si., M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Ibu Fitri Aryani, S.Si., M.Sc., selaku Sekertaris Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
5. Bapak Nilwan Andiraja, S.Pd., M.Sc., selaku Pembimbing Akademik penulis dan dosen pembimbing tugas akhir yang telah banyak membantu, meluangkan waktunya untuk berkonsultasi serta menyumbangkan ide-idenya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
6. Bapak Mohammad Soleh, S.Si., M.Sc., Bapak Aprijon, S.Si., M.Ed., selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun kepada penulis.

7. Seluruh dosen Matematika Fakultas Sains dan Teknologi yang telah membimbing dan memberikan ilmunya kepada penulis.
8. Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada keluarga besar tercinta Ayahanda Naswir**,** Ibunda Eliza serta saudara-saudara penulis yang telah memberikan dukungan dan do’a sehingga penyelesaian tugas akhir ini berjalan dengan baik.
9. Sahabat penulis Risma dan Rani yang telah senantiasa menemani penulis dalam menitih kehidupan kampus, memberikan motivasi dan semangat kepada penulis.
10. Rekan-Rekan Matematika Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau khususnya angkatan 2016.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan tugas akhir ini masih jauh dari kesempurnaan. Maka dari itu dengan segala kerendahan hati, penulis menerima segala saran serta kritik yang bersifat membangun, agar lebih baik dimasa yang akan datang. Harapan penulis, semoga tugas akhir ini dapat berguna bagi penulis sendiri khususnya dan pembaca pada umumnya.

Wassalamu‘alaikum Warahmatullahi. Wabarakatuh.

Pekanbaru, 18 Juni 2020

Mellani

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Gambar **Halaman**

DAFTAR SIMBOL

$I(t)$	: Fungsi tingkat inventori
$P(t)$	: Fungsi tingkat rata-rata produksi
$v(t)$	: Selisih rata-rata peningkatan dan penurunan
$m(t)$	: Rata-rata peningkatan
$\theta(t)$	: Rata-rata penurunan
$\hat{I}$	: Tingkat inventori tujuan
$\hat{P}$	: Tingkat produksi tujuan
h	: Koefisien biaya penyimpanan
K	: Koefisien biaya produksi
H	: Fungsi Hamilton
L	: Fungsi Lagrange

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori kendali merupakan metode yang dapat diimplementasikan dalam menyelesaikan permasalahan sehari-hari salah satunya yaitu masalah inventori atau persediaan barang. Masalah inventori yaitu terkait dengan tingkat produksi dan tingkat inventorinya. Oleh karena itu, kendali optimal dapat digunakan dalam masalah inventori tersebut.

Sistem deskriptor adalah generalisasi dari sistem biasa (sistem nonsingular) yang mana matriks tidak memiliki invers. Lalu kontrol optimal untuk sistem dengan indeks waktu kontinu di mana dapat dikontrol sepanjang waktu memiliki bentuk persamaan yang lebih sederhana dibandingkan sistem dengan indeks diskrit sehingga memungkinkan kita untuk mendapatkan beberapa solusi analitik (Lewis, 2012).

Terdapat beberapa penelitian terkait inventori yaitu penelitian dari Affandi dkk (2012) yang mengkaji tentang penerapan inventori dan pembahasan difokuskan pada analisis sistem inventori produksi yang berbentuk nonlinear dan biaya produksi diperlakukan sebagai fungsi yang masing-masing adalah tingkat inventori dan tingkat produksi. Model pertama akan dikembangkan di mana permintaan dinamis dan inventori tersedia sepanjang waktu sehingga diperoleh hasil yang optimal.

Musthofa (2014) telah melakukan penelitian mengenai *Linear Quadratic Regulator* (LQR) untuk sistem deskriptor berindeks satu. Dalam kajiannya, dengan menggunakan bentuk kanonik Weierstrass maka masalah LQR untuk sistem deskriptor dapat diubah ke dalam bentuk LQR nonsingular. Hal tersebut mengakibatkan persamaan differensial Riccati dapat dikonstruksikan menggunakan metode pada sistem nonsingular.

Pada tahun 2015, Affandi dkk juga telah melakukan penelitian mengenai kendali optimal dari sistem inventori dengan peningkatan dan penurunan barang. Model masalah dalam penelitian ini yakni bagaimana mengatur perubahan permintaan konsumen pada sebuah produk barang jadi yang mana inventori bisa mengalami penurunan maupun peningkatan. Dengan menggunakan teknik kontrol optimal maka diperoleh nilai optimal tingkat inventori dan rata-rata produksi optimal.

Pada jurnal Affandi dkk (2015), persamaan dinamik inventori dengan peningkatan barang masih dalam bentuk umum di mana tidak adanya penambahan deskriptor. Sedangkan pada jurnal Musthofa (2014), masalah yang dipaparkan adalah LQR untuk sistem deskriptor berindeks satu yang kemudian ditransformasikan ke sistem nonsingular.

