KENDALI OPTIMAL DARI SISTEM INVENTORI DENGAN PENINGKATAN BARANG PADA WAKTU DISKRIT UNTUK SISTEM DESKRIPTOR BERINDEKS SATU

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

oleh :

RISMA SRI WAHYUNI
11654201474

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2020

LEMBAR PERSETUJUAN

KENDALI OPTIMAL DARI SISTEM INVENTORI DENGAN PENINGKATAN BARANG PADA WAKTU DISKRIT UNTUK SISTEM DESKRIPTOR BERINDEKS SATU

TUGAS AKHIR

oleh:

RISMA SRI WAHYUNI
11654201474

Telah diperiksa dan disetujui sebagai Laporan Tugas Akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 17 Juni 2020

Ketua Program Studi	Pembimbing
Ari Pani Desvina, M.Sc.	**Nilwan Andiraja, M.Sc.**
NIP. 19811225 200604 2 003	**NIP. 19840803 201101 1 005**

LEMBAR PENGESAHAN

KENDALI OPTIMAL DARI SISTEM INVENTORI DENGAN PENINGKATAN BARANG PADA WAKTU DISKRIT UNTUK SISTEM DESKRIPTOR BERINDEKS SATU

TUGAS AKHIR

oleh :

RISMA SRI WAHYUNI
11654201474

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 17 Juni 2020

Pekanbaru, 17 Juni 2020
Mengesahkan,

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag.	**Ari Pani Desvina, M.Sc.**
NIP. 19660604 199203 1 004	**NIP. 19811225 200604 2 003**

DEWAN PENGUJI :

Ketua : **Sri Basriati, M.Sc.**

Sekretaris : **Nilwan Andiraja, M.Sc.**

Anggota I : **Mohammad Soleh, M.Sc.**

Anggota II : **Aprijon, M.Ed.**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebut sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh tugas akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan tugas akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam tugas akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan didalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 17 Juni 2020
Yang membuat pernyataan,

RISMA SRI WAHYUNI
11654201474

LEMBAR PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

"Sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan"
(QS. Al Insyirah : 6)

Alhamdulillah kuucapkan kepada Allah SWT yang telah memberikan kemudahan sehingga dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan baik. Semoga keberhasilan ini menjadi langkah awal untuk masa depanku.

Tugas akhir ini kupersembahkan untuk

❖❖❖ Ayahanda Waris dan Ibunda Sunarti ❖❖❖

Terimakasih telah senantiasa memberikan doa, dukungan dan kasih sayang yang berlimpah. Jasa dan pengorbanan yang kalian berikan tidak akan pernah terbalaskan. Sebagai wujud terimakasih atas pengorbanan yang telah kalian berikan, kupersembahkan tugas akhir ini.

❖❖❖ Dosen pembimbing Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc dan Dosen Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi❖❖❖

Terimakasih atas waktu dan bimbingan yang telah dicurahkan sehingga saya dapat menyelesaikan tugas akhir ini.

❖❖❖ Abang-abangku yang luar biasa (Eko, Andi, Ade dan Wiwin) ❖❖❖

Terimakasih atas dukungan yang telah kalian diberikan. Semoga awal dari kesuksesanku ini dapat membanggakan kalian.

❖❖❖ Sahabat-sahabatku Della, Isti dan Mellani ❖❖❖

Terimakasih karena selalu ada di sisiku saat suka ataupun duka. Kebersamaan kita akan menjadi kenangan yang tidak ingin kulupakan.

KENDALI OPTIMAL DARI SISTEM INVENTORI DENGAN PENINGKATAN BARANG PADA WAKTU DISKRIT UNTUK SISTEM DESKRIPTOR BERINDEKS SATU

RISMA SRI WAHYUNI
11654201474

Tanggal Sidang : 17 Juni 2020
Periode Wisuda :

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Terdapat banyak permasalahan yang melibatkan teori kendali. Aplikasi teori kendali optimal, salah satunya pada persoalan inventori. Misalnya suatu perusahaan akan memproduksi suatu barang, maka hasil produksi atau barang tersebut akan disimpan di suatu pergudangan sebelum dijual ke konsumen. Oleh karena itu perlu pengendalian barang yang terdapat di dalam suatu gudang disebut sistem inventori. Penelitian ini membahas tentang kendali optimal dari sistem inventori dengan peningkatan barang pada waktu diskrit untuk sistem deskriptor berindeks satu. Tujuan penelitian ini adalah untuk mendapatkan tingkat produksi optimal dan analisa kestabilan tingkat inventori dengan peningkatan barang pada waktu diskrit untuk sistem deskriptor berindeks satu. Berdasarkan fungsi dinamik model inventori diskrit dengan deskriptor dan fungsi tujuan yang diberikan dapat dibentuk persamaan Lagrange. Selanjutnya akan diperoleh persamaan Riccati dan persamaan tingkat produksi optimal. Persamaan tingkat produksi optimal tersebut digunakan untuk menganalisa kestabilan persamaan dinamik. Model dikatakan stabil jika tingkat inventori mengalami peningkatan. Berdasarkan simulasi yang telah diberikan, diperoleh bahwa tingkat inventori mengalami peningkatan dan tingkat produksi menurun. Hal ini dikarenakan tidak terdapat permintaan konsumen, sehingga perusahaan harus mengurangi produksi agar penyimpanan digudang tidak melebihi batas maksimumnya.

Kata kunci: *Deskriptor, Inventori, Kendali Optimal*

OPTIMAL CONTROL OF INVENTORY SYSTEM WITH INCREASES OF ITEMS IN DISCRETE TIME FOR SINGLE-INDEXED DESCRIPTOR SYSTEM

RISMA SRI WAHYUNI
11654201474

Date of Final Exam : *June 17th ,2020*
Period of Graduation Ceremony :

Departement of Mathemathics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
HR. Soebrantas Street No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

There are many problems involving control theory. One of application of optimal control theory, is on inventory problems. For example, a company will produce an items, the results of the production or the items will be stored in a warehouse before being sold to consumers. Therefore it is necessary to control the items contained in a warehouse that called the inventory system. This study discuss the optimal control of the inventory system with an increase in items at discrete time for a single-index descriptor system. The purpose of this study is to obtain the optimal level of production and stability analysis of the level of inventory by increasing items at discrete time for a single-index descriptor system. Based on dynamic functions of discrete inventory model with descriptors and objective functions that was given, Lagrange equations can be formed. Next will be obtained Riccati's equation and the optimal level of production equation. The optimal level of production equation is used to analyze the stability of dynamic equations. The model is said to be stable if the level of inventory has increased. Based on the simulation that have been given, obtained that the level of inventory has increased and the level of production has decreased. This is because there is no consumer demand, so the company must reduce production so that the storage in the warehouse does not exceed the maximum limit.