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk melakukan penelitian terkait kendali optimal dari sistem inventori dengan peningkatan barang untuk sistem deskriptor berindeks satu pada waktu kontinu, maka penulis mengambil judul ***"Kendali Optimal dari Sistem Inventori dengan Peningkatan Barang untuk Sistem Deskriptor Berindeks Satu pada Waktu Kontinu"***.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalahnya yaitu " Bagaimana menentukan kendali optimal yaitu tingkat produksi dan menganalisa kestabilan tingkat inventori dengan peningkatan barang untuk sistem deskriptor berindeks satu pada waktu kontinu?"

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Permasalahan hanya difokuskan pada inventori yang mengalami peningkatan barang untuk waktu kontinu berhingga.
2. Sistem inventori menggunakan sistem deskriptor berindeks satu.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian pada tugas akhir ini adalah untuk mendapatkan kendali optimal yaitu tingkat produksi dan analisa hasil kestabilan tingkat inventori dengan peningkatan barang untuk sistem deskriptor berindeks satu pada waktu kontinu.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Memberikan pengetahuan serta kontribusi bagi pembaca untuk membantu mempelajari dan memperdalam masalah kestabilan dari sistem inventori dengan peningkatan barang untuk sistem deskriptor berindeks satu pada waktu kontinu.
2. Menambah wawasan pengetahuan khususnya bagi mahasiswa/i yang menempuh mata kuliah teori kendali Program Studi Matematika.
3. Sebagai bahan informasi untuk penelitian-penelitian selanjutnya.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini mencakup 5 bab yaitu :

BAB I Pendahuluan

Pendahuluan menguraikan latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, serta sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Landasan teori berisikan tentang hal-hal yang dijadikan sebagai dasar teori untuk mengembangkan tulisan tugas akhir.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan tentang metode-metode yang dilakukan agar dapat memperoleh hasil yang dibutuhkan dalam penulisan tugas akhir ini.

BAB IV Pembahasan

Bab ini berisikan pemaparan cara-cara untuk mendapatkan hasil penelitian tersebut.

BAB V Penutup

Bab ini berisikan kesimpulan dan saran.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

Definisi 2.1 (Kolman, 2008) Sebuah matrik A berukuran $m \times n$ adalah susunan segi empat dari bilangan real atau kompleks mn yang disusun oleh m baris horizontal dan n kolom vertikal :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Baris ke-i dari matriks A adalah

$$[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \ldots \quad a_{in}] \qquad (1 \leq i \leq m);$$

Kolom ke-j dari matriks A adalah

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad (1 \leq j \leq n).$$

Bilangan a_{ij} di mana berada dalam baris ke-i dan kolom ke-j dari A disebut entri A, dan dapat ditulis sebagai berikut

$$A = [a_{ij}].$$

Adapun jenis matriks yang digunakan dalam proposal ini yaitu:

2.1.1 Matriks Nonsingular

Definisi 2.2 (Kolman, 2008) Sebuah matriks A berukuran $n \times n$ dikatakan nonsingular, atau dapat dibalik, jika ada sebuah matrik B berukuran $n \times n$ sedemikian sehingga $AB = BA = I_n$: matrik B dikatakan invers A. Jika tidak, matriks A dikatakan singular, atau tidak dapat dibalik.

Contoh 2.1 :

Diberikan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Jika A^{-1} ada, misal

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Lalu kita peroleh

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sehingga

$$\begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3a + 4c & 3b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Persamaan dalam entri matriks di atas dapat kita tulis ke dalam bentuk sistem linier

$$\begin{matrix} a + 2c = 1 \\ 3a + 4c = 0 \end{matrix} \quad \text{dan} \quad \begin{matrix} b + 2d = 0 \\ 3b + 4d = 1. \end{matrix}$$

Solusi yang diperoleh yaitu $a = -2$, $c = \frac{3}{2}$, $b = 1$ dan $d = -\frac{1}{2}$. Sehingga matriks

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Juga memenuhi

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Disimpukan bahwa A matriks nonsingular.

2.1.2 Matriks Nilpoten

Definisi 2.3 (Perko, 1991) Sebuah matriks berukuran $n \times n$ dikatakan nilpoten berorder k maka $A^k = 0$.

Contoh 2.2:

Diketahui sebuah matriks

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 12 \\ 20 & 8 & 24 \\ -8 & -4 & -12 \end{bmatrix}.$$

Buktikan bahwa matriks A merupakan matriks nilpoten dan tentukan ordernya.

Penyelesaian:

Untuk membuktikan bahwa matriks A adalah matriks nilpoten, maka akan dicari terlebih dahulu martiks A dengan order 2, yaitu :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 12 \\ 20 & 8 & 24 \\ -8 & -4 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 12 \\ 20 & 8 & 24 \\ -8 & -4 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 48 & 48 & 144 \\ -16 & -16 & -48 \end{bmatrix}$$

Karena matriks A^2 tidak nol, maka matriks A^2 bukan matriks nilpoten. Selanjutnya akan dicari matriks A dengan order 3 sebagai berikut :

$$A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 12 \\ 20 & 8 & 24 \\ -8 & -4 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 12 \\ 20 & 8 & 24 \\ -8 & -4 & -12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 12 \\ 20 & 8 & 24 \\ -8 & -4 & -12 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 48 & 48 & 144 \\ -16 & -16 & -48 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 12 \\ 20 & 8 & 24 \\ -8 & -4 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Didapat $A^3 = 0$ maka A adalah matrik nilpoten berorder 3.

2.2 Model Persediaan Barang yang Mengalami Peningkatan

Berikut adalah notasi yang akan digunakan dalam sistem dinamik dari inventori yang mengalami peningkatan :

$I(t)$: Fungsi tingkat inventori,

$P(t)$: Fungsi tingkat rata-rata produksi,

$I_0(t)$: Fungsi tingkat inventori awal,

$\theta(t)$: Fungsi tingkat rata-rata penurunan,

$m(t)$: Fungsi tingkat rata-rata peningkatan.

Didefinisikan fungsi persamaan diferensial untuk model peningkatan barang sebagai berikut (Affandi dkk, 2015) :

$$\dot{I}(t) = P(t) + v(t) \cdot I(t), \quad t \in [0, \infty), \tag{2.2}$$

dengan $v(t) = m(t) - \theta(t)$. Untuk menjamin inventori meningkat dari waktu 0 sampai tak hingga, maka berdasarkan (2.2) kita peroleh

$$P(t) + v(t) \cdot I(t) > 0, \quad t \in [0, \infty). \tag{2.3}$$

Adapun fungsi tujuan dari model inventori yang mengalami peningkatan sebagai berikut :

$$J = \int_0^\infty \left(\frac{h}{2}\left(I(t) - \hat{I}\right)^2 + \frac{k}{2}\left(P(t) - \hat{P}\right)^2\right) dt, \tag{2.4}$$

di mana

h : Koefisien biaya penyimpanan,

k : Koefisien biaya produksi,

$\hat{I}$: Tingkat persediaan tujuan,

$\hat{P}$: Tingkat produksi tujuan.

2.3 Bentuk Kuadratik

Diberikan bentuk kuadratik, yaitu (Lewis, 1995) :

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}, \tag{2.5}$$

Dengan entri matriks A adalah $c_{ij} = c_{ji}$ untuk semua $i, j \in \mathbb{R}$, $c_{ij} \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ dan $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Karena $\boldsymbol{x}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]$, menurut (Ogata, 1995) Persamaan (2.5) dapat diuraikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} &= c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + \ldots + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2x_2 + \ldots + c_{nn}x_n^2, \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}x_ix_j. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Berdasarkan (Lewis, 1995), definit pada bentuk kuadratik (2.5) diperoleh dengan menentukan nilai eigen pada matriks A. Jika $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ merupakan nilai eigen dari matriks A, maka bentuk kuadratik memenuhi :

1) Definit positif jika $\lambda_i > 0, \quad \forall i = 1,2,3, \dots, n$
2) Definit negatif jika $\lambda_i < 0, \quad \forall i = 1,2,3, \dots, n$
3) Semi definit positif jika $\lambda_i \geq 0, \quad \forall i = 1,2,3, \dots, n$
4) Semi definit negatif jika $\lambda_i \leq 0, \quad \forall i = 1,2,3, \dots, n$.

Untuk lebih jelas mengenai pembahasan ini, maka diberikan beberapa contoh sebagai berikut.

Contoh 2.3 :

Bentuklah persamaan $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} -10x_i x_j$ ke bentuk kuadratik dan tentukan definitnya.

Penyelesaian :

Berdasarkan soal di atas, maka kita peroleh bentuk kuadratik, yaitu

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} -10x_i x_j \\ &= -10x_1x_1 - 10x_1x_2 - 10x_2x_1 - 10x_2x_2 \\ &= -10{x_1}^2 - 20x_1x_2 - 10{x_2}^2 \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 & -10 \\ -10 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

dengan $A = \begin{bmatrix} -10 & -10 \\ -10 & -10 \end{bmatrix}$, sehingga

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= 0, \\ det\left(\begin{bmatrix} -10 & -10 \\ -10 & -10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) &= 0, \\ det\left(\begin{bmatrix} -10-\lambda & -10 \\ -10 & -10-\lambda \end{bmatrix}\right) &= 0, \\ (-10-\lambda)(-10-\lambda) - 100 &= 0, \\ 100 - 10\lambda - 10\lambda + \lambda^2 - 100 &= 0, \\ \lambda^2 - 20\lambda &= 0, \end{aligned}$$

diperoleh $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = 20$. Maka bentuk kuadratik di atas semi definit positif.

Contoh 2.4 :

Bentuklah persamaan $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 20x_i x_j$ ke bentuk kuadratik dan tentukan definitnya.

Penyelesaian :

Berdasarkan soal di atas, maka kita peroleh bentuk kuadratik, yaitu

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 20x_i x_j \\
&= 20x_1x_1 + 20x_1x_2 + 20x_2x_1 + 20x_2x_2 \\
&= 20{x_1}^2 + 40x_1x_2 + 20{x_2}^2 \\
&= [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

dengan $A = \begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix}$, sehingga

$$
\begin{aligned}
det(A - \lambda I) &= 0, \\
det\left(\begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) &= 0, \\
det\left(\begin{bmatrix} 20-\lambda & 20 \\ 20 & 20-\lambda \end{bmatrix}\right) &= 0, \\
(20-\lambda)(20-\lambda) - 100 &= 0, \\
400 + 20\lambda + 20\lambda + \lambda^2 - 400 &= 0, \\
\lambda^2 + 40\lambda &= 0,
\end{aligned}
$$

diperoleh $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = -40$. Maka bentuk kuadratik di atas semi definit negatif.