Keywords: *Descriptor, Inventory, Optimal Control.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Al-hamdulillahirobbil'alamin, puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, sholawat serta salam selalu tercurah kepada junjungan alam Nabi Muhammad *Shalallahu Alaihi Wassalam*, sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan judul "Kendali Optimal dari Sistem Inventori dengan Peningkatan Barang pada Waktu Diskrit untuk Sistem Deskriptor Berindeks Satu" sebagai syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains pada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Penulis telah banyak mendapatkan bantuan, bimbingan, dan petunjuk dari berbagai pihak baik secara langsung maupun tidak langsung dalam menyelesaikan tugas akhir ini, untuk itu dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. K.H. Akhmad Mujahidin, S.Ag., M.Ag., Selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Ari Pani Desvina, S.Si., M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Ibu Fitri Aryani, S.Si., M.Sc., selaku Sekertaris Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
5. Bapak Aprijon, S.Si., M.Ed., selaku Pembimbing Akademik penulis yang telah memberi bimbingan dan dukungan kepada penulis.
6. Bapak Nilwan Andiraja, S.Pd., M.Sc., selaku dosen pembimbing tugas akhir yang telah banyak membantu, meluangkan waktunya untuk berkonsultasi serta menyumbangkan ide-idenya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.

7. Bapak Mohammad Soleh, S.Si., M.Sc., Bapak Aprijon, S.Si., M.Ed., selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun kepada penulis.
8. Seluruh dosen Matematika Fakultas Sains dan Teknologi yang telah membimbing dan memberikan ilmunya kepada penulis.
9. Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada keluarga besar tercinta Ayahanda Waris, Ibunda Sunarti serta saudara-saudara penulis yang telah memberikan dukungan dan do'a sehingga penyelesaian tugas akhir ini berjalan dengan baik.
10. Sahabat penulis Mellani yang telah senantiasa menemani penulis dalam menitih kehidupan kampus, memberikan motivasi dan semangat kepada penulis.
11. Sahabat penulis Della Indriyani dan Isti Latifah Astri yang telah menjadi pendengar setia serta berbagi suka dan duka dengan penulis. Terimakasih karena selalu berada di sisi penulis dan memberikan semangat saat penulis mengalami kesulitan.
12. Rekan-rekan Matematika Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau khususnya angkatan 2016.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan tugas akhir ini masih jauh dari kesempurnaan. Maka dari itu dengan segala kerendahan hati, penulis menerima segala saran serta kritik yang bersifat membangun, agar lebih baik dimasa yang akan datang. Harapan penulis, semoga tugas akhir ini dapat berguna bagi penulis sendiri khususnya dan pembaca pada umumnya.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi. Wabarakatuh.

Pekanbaru, 17 Juni 2020

Risma Sri Wahyuni

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Gambar **Halaman**

DAFTAR SIMBOL

$I(k)$	: Tingkat fungsi inventori
$v(k)$	: Selisih rata-rata fungsi kenaikan dan kemerosotan
$P(k)$	: Nilai rata-rata tingkat produksi
M	: Tingkat inventori maksimum
$\hat{P}$	: Tingkat produksi tujuan
$\hat{I}$	: Tingkat inventori tujuan
h	: Koefisien biaya penyimpanan
K	: Koefisien biaya produksi
H	: Fungsi Hamilton
T_s	: Panjang subinterval
L	: Fungsi Lagrange
$s(k)$	: Persamaan Riccati

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Terdapat banyak permasalahan yang melibatkan teori kendali. Aplikasi teori kendali optimal, salah satunya pada persoalan inventori. Desain kendali optimal pada suatu sistem bertujuan untuk mengendalikan sistem tersebut. Jika suatu perusahaan memproduksi suatu barang, maka hasil produksi atau barang tersebut akan disimpan di suatu pergudangan sebelum dijual ke konsumen. Karena hal itu, muncullah persoalan inventori. Proses pengendalian barang yang terdapat di dalam suatu gudang itulah yang disebut sistem inventori.

Terdapat penelitian terdahulu yang membahas aplikasi teori kendali pada masalah inventori. Dalam jurnal Affandi dkk. (2015) menyatakan bahwa inventori tidak hanya mengalami penurunan akibat kerusakan, tetapi juga dapat mengalami peningkatan. Peningkatan tersebut terjadi pada karena proses produksi terus menerus dilakukan sehingga menyebabkan bertambahnya jumlah inventori. Masalah tersebut diselesaikan dengan teori kendali sehingga akan diperoleh nilai optimal tingkat inventori dan rata-rata produksi optimal.

Bentuk linear kuadratik adalah salah satu bentuk persoalan teori kendali yang sering digunakan. Masalah dasar pada persoalan linear kuadratik yaitu menentukan fungsi kendali dengan persamaan dinamiknya berbentuk linier dan fungsi tujuannya berbentuk kuadratik. Selanjutnya, Sistem deskriptor merupakan generalisasi dari sistem biasa (sistem nonsingular). Terdapat penelitian terdahulu yang dilakukan oleh Musthofa (2014) dalam jurnalnya yang berjudul *Linear Quadratic Regulator* (LQR) untuk Sistem Deskriptor Berindeks Satu. Dalam jurnal tersebut, adapun rumusan masalah yang dicari yaitu kendali optimal pada masalah *Linear Quadratic Regulator* untuk sistem deskriptor berindeks satu. Pada penelitian tersebut, berdasarkan persamaan Hamilton, dibentuk persamaan diferensial Riccati yang selanjutnya dicari solusinya.