2.4 Kestabilan

Sebelum membahas tentang kestabilan, terlebih dahulu dibahas tentang ekuilibrium berdasarkan definisi berikut.

Definisi 2.4 (Olsder, 1994) Diberikan persamaan diferensial orde 1 yaitu $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dengan nilai awal $\boldsymbol{x}_0$, sebuah vektor $\overline{\boldsymbol{x}}$ yang memenuhi $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0$ disebut titik ekuilibrium.

Contoh 2.5 :

Tentukan titik ekuilibrium dari persamaan $\dot{\boldsymbol{x}} = x + 1$.

Penyelesaian :

Diketahui

$$\dot{\boldsymbol{x}} = x + 1,$$

Sehingga diperoleh titik ekuilibrium

$$x + 1 = 0 \Leftrightarrow \bar{\boldsymbol{x}} = -1.$$

Definisi 2.5 (Olsder, 1994) Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil jika $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0$ sehingga $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$ maka $\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil asimtotik jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ merupakan titik stabil dan $\exists\, \delta > 0$ sehingga $\lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \bar{\boldsymbol{x}}\| = 0$ memenuhi $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan tidak stabil apabila $\bar{\boldsymbol{x}}$ tidak stabil.

Contoh 2.6 :

Analisa kestabilan $\dot{\boldsymbol{x}} = -\frac{1}{2}x, x(0) = x_0$.

Penyelesaian :

Diketahui

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\frac{1}{2}x$$

Sehingga diperoleh titik ekuilibrium

$$-\frac{1}{2}x = 0 \Leftrightarrow \bar{\boldsymbol{x}} = 0.$$

Solusi persamaan diferensialnya adalah

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\frac{1}{2}x,$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2}x,$$

$$\int -\frac{2}{x}\,dx = \int dt,$$

$$-2\ln x + C_1 = t + C_2,$$

$$\ln x = -\frac{1}{2}t + C.$$

Karena $x(0) = x_0$, maka

$$\ln x_0 = -\frac{1}{2}(0) + C,$$

$$\ln x_0 = C,$$

Sehingga

$$\ln x = -\frac{1}{2}t + \ln x_0,$$

$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = -\frac{1}{2}t,$$

$$\frac{x}{x_0} = e^{-\frac{1}{2}t},$$

$$x = x_0 e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Karena nilai x untuk $t \to \infty$ adalah $x \to 0$, maka dapat disimpulkan bahwa solusi untuk $\dot{x} = -\frac{1}{2}x$ stabil asimtotik.

2.5 Kendali Optimal Waktu Kontinu

Pada bagian ini dibahas masalah kendali optimal waktu kontinu untuk persamaan diferensial dinamik untuk waktu t. Diberikan

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), t), \tag{2.7}$$

dengan $x(t) \in \mathbb{R}^n$ merupakan vektor *state* internal dan $u(t) \in \mathbb{R}^m$ merupakan vektor kendali input, dan diberikan fungsi tujuan yang meminimalkan fungsi objektif sebagai berikut :

$$J(t_0) = \phi\left(x(T_f), T_f\right) + \int_{t_0}^{T_f} L(x(t), u(t), t)dt, \tag{2.8}$$

dengan t_0 adalah waktu awal dan T_f adalah waktu akhir.

Kemudian, untuk mencari solusi masalah kendali optimal waktu kontinu maka didefinisikan persamaan-persamaan yang diperlukan untuk sebuah proses meminimalkan fungsi objektif sebagai berikut :

Persamaan Hamilton : $H(x, u, t, \lambda) = -L(x, u, t) + \lambda(t)f(x, u, t),$ (2.9)

Persamaan Lagrange : $L(x, u, t, \lambda, \mu) = H(x, u, t, \lambda) + \mu(t)f(x, u, t),$ (2.10)

2.6 Persamaan Diferensial Biasa Nonhomogen Koefisien Konstanta

Bentuk umum persamaan diferensial biasa nonhomogen diberikan sebagai berikut (Kreyszig, 2006) :

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = g(x) \tag{2.11}$$

selanjutnya dimisalkan $y_c(x)$ adalah penyelesaian untuk persamaan homogen

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{2.12}$$

Persamaan (2.12) dapat diselesaikan dengan memisalkan $y = e^{rx}$, sehingga akan diperoleh

$$a\frac{d^2(e^{rx})}{dx^2} + b\frac{d(e^{rx})}{dx} + ce^{rx} = 0,$$
$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0,$$
$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0.$$

Oleh karena $e^{rx} = 0$, maka $y(x) = e^{rx}$ merupakan penyelesaian Persamaan (2.12) jika dan hanya jika r memenuhi karakteristik,

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2.13}$$

Penyelesaian dari Persamaan karakteristik (2.13) adalah

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

di mana

$$D = b^2 - 4ac$$

Penyelesaian khusus dari persoalan persamaan diferensial linier orde dua homogen dengan persamaan karakteristik pada Persamaan (2.13) bergantung pada nilai diskriminan.