Pada jurnal Affandi dkk. (2015) dalam penelitiannya membahas kendali optimal dari sistem inventori dengan peningkatan dan penurunan barang dan jurnal Musthofa (2014) yang membahas *Linear Quadratic Regulator* (LQR) untuk sistem deskriptor berindeks satu dengan menggunakan waktu kontinu, maka penulis tertarik untuk melakukan penelitian mengenai kendali optimal dari sistem inventori dengan peningkatan barang untuk sistem deskriptor berindeks satu dengan menggunakan waktu diskrit. Oleh karena itu, penulis mengambil judul **"Kendali Optimal dari Sistem Inventori dengan Peningkatan Barang pada Waktu Diskrit untuk Sistem Deskriptor Berindeks Satu"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka penulis merumuskan permasalahan yang akan dibahas yaitu "Bagaimana tingkat produksi optimal dan analisa kestabilan tingkat inventori dengan peningkatan barang pada waktu diskrit untuk sistem deskriptor berindeks satu?"

1.3 Batasan Masalah

Agar tujuan dari pembuatan tugas akhir ini dapat terpenuhi dengan baik, maka penulis membuat batasan masalah yaitu sebagai berikut:

1. Menggunakan model analisis inventori untuk peningkatan barang.
2. Sistem dinamik terdiri dari persamaan dinamik dan fungsi tujuan waktu diskrit berhingga.
3. Sistem inventori yang digunakan merupakan sistem deskriptor berindeks satu.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan yang ingin dicapai adalah untuk mendapatkan tingkat produksi optimal dan analisa kestabilan tingkat inventori dengan peningkatan barang pada waktu diskrit untuk sistem deskriptor berindeks satu.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun yang menjadi manfaat dari penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Menambah wawasan, memberikan informasi dan ilmu pengetahuan dalam bidang ilmu matematika khususnya tentang sistem kendali.
2. Untuk mengetahui bagaimana bentuk kendali optimal dari sistem persediaan dengan peningkatan barang.
3. Sebagai *literature* penunjang khususnya bagi mahasiswa yang menempuh mata kuliah teori kendali.

1.6 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan yang dijadikan acuan dalam pembuatan penelitian tugas akhir ini adalah:

BAB I PENDAHULUAN

Memaparkan dan menjelaskan tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan. Dalam bab ini dibahas tentang masalah yang dihadapi dan tujuan diadakannya penelitian ini.

BAB II LANDASAN TEORI

Menjelaskan teori-teori yang digunakan dalam pemecahan masalah yang diteliti dan juga teori-teori tentang kendali optimal waktu diskrit, sistem deskriptor berindeks satu dan sistem inventori untuk kasus peningkatan barang.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini menguraikan dan menjelaskan tahapan-tahapan yang dilakukan dalam pelaksanaan penelitian.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini berisikan pemaparan cara-cara untuk mendapatkan hasil penelitian yang dilakukan.

BAB V PENUTUP

Berdasarkan hasil penelitian yang telah diperoleh maka dapat diambil kesimpulan dan saran yang bermanfaat bagi peneliti dan bagi pembaca.

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1. Matriks

Definisi 2.1 (Howard Anton, 1987) Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri matriks.

Jika A adalah matriks, maka a_{ij} menyatakan entri yang terdapat di dalam baris i dan kolom j dari A. Jadi matriks $m \times n$ secara umum dapat ditulis sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

2.1.1. Matriks Nilpoten

Definisi 2.2 (Perko, 1991) Sebuah matriks berukuran $n \times n$ dikatakan matriks nilpoten berorde k jika $N^k = 0$.

Contoh 2.1 :

Diberikan sebuah matriks $N = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, buktikan bahwa matriks N merupakan matriks nilpoten dan tentukan ordernya.

Penyelesaian :

Untuk membuktikan bahwa N adalah matrik nilpoten, maka akan dicari terlebih dahulu martik N dengan order 2 sebagai berikut:

$$N^2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Didapat N^2 tidak 0 maka matriks N dengan orde 2 bukanlah matriks nilpoten. Selanjutnya akan dicari matriks N dengan orde 3 sebagai berikut:

$$N^3 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Didapat $N^3 = 0$ maka N adalah matriks nilpoten berorde 3.

2.1.2. Matriks Singular dan Nonsingular

Definisi 2.3 (Ruminta, 2009) Matriks singular (*singular matrix*) adalah matriks yang determinannya bernilai nol.

Contoh 2.2 :

Diberikan sebuah matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tentukan apakah matriks A singular atau tidak.

Penyelesaian :

Diketahui$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, maka determinan dari matriks A adalah sebagai berikut:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (2 \times 1 \times 0) + (3 \times 5 \times 0) + (2 \times 4 \times 0) - (3 \times 4 \times 0)$$

$$-(2 \times 5 \times 0) - (2 \times 1 \times 0)$$

$$= 0$$

Determinan matriks A adalah 0 maka matriks A adalah matriks singular.

Contoh 2.3 :

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Tentukan apakah matriks A singular atau tidak.

Penyelesaian :

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ maka determinan dari matriks A adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2 \times 2 \times 2) + (2 \times 2 \times 2) + (1 \times 1 \times 1) - (2 \times 1 \times 2) \\ &\quad -(2 \times 2 \times 1) - (1 \times 2 \times 2) \\ &= 5 \end{aligned}$$

Determinan matriks A tidak sama dengan nol, maka matriks A adalah matriks nonsingular.

2.2. Bentuk Kuadratik

Pada bagian ini akan dijelaskan bentuk kuadratik suatu matriks yang kemudian ditentukan sifat definitnya. Diawali dari bentuk kuadratik sebagai berikut:

$$f(x) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} \tag{2.2}$$

dan matriks A sebagai matriks ukuran $n \times n$, untuk $x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$ maka dari Persamaan (2.2) dapat diuraikan menjadi:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} &= [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{31} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{(n-1)n}x_{n-1}x_1 + a_{nn}x_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \end{aligned} \tag{2.3}$$

dengan $\boldsymbol{x} \in R^n$ dan $A \in R^{n \times n}$. Persamaan (2.3) merupakan bentuk persamaan kuadratik dengan n variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ untuk $i \leq j, j \leq n$ dan $a_{ij} \in R$.