Adapun bentuk-bentuk penyelesaian berdasarkan nilai deskriminan adalah sebagai berikut:

a. Akar-akar Real dan Berbeda ($D > 0$)

   Jika akar-akar r_1 dan r_2 pada Persamaan (2.13) adalah $r_1 \neq r_2$, maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.12) adalah

$$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} \tag{2.14}$$

   dengan $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b. Akar-akar Berulang ($D = 0$)

   Jika akar-akar r_1 dan r_2 pada Persamaan (2.13) adalah $r_1 = r_2$, maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.12) adalah

$$y(x) = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx} \tag{2.15}$$

   dengan $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

c. Akar-akar imajiner ($D < 0$)

Jika akar-akar r_1 dan r_2 pada Persamaan (2.13) adalah bilangan kompleks $r_1 = \alpha + i\beta$ dan $r_2 = \alpha - i\beta$, maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.12) adalah

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1 cos\beta x + c_2 sin\beta x) \qquad (2.16)$$

dengan $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Selanjutnya, $y_p(x)$ adalah penyelesaian untuk persamaan nonhomogen. Untuk mencari $y_p(x)$ dapat menggunakan beberapa metode, diantaranya : Metode variasi parameter, metode Wronskian dan metode koefisien tak tentu. Maka penyelesaian umum dari persamaan orde dua nonhomogen (2.11) dapat ditulis dalam bentuk

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x). \qquad (2.17)$$

Contoh 2.7 :

Tentukan penyelesaian umum dari persamaan diferensial biasa nonhomogen berikut:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 4y = 4x^2$$

Penyelesaian:

Langkah pertama yaitu menentukan terlebih dahulu penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 4y = 0$$

Kemudian dibentuk Persamaan karakteristik untuk Persamaan homogennya yaitu:

$$r^2 - 3r - 4 = 0$$

$$(r - 4)(r + 1) = 0$$

Maka diperoleh $r_1 = 4$ dan $r_2 = -1$ sehingga penyelesaian persamaan diferensial biasa homogennya yaitu :

$$y_c(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x}$$

Selanjutnya untuk penyelesain $y_p(x)$ diberikan oleh:

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

sehingga,

$$y_p{}'(x) = 2Ax + B$$

dan

$$y_p{}''(x) = 2A\,.$$

Untuk menentukan nilai A, B dan C maka disubsitusikan nilai-nilai $y_p(x), y_p'(x)$ dan $y_p''(x)$ ke dalam persamaan $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} - 4y = 4x^2$ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} 2A - 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) &= 4x^2 \\ 2A - 6Ax - 3B - 4Ax^2 - 4Bx - 4C &= 4x^2 \\ -4Ax^2 + (-6A - 4B)x + (2A - 3B - 4C) &= 4x^2 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan kesamaan koefisien untuk persamaan di atas maka, diperoleh nilai $A = -1, B = 1.5$, dan $= -1.625$, sehingga:

$$y_p(x) = -x^2 + 1.5x - 1.625.$$

Jadi, penyelesaian umum untuk persoalan di atas adalah menjumlahan Persamaan $y_c(x)$ dengan Persamaan $y_p(x)$ sehingga diperoleh:

$$y(x) = c_1e^{4x} + c_2e^{-x} - x^2 + 1.5x - 1.625.$$

2.7 Kendali Optimal Waktu Kontinu dengan Sistem Deskriptor Berindeks Satu

Pembahasan pada bagian ini yaitu kendali optimal waktu kontinu dengan sistem deskriptor berindeks satu. Didefinisikan Persamaan dinamik dengan deskriptor berindeks satu sebagai berikut :

$$E\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \quad x(0) = x_0 \tag{2.18}$$

dengan $E, A \in \mathbb{R}^{(n\times n)}, Rank(E) = n, B \in \mathbb{R}^{(n\times m)}$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ adalah fungsi kendali yang diberikan pada Persamaan (2.18). Fungsi tujuan yaitu :

$$J = \boldsymbol{x}^TQ\boldsymbol{x} + \int_{t_0}^{T_f}[\boldsymbol{x}^TQ\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^TR\boldsymbol{u}]\,dt, \tag{2.19}$$

Teorema 2.6 (Gantmacher, 1959) Jika Persamaan (2.18) berbentuk umum maka terdapat dua matriks nonsingular $X = [X_1 \quad X_2]$ dan $Y = [Y_1 \quad Y_2]$

sedemikian sehingga $Y^T EX = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}$ dan $Y^T AX = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix}$ dengan A_1 adalah matriks dalam bentuk Jordan yang elemen-elemennya nilai eigen dari A, I_n dan I_r adalah matriks identitas dan N adalah matriks nilpoten juga dalam bentuk Jordan.