Contoh 2.4 :

Bentuklah notasi sigma berikut menjadi bentuk kuadratik

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} c_{ij}x_ix_j$$

Penyelesaian :

Notasi sigma dapat diuraikan seperti berikut :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} c_{ij}x_ix_j &= \sum_{i=1}^{2}\{c_{i1}x_ix_1 + c_{i2}x_ix_2\}\\ &= (c_{11}x_1x_1 + c_{12}x_1x_2) + (c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2x_2)\\ &= x_1(x_1c_{11} + x_2c_{21}) + x_2(x_1c_{12} + x_2c_{22})\\ &= [x_1c_{11} + x_2c_{21} \quad x_1c_{12} + x_2c_{22}]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\\ &= [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Contoh 2.5 :

Jabarkan bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ dengan matriks $A = \begin{bmatrix}3 & 3\\3 & 3\end{bmatrix}$ menjadi notasi sigma.

Penyelesaian :

Notasi sigma dapat diuraikan seperti berikut :

Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix}3 & 3\\3 & 3\end{bmatrix}$ dan $x = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$, maka

$$\begin{aligned}x^TAx &= [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix}3 & 3\\3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}3x_1 + 3x_2\\3x_1 + 3x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\\ &= [(3x_1 + 3x_2)x_1 + (3x_1 + 3x_2)x_2]\\ &= 3x_1^2 + 3x_1x_2 + 3x_2x_1 + 3x_2^2\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{2}\{3x_ix_1 + 3x_ix_2\}\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} 3x_ix_j\end{aligned}$$

Menurut (**Lewis, 1995**) sifat definit dapat diperoleh dengan menghitung nilai eigen dari matriks A. Jika A matriks simetri berukuran $n \times n$ dan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah nilai eigen dari matriks A maka bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ dikatakan:

1. Definit positif jika semua $\lambda_i > 0$, untuk $i \in \{1,2,\dots,n\}$.
2. Semi definit positif jika $\lambda_i \geq 0$, untuk suatu $i \in \{1,2,\dots,n\}$ dan $\exists\lambda_j = 0$ untuk suatu $j \in \{1,2,\dots,n\}$.
3. Definit negatif jika semua $\lambda_i < 0$ untuk $i \in \{1,2,\dots,n\}$.
4. Semi definit positif jika $\lambda_i \leq 0$, untuk suatu $i \in \{1,2,\dots,n\}$ dan $\exists\lambda_j = 0$ untuk suatu $j \in \{1,2,\dots,n\}$.

Jika $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ tidak memenuhi keempat sifat di atas, maka bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ disebut indefinite. Selanjutnya untuk lebih memahami bentuk diatas, diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.6 :

Berdasarkan Contoh 2.5, tentukan sifat definit dari matriks A.

Penyelesaian :

Nilai eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ adalah

$$\text{Det}\,(\lambda I - A) = 0$$

$$\text{Det}\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$[(\lambda - 3)(\lambda - 3) - 9] = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda = 0$$

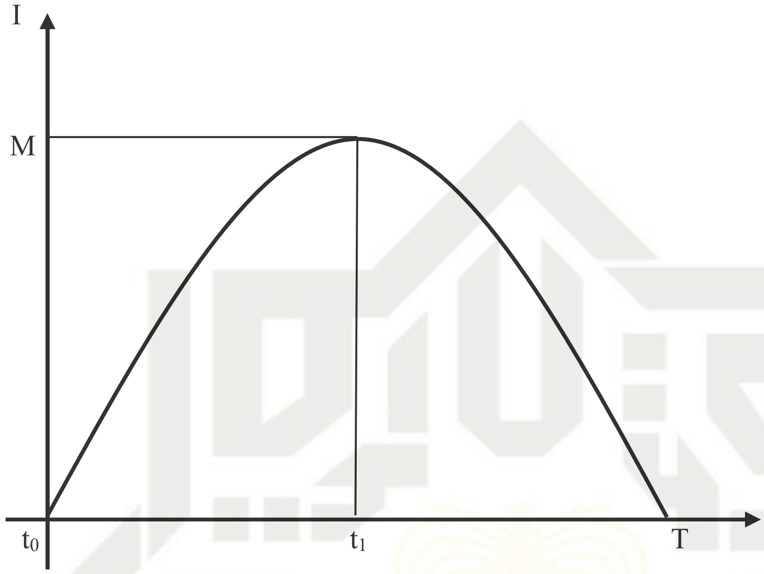
diperoleh nilai eigennya yaitu

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 6$$

karena $\lambda_i \geq 0,\ i = 1,2$ maka dapat disimpulkan bahwa bentuk kuadratik di atas memiliki sifat semi definit positif.

2.3. Model Inventori

Bagian ini merupakan model inventori barang yang mengalami peningkatan dan penurunan. Pembentukan model ini didasarkan pada sistem dimana akan ditinjau pada saat inventori barang mengalami peningkatan dan penurunan barang. Di asumsikan bahwa fase pertama dari 0 hingga t_1 untuk tingkat inventori yang meningkat dan fase kedua dari t_1 hingga T untuk inventori yang menurun. Berikut ini digambarkan model inventori yang mengalami kenaikan dan penurunan barang:



Gambar 2.1 Grafik Model Inventori Barang

Berdasarkan batasan masalah yang telah diberikan, maka yang dibahas pada penelitian ini hanya untuk kasus peningkatan barang. Oleh karena itu, kurva pada Gambar 2.1 yang ditunjukkan untuk selang waktu $[0, t_1]$. Selanjutnya berdasarkan jurnal yang dibahas Affandi (2015) maka didefinisikan persamaan differensial dinamik untuk kasus peningkatan barang yaitu:

$$\dot{I} = P(t) + v(t)I(t) \tag{2.4}$$

Lebih lanjut, untuk menjamin bahwa tingkat inventori meningkat dari 0 hingga t_1 maka berlaku:

$$P(t) + v(t)I(t) > 0 \tag{2.5}$$

dengan

$$v(t) = m(t) - \theta(t) \tag{2.6}$$

dimana:

$I(t)$: tingkat fungsi inventori

$v(t)$: selisih rata-rata fungsi kenaikan dan kemerosotan

$m(t)$: rata-rata fungsi kenaikan

$\theta(t)$: rata-rata fungsi kemerosotan
$P(t)$: nilai rata-rata tingkat produksi
M : tingkat inventori maksimum

Selanjutnya fungsi tujuan yang akan diminimumkan yaitu:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T \left(h\left(I(t) - \hat{I}\right)^2 + k\left(P(t) - \hat{P}\right)^2\right) \tag{2.7}$$

dengan:
$\hat{P}$: tingkat produksi tujuan
$\hat{I}$: tingkat inventori tujuan
h : koefisien biaya penyimpanan
k : koefisien biaya produksi

2.4. Kestabilan Sistem Diskrit

Definisi 2.5 (Ogata, 1995) Diberikan sistem persamaan waktu diskrit

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A(k)\boldsymbol{x}(k) \tag{2.8}$$

dengan $\boldsymbol{x}(k)$ adalah vektor *state* dan A adalah matriks nonsingular $n \times n$, untuk titik ekuilibrium $\overline{\boldsymbol{x}}(k) = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika diberikan matriks Q simetri dan definit positif, terdapat matriks $S(k)$ simetri dan definit positif yang memenuhi:

$$A^T(k)S(k)A(k) - S(k) = -Q(k) \tag{2.9}$$

Contoh 2.7 :

Tentukan kestabilan dari persamaan sistem berikut:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Kestabilan dari persamaan sistem di atas dapat dicari dengan, dimisalkan matriks Q adalah matriks identitas maka dapat dilakukan langkah sebagai berikut:

$$A^T(k)S(k)A(k) - S(k) = -Q(k)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.25s_{22} - s_{11} & -1.5s_{12} + 0.5s_{22} \\ -1.5s_{12} + 0.5s_{22} & s_{11} - 2s_{12} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan matriks di atas, diperoleh 3 persamaan sebagai berikut:

$$0.25s_{22} - s_{11} = -1$$

$$-1.5s_{12} + 0.5s_{22} = 0$$

$$s_{11} - 2s_{12} = -1$$

Sehingga kita dapatkan nilai $s_{11} = \frac{11}{5}$, $s_{12} = \frac{8}{5}$, $s_{22} = \frac{24}{5}$ dan dapat dibentuk matriks S yaitu:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{24}{5} \end{bmatrix}$$

Kemudian dicari nilai eigen dari matriks S sebagai berikut:

$$\text{Det}\,(\lambda I - S) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{24}{5} \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - \frac{11}{5} & -\frac{8}{5} \\ -\frac{8}{5} & \lambda - \frac{24}{5} \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\lambda - \frac{11}{5}\right)\left(\lambda - \frac{24}{5}\right) - \frac{64}{25} = 0$$

maka diperoleh nilai eigennya,

$$\lambda_1 = 7.31 \text{ dan } \lambda_2 = -0.306$$

karena $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$, maka dapat disimpulkan matriks di atas adalah matriks indefinite dan tidak stabil.

2.5. Kendali Optimal Waktu Diskrit

Berdasarkan **Lewis, 1995** diberikan sistem kendali waktu diskrit sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A(k)\boldsymbol{x}(k) + B(k)\boldsymbol{u}(k) \tag{2.10}$$

Selanjutnya diketahui fugsi tujuan sebagai berikut:

$$J = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(N)\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[\boldsymbol{x}^T(k)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{u}^T(k)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(k)] \tag{2.11}$$

Berdasarkan **Ogata 1995,** dengan menggunakan pengali Lagrange $\boldsymbol{\lambda}(1), \boldsymbol{\lambda}(2), \dots, \boldsymbol{\lambda}(N)$, kita definisikan persamaan baru dengan indeks L sebagai berikut

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(N)\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\{ [\boldsymbol{x}^T(k)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{u}^T(k)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(k)] \\ +\boldsymbol{\lambda}^T(k+1)[A(k)\boldsymbol{x}(k) + B(k)\boldsymbol{u}(k) - \boldsymbol{x}(k+1)] \end{aligned} \tag{2.12}$$

Berdasarkan Pesamaan (2.12) dapat diperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\boldsymbol{\lambda}}(k+1)} = \boldsymbol{0}, \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\boldsymbol{x}}(k)} = \boldsymbol{0}, \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\boldsymbol{u}}(k)} = \boldsymbol{0}, \tag{2.15}$$

Maka Persamaan (2.13), (2.14) dan (2.15) dapat diperoleh sebagai berikut

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\boldsymbol{\lambda}}(k+1)} = \boldsymbol{0}; \qquad A(k)\boldsymbol{x}(k) + B(k)\boldsymbol{u}(k) - \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{0} \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\boldsymbol{x}}(k)} = \boldsymbol{0}; \qquad \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k) + A^T(k)\boldsymbol{\lambda}(k+1) - \boldsymbol{\lambda}(k) = \boldsymbol{0} \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\boldsymbol{u}}(k)} = \boldsymbol{0}; \qquad \boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(k) + B^T(k)\boldsymbol{\lambda}(k+1) = \boldsymbol{0} \tag{2.18}$$

Selanjutnya dengan menyelesaikan persamaan-persamaan yang telah diperoleh, maka Persamaan (2.16) dapat ditulis

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A(k)\boldsymbol{x}(k) + B(k)\boldsymbol{u}(k) \tag{2.19}$$

dan berdasarkan Persamaan (2.17), diperoleh

$$\boldsymbol{\lambda}(k) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k) + A^T(k)\boldsymbol{\lambda}(k+1) \tag{2.20}$$

Berdasarkan Persamaan (2.18) maka dapat diperoleh

$$\boldsymbol{u}(k) = -\boldsymbol{R}^{-1}B^T(k)\boldsymbol{\lambda}(k+1) \tag{2.21}$$

Kemudian substitusi Persamaan (2.21) ke Persamaan (2.19)

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A(k)\boldsymbol{x}(k) - B(k)\boldsymbol{R}^{-1}B^T(k)\boldsymbol{\lambda}(k+1) \tag{2.22}$$