Berdasarkan Teorema 2.6 di atas, maka terlebih dahulu didefinisikan

$$x = X_1 x_1 + X_2 x_2, \tag{2.20}$$

dengan $X = [X_1 \quad X_2]$, $Y = [Y_1^T \quad Y_2^T]$, selanjutnya Persamaan (2.18) menjadi sebagai berikut :

$$Y^T E\dot{\boldsymbol{x}} = Y^T A\boldsymbol{x} + Y^T B\boldsymbol{u}, \tag{2.21}$$

berdasarkan Persamaan (2.20) dan Persamaan (2.21) maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Y^T B\boldsymbol{u}. \tag{2.22}$$

Selanjutnya, berdasarkan jurnal Musthofa (2014) diketahui bahwa indeks dari sistem deskriptor (2.18) dinyatakan dengan derajat kenilpotenan dari matriks N. Berdasarkan jurnal tersebut diketahui bahwa sistem berindeks satu maka Persamaan (2.22) menjadi :

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Y^T B\boldsymbol{u}. \tag{2.23}$$

Berdasarkan Persamaan (2.20), diperoleh $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \coloneqq X^{-1}\boldsymbol{x}$ sehingga

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = X^{-1}x_0, \tag{2.24}$$

Berdasarkan Persamaan (2.20) dan Persamaan (2.24), maka dapat disusun persamaan dinamik sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + Y^T B\boldsymbol{u}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = X^{-1}x_0. \tag{2.25}$$

Persamaan (2.25) dapat diuraikan menjadi

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + Y_1 B\boldsymbol{u}, \quad x_1(0) = [I_n \quad 0]X^{-1}x_0. \tag{2.26}$$

$$x_2 = -[0 \quad I_r]Y_2 B\boldsymbol{u} = -Y_2 B\boldsymbol{u}. \tag{2.27}$$

Berdasarkan Persamaan (2.20) dan Persamaan (2.25) fungsi tujuan (2.19) dapat ditulis sebagai berikut :

$$J = \boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} + \int_{t_0}^{T_f} \left[\begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T \end{bmatrix} X^T Q X \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u} \right] dt,$$

$$J = \boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} + \int_{t_0}^{T_f} \left[\begin{bmatrix} x_1^T & (-Y_2 B \boldsymbol{u})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^T \\ X_2^T \end{bmatrix} Q \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ -Y_2 B \boldsymbol{u} \end{bmatrix} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u} \right] dt,$$

$$J = \boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} + \int_{t_0}^{T_f} \left[\begin{bmatrix} x_1^T & \boldsymbol{u}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^T Q X_1 & -X_1^T Q X_2 Y_2 B \\ -X_2^T Y_2^T B^T Q X_1 & X_2^T Y_2^T B^T Q X_2 Y_2 B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u} \right] dt,$$

$$J = \boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} + \int_{t_0}^{T_f} \left[\begin{bmatrix} x_1^T & \boldsymbol{u}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & V \\ V^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u} \right] dt. \tag{2.28}$$

Berdasarkan Persamaan (2.26) dan Persamaan (2.28) maka dibentuk persamaan-persamaan berikut.

Persamaan Hamilton :

$$H = \begin{bmatrix} x_1^T & \boldsymbol{u}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & V \\ V^T & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \boldsymbol{u} \end{bmatrix} + \omega_1^T (A_1 x_1 + Y_1 B \boldsymbol{u}),$$

$$H = [x_1^T Q x_1 + \boldsymbol{u}^T V^T x_1 + x_1^T V \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^T R \boldsymbol{u}] + \omega_1^T (A_1 x_1 + Y_1 B \boldsymbol{u}). \tag{2.29}$$

Persamaan *State* : $\dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial \omega} = A_1 x_1 + Y_1 B \boldsymbol{u}.$ (2.30)

Persamaan *Costate* : $\dot{\omega}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(2Q x_1 + 2V \boldsymbol{u} + A_1^T \omega).$ (2.31)

Persamaan Stasioner : $0 = \frac{\partial H}{\partial u} = 2V^T x_1 + 2R \boldsymbol{u} + B^T Y_1^T \omega.$ (2.32)

Berdasarkan Persamaan (2.32) diperoleh

$$\boldsymbol{u} = -R^{-1} \left(V^T x_1 - \tfrac{1}{2} B^T Y_1^T \omega \right). \tag{2.33}$$

Selanjutnya akan dicari persamaan diferensial Aljabar Riccati untuk masalah linear kuadratik dengan definisi :

$$\omega = K x_1, \quad K(t_f) = Q_{t_f}, \tag{2.34}$$

dengan menurunkan Persamaan (2.34) terhadap variabel t maka diperoleh

$$\dot{\omega} = \dot{K}x_1 + K\dot{x}_1. \tag{2.35}$$

Subtitusikan Persamaan (2.30) dan Persamaan (2.31) ke dalam Persamaan (2.35) sehingga

$$-(2Qx_1 + 2V\boldsymbol{u} + A_1^T\omega) = \dot{K}x_1 + K(A_1x_1 + Y_1B\boldsymbol{u}),$$

$$-\left(2Qx_1 + 2V\left(-R^{-1}V^Tx_1 - \frac{1}{2}B^TY_1^T(Kx_1)\right) + A_1^T(Kx_1)\right)$$

$$= \dot{K}x_1 + KA_1x_1 + KY_1B\left(-R^{-1}V^Tx_1 - \frac{1}{2}B^TY_1^T\omega\right),$$