Menurut (**Ogata, 1995**) asumsikan $\boldsymbol{\lambda}(k)$ dengan bentuk sebagai berikut :

$$\boldsymbol{\lambda}(k) = \boldsymbol{S}(k)\boldsymbol{x}(k) \tag{2.23}$$

Substitusi Persamaan (2.23) ke Persamaan (2.20), maka didapat

$$\boldsymbol{S}(k)\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k) + A^T(k)\boldsymbol{S}(k+1)\boldsymbol{x}(k+1) \tag{2.24}$$

dan substitusi Persamaan (2.23) ke Persamaan (2.22), sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{x}(k+1) = A(k)\boldsymbol{x}(k) - B(k)\boldsymbol{R}^{-1}B^T(k)\boldsymbol{S}(k+1)\boldsymbol{x}(k+1) \tag{2.25}$$

Berdasarkan Persamaan (2.25) diperoleh

$$A(k)\boldsymbol{x}(k) = [\boldsymbol{I} + B(k)\boldsymbol{R}^{-1}B^T(k)\boldsymbol{S}(k+1)]\boldsymbol{x}(k+1) \tag{2.26}$$

Persamaan (2.26) dapat ditulis

$$\boldsymbol{x}(k+1) = [\boldsymbol{I} + B(k)\boldsymbol{R}^{-1}B^T(k)\boldsymbol{S}(k+1)]^{-1}A(k)\boldsymbol{x}(k) \tag{2.27}$$

Selanjutnya substitusi Persamaan (2.27) ke Persamaan (2.24)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}(k)\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k) + A^T(k)\boldsymbol{S}(k+1)\\ [\boldsymbol{I} + B(k)\boldsymbol{R}^{-1}B^T(k)\boldsymbol{S}(k+1)]^{-1}A(k)\boldsymbol{x}(k)\end{aligned} \tag{2.28}$$

Berdasarkan Persamaan (2.28) dapat diperoleh

$$\boldsymbol{S}(k) = \boldsymbol{Q} + A^T(k)\boldsymbol{S}(k+1)[\boldsymbol{I} + B(k)\boldsymbol{R}^{-1}B^T(k)\boldsymbol{S}(k+1)]^{-1}A(k) \tag{2.29}$$

Persamaan (2.29) dapat dimodifikasi dengan menggunakan lemma invers matriks sebagai berikut:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BD})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{DA}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{DA}^{-1}$$

dimana

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{B}=B(k)\boldsymbol{R}^{-1}, \qquad \boldsymbol{D}=B^T(k)\boldsymbol{S}(k+1)$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{I}+B(k)\boldsymbol{R}^{-1}B^T(k)\boldsymbol{S}(k+1)]^{-1} &= \boldsymbol{I}-\ B(k)\boldsymbol{R}^{-1}[I+B^T(k)\boldsymbol{S}(k+1)\\ &\quad B(k)\boldsymbol{R}^{-1}]^{-1}B^T(k)\boldsymbol{S}(k+1)\\ &= \boldsymbol{I}-\ B(k)[\boldsymbol{R}+B^T(k)\boldsymbol{S}(k+1)B(k)]^{-1}\\ &\quad B^T(k)\boldsymbol{S}(k+1)\end{aligned}$$

Sehingga Persamaan (2.29) menjadi

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}(k) &= \boldsymbol{Q}+A^T(k)\boldsymbol{S}(k+1)A(k)-A^T(k)\boldsymbol{S}(k+1)\,B(k)\\ &\quad [\boldsymbol{R}+B^T(k)\boldsymbol{S}(k+1)B(k)]^{-1}B^T(k)\boldsymbol{S}(k+1)A(k)\end{aligned} \tag{2.30}$$

Selanjutnya Persamaan (2.20) dapat ditulis

$$\boldsymbol{\lambda}(k+1)=\left(A^T(k)\right)^{-1}[\boldsymbol{\lambda}(k)-\boldsymbol{Qx}(k)] \tag{2.31}$$

Berdasarkan Persamaan (2.31) dan Persamaan (2.23), maka Persamaan (2.21) menjadi sabagai berikut:

$$\boldsymbol{u}(k)=-\boldsymbol{R}^{-1}B^T(k)\left(A^T(k)\right)^{-1}[\boldsymbol{S}(k)\boldsymbol{x}(k)-\boldsymbol{Qx}(k)]$$

$$=-\boldsymbol{R}^{-1}B^T(k)\left(A^T(k)\right)^{-1}[\boldsymbol{S}(k)-\boldsymbol{Q}]\boldsymbol{x}(k) \tag{2.32}$$

$$=-\boldsymbol{K}(k)\,\boldsymbol{x}(k) \tag{2.33}$$

dimana

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}^{-1}B^T(k)\left(A^T(k)\right)^{-1}[\boldsymbol{S}(k)-\boldsymbol{Q}] \tag{2.34}$$

2.6. Kendali Optimal Waktu Diskrit dengan Sistem Deskriptor

Pada bagian ini, dibahas mengenai kendali optimal waktu diskrit dengan sistem deskriptor untuk kendali lingkar tertutup. Didefinisikan Persamaan dinamik dengan deskriptor sebagai berikut:

$$E\boldsymbol{x}(k+1)=A(k)\boldsymbol{x}(k)+B(k)\boldsymbol{u}(k), \qquad x(0)=x_0 \tag{2.35}$$

dengan $E, A \in R^{(n\times n)},\ Rank(E) = n,\ B \in R^{(n\times m)},\ \mathbf{u} \in R^m$ adalah fungsi kendali yang diberikan pada Persamaan (2.35). Fungsi tujuan yaitu:

$$J = \boldsymbol{x}^T(k)\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}(k) + \sum_{0}^{N}[\boldsymbol{x}^T(k)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{u}^T(k)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(k)] \tag{2.36}$$

Persamaan (2.35) dapat dirubah kebentuk umum menjadi persamaan kendali lingkar tertutup linier kuadratik dengan menggunakan teorema berikut:

Teorema 2.1 (Gantmacher, 1959) Jika Persamaan deskriptor (2.35) berbentuk umum maka terdapat dua matrik nonsingular X dan Y sedemikian sehingga $Y^TEX = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ o & N \end{bmatrix}$ dan $Y^TAX = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ o & I_r \end{bmatrix}$ dengan A_1 adalah matriks dalam Jordan yang elemen-elemennya nilai eigen dari A, I_n dan I_r adalah matriks identitas dan N adalah matriks nilpoten juga dalam bentuk Jordan.

Berdasarkan Teorema 2.1, maka terlebih dahulu didefinisikan

$$\boldsymbol{x}(k) = X_1x_1(k) + X_2x_2(k) \tag{2.37}$$

dengan $X = [X_1 \quad X_2]$, $Y = [Y_1^T \quad Y_2^T]$, selanjutnya Persamaan (2.35) menjadi sebagai berikut:

$$Y^TE\boldsymbol{x}(k+1) = Y^TA(k)\boldsymbol{x}(k) + Y^TB(k)\boldsymbol{u}(k) \tag{2.38}$$

Berdasarkan Persamaan (2.37) maka Persamaan (2.38) menjadi:

$$\begin{bmatrix} I_N & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + Y^TB(k)\boldsymbol{u}(k) \tag{2.39}$$

Selanjutnya berdasarkan jurnal Muhammad Wakhid Mustapa (2014) diketahui bahwa indeks dari sistem deskriptor (2.35) dinyatakan dengan derajat kenilpotenan k dari matriks N. Berdasarkan jurnal tersebut diketahui bahwa sistem berindeks satu maka Persamaan (2.39) menjadi:

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + Y^TB(k)\boldsymbol{u}(k) \tag{2.40}$$

Selanjutnya berdasarkan Persamaan (2.37) diperoleh $\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} := X^{-1}x(k)$ sehingga,

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = X^{-1}x(0) \tag{2.41}$$

Berdasarkan Persamaan (2.40) dan (2.41) maka dapat disusun persamaan dinamik yaitu:

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + Y^T B(k)\boldsymbol{u}(k), \\ \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(0) \end{bmatrix} = X^{-1}x(0) \end{gathered} \tag{2.42}$$

Persamaan (2.42) dapat diuraikan sebagai berikut:

$$x_1(k+1) = A(k)x(k) + Y_1 B(k)\boldsymbol{u}(k), \qquad x_1(0) = [I_n \quad 0]X^{-1}x(0) \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned} x_2(k) &= -[0 \quad I_r]Y_2 B(k)\boldsymbol{u}(k) \\ &= -Y_2 B(k)\boldsymbol{u}(k) \end{aligned} \tag{2.44}$$

Berdasarkan Persamaan (2.37) dan Persamaan (2.40) fungsi tujuan (2.36) dapat ditulis sebagai berikut:

$$J = \boldsymbol{x}^T(k)\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}(k) + \sum_{k=0}^{N-1}\left[[x_1^T(k) \quad x_2^T(k)] X^T \boldsymbol{Q} X \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \boldsymbol{u}^T(k)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(k) \right]$$

$$\begin{aligned} J = {} & \boldsymbol{x}^T(k)\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}(k) \\ & + \sum_{k=0}^{N-1}\left[\left[x_1^T(k) \quad \left(-Y_2 B(k)\boldsymbol{u}(k)\right)^T\right] \begin{bmatrix} X_1^T \\ X_2^T \end{bmatrix} \boldsymbol{Q}[X_1 \quad X_2] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ -Y_2 B(k)\boldsymbol{u}(k) \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. \boldsymbol{u}^T(k)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(k) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J = {} & \boldsymbol{x}^T(k)\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}(k) \\ & + \sum_{k=0}^{N-1}\left[[x_1^T(k) \quad \boldsymbol{u}^T(k)] \begin{bmatrix} X_1^T\boldsymbol{Q}X_1 & -X_1^T\boldsymbol{Q}X_2Y_2B \\ -X_2^TY_2^TB^T\boldsymbol{Q}X_1 & X_2^TY_2^TB^T\boldsymbol{Q}X_2Y_2B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \boldsymbol{u}(k) \end{bmatrix} + \right. \\ & \left. \boldsymbol{u}^T(k)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(k) \right] \end{aligned}$$

$$J = \boldsymbol{x}^T(k)\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}(k) + \sum_{k=0}^{N-1}\left[\begin{bmatrix} x_1^T(k) & \boldsymbol{u}^T(k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q & V \\ V^T & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ \boldsymbol{u}(k) \end{bmatrix} + \boldsymbol{u}^T(k)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(k)\right] \tag{2.45}$$

Persamaan (2.43) dan Persamaan (2.45) maka dibentuk fungsi Hamilton yaitu:

$$H = \begin{bmatrix} x_1^T(k) & \boldsymbol{u}^T(k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q & V \\ V^T & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ \boldsymbol{u}(k) \end{bmatrix} + \lambda^T(k+1)\big(A_1\boldsymbol{x}(k) + Y_1B(k)\boldsymbol{u}(k)\big)$$

$$H = [x_1^T(k)Qx_1(k) + u^T(k)V^Tx_1(k) + x_1^T(k)V\boldsymbol{u}(k) + u^T(k)R\boldsymbol{u}(k)] + \lambda^T(k+1)\big(A_1\boldsymbol{x}(k) + Y_1B(k)\boldsymbol{u}(k)\big) \tag{2.46}$$

Berdasarkan Persamaan (2.46) maka diperoleh:

Persamaan *state* : $x(k+1) = \frac{\partial H}{\partial \lambda(k+1)} = A_1\boldsymbol{x}(k) + Y_1B(k)\boldsymbol{u}(k)$ (2.47)

Persamaan *costate* : $\lambda(k) = \frac{\partial H}{\partial x_1(k)} = 2Qx_1(k) + 2V\boldsymbol{u}(k) + A_1^T\lambda(k)$ (2.48)

Persamaan *stationer* : $0 = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}(k)} = 2V^Tx_1(k) + 2R\boldsymbol{u}(k) + B^T(k)Y_1^T\lambda(k)$ (2.49)

Berdasarkan Persamaan (2.49) diperoleh

$$\boldsymbol{u}(k) = -R^{-1}\left(V^Tx_1(k) + \frac{1}{2}B^T(k)Y_1^T\lambda(k)\right) \tag{2.50}$$

Selanjutnya, fungsi kendali pada Persamaan (2.50) disubsitusikan ke persamaan dinamik diskrit pada Persamaan (2.35) kemudian dianalisa kestabilannya.