$$-(2Qx_1 - 2VR^{-1}V^Tx_1 - VB^TY_1^TKx_1 + A_1^TKx_1)$$

$$= \dot{K}x_1 + KA_1x_1 - Y_1BR^{-1}V^{-T}Kx_1 - \frac{1}{2}Y_1BB^TY_1^TKKx_1,$$

$$\dot{K}x_1 = -(2Qx_1 - 2VR^{-1}V^Tx_1 - VB^TY_1^TKx_1 + A_1^TKx_1)$$

$$-\left(KA_1x_1 - Y_1BR^{-1}V^{-T}Kx_1 - \frac{1}{2}Y_1BB^TY_1^TKKx_1\right),$$

$$\dot{K}x_1 = -2Qx_1 + 2VR^{-1}V^Tx_1 + VB^TY_1^TKx_1 - A_1^TKx_1 - KA_1x_1$$

$$+Y_1BR^{-1}V^{-T}Kx_1 + \frac{1}{2}Y_1BB^TY_1^TKKx_1,$$

$$\dot{K}x_1 = (-2Q + 2VR^{-1}V^T + VB^TY_1^TK - A_1^TK - KA_1 + Y_1BR^{-1}V^{-T}K$$

$$+\frac{1}{2}Y_1BB^TY_1^TKK)x_1,$$

$$\dot{K} = -2Q + 2VR^{-1}V^T + VB^TY_1^TK - A_1^TK - KA_1 + Y_1BR^{-1}V^{-T}K$$

$$+\frac{1}{2}Y_1BB^TY_1^TKK. \tag{2.36}$$

Maka akan diperoleh solusi $\dot{K}$ yang dapat digunakan untuk membentuk fungsi yaitu :

$$\boldsymbol{u} = -R^{-1}\left(V^Tx_1 - \frac{1}{2}B^TY_1^TKx_1\right). \tag{2.37}$$

Selanjutnya, fungsi kendali pada persamaan (2.37) disubsitusikan ke persamaan dinamik kontinu pada persamaan (2.18) kemudian dianalisa kestabilannya.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Penulisan tugas akhir ini membahas kendali optimal dari sistem inventori dengan peningkatan barang untuk sistem deskriptor berindeks satu pada waktu kontinu. Berikut langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini :

1. Diketahui persamaan diferensial dinamik dari inventori yang mengalami peningkatan barang untuk deskriptor berindeks satu sebagai berikut :
$$e\dot{I}(t) = P(t) + v(t) \cdot I(t), \quad t \in [0, T] \tag{3.1}$$
di mana $E = e$ dan bentuk fungsi tujuan dari inventori yang mengalami peningkatan dengan waktu kontinu berhingga sebagai berikut :
$$J = \int_0^T \left(\frac{h}{2}\left(I(t) - \hat{I}\right)^2 + \frac{k}{2}\left(P(t) - \hat{P}\right)^2\right) dt. \tag{3.2}$$
2. Kemudian dari langkah no 1, diperoleh persamaan diferensial dinamik baru sebagai berikut :
$$\dot{I}_1(t) = v(t)I_1(t) + Y_1 P(t) \tag{3.3}$$
3. Berdasarkan Persamaan (3.3) dan Persamaan (3.2), dibentuk Persamaan Hamilton dan Persamaan Lagrange.
4. Berdasarkan langkah no. 3, ditentukan :
$$\frac{\partial}{\partial P} H(t, I_1, P, \lambda) = 0 \tag{3.4}$$
dan
$$-\frac{d}{dt}\dot{\lambda}(t) = \frac{\partial}{\partial I_1} L(t, I_1, P, \lambda, \mu) \tag{3.5}$$
serta
$$\frac{\partial}{\partial P} L(t, I_1, P, \lambda, \mu) = 0 \tag{3.6}$$
5. Substitusi Persamaan (3.4) ke persamaan diferensial baru pada langkah no.2.
6. Selanjutnya diferensialkan persamaan dari langkah no.5.
7. Substitusi persamaan pada langkah no. 5, Persamaan (3.5) dan Persamaan (3.6) ke persamaan pada langkah no. 6, sehingga diperoleh persamaan

diferensial biasa orde dua nonhomogen di mana selisih rata-rata peningkatan dan penurunan barang $v(t)$ merupakan konstanta.

8. Berdasarkan langkah no. 7, diperoleh persamaan tingkat inventori $\left(I_1(t)\right)$ yaitu solusi dari persamaan diferensial biasa orde dua nonhomogen.
9. Selanjutnya substitusikan $I_1(0) = I_{1_0}$ dan $I_1(T) = M$ ke persamaan tingkat inventori $\left(I_1(t)\right)$ pada langkah no. 8 untuk menghitung konstanta c_1 dan c_2.
10. Kemudian substitusikan persamaan tingkat inventori $\left(I_1(t)\right)$ pada langkah no. 8 ke persamaan pada langkah no. 5 untuk mendapatkan persamaan tingkat produksi $(P(t))$.
11. Persamaan yang diperoleh pada langkah no. 8 dapat digunakan untuk menganalisa kestabilannya.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada Bab IV, maka disimpulkan bahwa persamaan deferensial dinamik dari sistem inventori dengan peningkatan barang untuk sistem deskriptor berindeks satu sebagai berikut :

$$\dot{I}_1(t) = v(t)I_1(t) + Y_1P(t), \quad t \in [0, T]$$

dengan fungsi tujuan meminimumkan

$$J = \int_0^T \left(\frac{h}{2}\left(I_1(t) - \hat{I}\right)^2 + \frac{k}{2}\left(P(t) - \hat{P}\right)^2\right) dt$$

di mana $v(t)$ merupakan konstanta, maka diperoleh tingkat produksi $P(t)$ serta tingkat inventori $\left(I_1(t)\right)$ sebagai berikut :

$$P(t) = \hat{P} + \frac{1}{Y_1}\left(\left(r - v(t)\right)c_1e^{rt} - \left(r + v(t)\right)c_2e^{-rt} + \dot{Q}(t) - Q(t)v(t) - Y_1\hat{P}\right)$$

dan

$$I_1(t) = c_1e^{rt} + c_2e^{-rt} + Q(t)$$

Berdasarkan contoh, tingkat inventori $\left(I_1(t)\right)$ meningkat stabil, artinya inventori perusahaan tersebut terus bertambah dari $t = 0$ hingga $t = 5$.

5.2 Saran

Tugas akhir ini memaparkan tentang sistem inventori dengan peningkatan barang untuk sistem deskriptor berindeks satu pada waktu kontinu dan menyelesaikannya dengan teknik kendali optimal. Maka saran yang ingin disampaikan adalah penelitian dapat dikembangkan dengan dua kendali atau dengan menambahkan kendali pada sistem dinamik.

Demikian saran yang disampaikan penulis, semoga pembaca dapat mengembangkan lebih lanjut tentang kendali optimal dari sistem inventori dengan peningkatan barang untuk sistem deskriptor berindeks satu pada waktu kontinu.

DAFTAR PUSTAKA

Affandi, P dkk., “Kendali Optimal dari Sistem Inventory dengan Peningkatan dan Penurunan Barang”. *Jurnal MIPA*. 79-88. 2015.

Affandi, P dkk., “Penerapan Teori Kendali pada Masalah Inventory”. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan*, Vol. 6, No. 2. hal : 38-46. 2012.

Gantmacher, F.R., “*The Theory of Matrices*”. Chelsea Publishing Company, New York, N.Y. 1959.

Kolman, Bernard., “*Elementary Linear Algebra and Applications : Ninth Edition*”. New Jersey : Pearson Education, Inc. 2008.

Kreyszig, Erwin., “*Advance Engineering Mathematics*”. New Jersey : John Wiley & Sons, Inc. 2006.

Lewis, F.L., “*Optimal Control*”. Toronto : John Wiley & Sons, Inc. 1995.

Lewis, F.L., “*Optimal Control : Third Edition*”. Toronto : John Wiley & Sons, Inc. 2012.

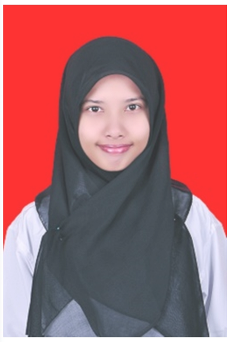
Musthofa, Wahid., “Linear Quadratic Regulator (LQR) untuk Sistem Deskriptor Berindeks Satu”. *Jurnal Konvergensi*, Vol. 4, No. 1. 2014.

Ogata, Katsuhiko., “*Teknik Kontrol Automatik (Sistem Pengaturan)*”. Jilid 1. Erlangga : Jakarta. 1995.

Olsder, G.J., “*Mathematical System Theory 1st Edition*”. Delft University of Technology, The Netherlands. 1994.

Perko, L., “*Differential Equations and Dynamical Systems*”. Springer-Verlag, New York, Inc. 1991.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis dilahirkan pada tanggal 9 Desember 1998 di Pekanbaru, sebagai anak keenam dari enam bersaudara pasangan Bapak Naswir dan Ibu Eliza.

Penulis menyelesaikan pendidikan formal pada Sekolah Dasar Islam As-Shofa Pekanbaru pada tahun 2010. Pada tahun 2013, penulis menyelesaikan Pendidikan Lanjutan Pertama di Sekolah Menengah Pertama Negeri 2 Baso Bukittinggi. Penulis kemudian melanjutkan Pendidikan Sekolah Atas Negeri 3 Rumbai Pekanbaru dengan jurusan IPA hingga tahun 2016. Pada tahun yang sama penulis melanjutkan pendidikan di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, Fakultas Sains dan Teknologi dengan Jurusan Matematika.

Pada tahun 2019, penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Muaro Tombang Kecamatan Kuantan Mudik Kabupaten Kuantan Singingi. Di tahun yang sama, tepatnya pada semester 6 penulis melakukan Kerja Praktek di Balai Pemasyarakatan Kelas II Pekanbaru dengan judul "**Deskriptif Jumlah Permintaan Penelitian Kemasyarakatan Bimbingan Klien di Balai Pemasyarakatan Kelas II Pekanbaru Tahun 2018**" di bawah bimbingan Ibu Elfira Safitri, M.Mat. dari tanggal 28 Januari 2019 hingga 28 Februari 2019 dan diseminarkan pada tanggal 4 Juli 2019.