BAB III
METODOLOGI

Penulisan tugas akhir ini membahas kendali optimal dari sistem inventori dengan peningkatan barang pada waktu diskrit untuk sistem deskriptor berindeks satu. Berikut tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini:

1. Diberikan model inventori waktu diskrit dengan persamaan sebagai berikut:

$$I(k+1) = a(k)I(k) + T_s P(k) \tag{3.1}$$

dengan $a(k) = [1 + T_s v(k)]$.

2. Selanjutnya diberikan fungsi dinamik model inventori diskrit dengan deskriptor sebagai berikut:

$$eI(k+1) = a(k)I(k) + T_s P(k) \tag{3.2}$$

kemudian dibentuk persamaan dinamik baru yaitu:

$$I_1(k+1) = a(k)I_1(k) + Y_1 T_s P(k) \tag{3.3}$$

dengan fungsi tujuan

$$J = \frac{1}{2}\sum_{0}^{N}\left[h\left(I_1(k) - \hat{I}\right)^2 + K\left(P(k) - \hat{P}\right)^2\right] \tag{3.4}$$

3. Berdasarkan persamaan dinamik baru dan fungsi tujuan tersebut, maka dibentuk persamaan Lagrange.
4. Selanjutnya berdasarkan langkah no.3, dibentuk persamaan *Riccati* waktu diskrit.
5. Berdasarkan langkah no. 4, kemudian dibentuk fungsi kendali optimal.
6. Kemudian dianalisa kestabilannya.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada Bab IV, maka akan diperoleh persamaan dinamik baru dari sistem inventori dengan peningkatan barang pada waktu diskrit untuk sistem deskriptor berindeks satu sebagai berikut:

$$I_1(k+1) = a(k)I_1(k) + Y_1 T_s P(k)$$

dengan fungsi tujuan

$$J = \frac{1}{2}\sum_{0}^{N}\left[h\left(I_1(k) - \hat{I}\right)^2 + K\left(P(k) - \hat{P}\right)^2\right]$$

Berdasarkan persamaan dinamik dan fungsi tujuan tersebut, dibentuk persamaan Lagrange. Selanjutnya diperoleh vektor kendali optimal $P(k)$

$$P(k) = -\frac{Y_1 T_s}{K}\left[\frac{s(k) - h}{a(k)}\left(I_1(k) - \hat{I}\right)\right] + \hat{P}$$

Kestabilan model diperoleh dari analisa grafik tingkat inventori pada persamaan $I_1(k+1) = a(k)I_1(k) + Y_1 T_s P(k)$. Hasil analisa grafik yang diperoleh dari contoh adalah bahwa tingkat inventori mengalami kenaikan, dikarenakan tidak adanya permintaan dari konsumen. Oleh karena itu perusahaan mengurangi produksi agar penyimpanan di gudang tidak melebihi batas maksimum penyimpanannya.

5.2 Saran

Tugas akhir ini memaparkan tentang masalah sistem inventori dengan peningkatan barang pada waktu diskrit untuk sistem deskriptor berindeks satu dengan menggunakan aplikasi teori kendali dan menganalisa kestabilannya. Saran yang ingin disampaikan penulis adalah :

a. Dilakukan penelitan mengenai kasus inventori yang mengalami penurunan untuk sistem deskriptor.
b. Sistem deskriptor dapat dikembangkan dengan sistem lainnya

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. "*Aljabar Linear Elementer*". Edisi ke-5. Jakarta: Erlangga. 1987.

Affandi, Pardi. dkk.. "Kendali Optimal dari Sistem Inventori dengan Peningkatan dan Penurunan Barang". *Jurnal MIPA*. 79-88. 2015.

Lewis, Frank L. "*Optimal Control*". Toronto: Jhon Wiley & Son, Inc. 1995.

Musthofa, Muhammad Wakhid. "Linear Quadratic Regulator (LQR) untuk Sisten Deskriptor Berindeks Satu". *Jurnal Konvergensi*. Vol. 4, No.1. 2014.

Ogata. "*Discrette-Time Control System*". New Jersey : Prentice-Hall, Inc. 1995.

Perko, Lawrence. "*Differensial Equation and Dynamical System*". Spinger Verlag: New York. 1991.

Ruminta. "*Matriks Persamaan Linear dan Pemograman Linear*". Bandung: Rekayasa Sains. 2009.

Sa'adah, Nurus. dkk. "Penerapan Prinsip Maksimum Pontryagin Pada Sistem Inventori-Produksi". *Prosiding Seminar Nasional Sains V*. Bogor. 2012.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Pekanbaru pada tanggal 31 Juli 1998, anak terakhir dari lima bersaudara pasangan Bapak Waris Surip Suseno dan Ibu Sunarti. Penulis menyelesaikan pendidikan formal Sekolah Dasar di SDN 018 Pekanbaru pada tahun 2010. Penulis melanjutkan pendidikan pada tingkat Sekolah Menengah Pertama di SMPN 6 Pekanbaru dan tamat pada tahun 2013. Kemudian Penulis menyelesaikan pendidikan pada tingkat Sekolah Menengah Atas di SMAN 3 Pekanbaru pada tahun 2016.

Setelah menyelesaikan pendidikan pada tingkat Sekolah Menengah Atas, Penulis melanjutkan studi ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau dan Penulis mengambil program studi Matematika pada fakultas Sains dan Teknologi. Pada bulan Februari 2019, Penulis melaksanakan Kerja Praktek di Balai Pemasyarakatan Klas II Pekanbaru dan melaksanakan seminar Kerja Praktek pada tanggal 4 Juli 2019. Pada bulan Juli 2019 hingga Agustus 2019, Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Tanjung Belit Kecamatan Kampar Kiri Hulu Kabupaten Kampar.