TRACE MATRIKS KETETANGGAAN nxn BERPANGKAT DUA DAN NEGATIF DUA DARI GRAF RODA

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

Oleh :

VINA RAMADHANI PUTRI
11654200985

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2020

LEMBAR PERSETUJUAN

TRACE MATRIKS KETETANGGAAN $n \times n$ BERPANGKAT DUA DAN NEGATIF DUA DARI GRAF RODA

TUGAS AKHIR

Oleh:

VINA RAMADHANI PUTRI
11654200985

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan tugas akhir

di Pekanbaru, 24 Juni 2020

Ketua Program Studi	Pembimbing
Ari Pani Desvina, M.Sc.	**Fitri Aryani, M.Sc.**
NIP. 19811225 200604 2 003	**NIP. 19770913 200604 2 002**

LEMBAR PENGESAHAN

TRACE MATRIKS KETETANGGAAN $n \times n$ BERPANGKAT DUA DAN NEGATIF DUA DARI GRAF RODA

TUGAS AKHIR

Oleh:

VINA RAMADHANI PUTRI
11654200985

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 24 Juni 2020

Pekanbaru, 24 Juni 2020
Mengesahkan,

Dekan	Ketua Program Studi
Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag.	**Ari Pani Desvina, M.Sc.**
NIP. 19660604 199203 1 004	**NIP. 19811225 200604 2 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua : **Dr. Rado Yendra, M.Sc.**

Sekretaris : **Fitri Aryani, M.Sc.**

Anggota I : **Corry Corazon Marzuki, M.Si.**

Anggota II : **Zukrianto, M.Si.**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebut sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh tugas akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjam tugas akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebut sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh tugas akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjam tugas akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam tugas akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan di dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 24 Juni 2020
Yang membuat pernyataan,

VINA RAMADHANI PUTRI
NIM: 11654200985

LEMBAR PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin

Rasa syukur penulis yang sangat besar

Kepada Allah SWT atas rahmat dan

Karunia-Nya kepada penulis

untuk kelancaran penyusunan skripsi ini…

kepada Nabi Muhammad SAW

yang memberikan

suri tauladan yang baik kepada penulis…

Ku persembahkan karya ini sebagai tanda baktiku

kepada Ayah dan Ibu tercinta

Untuk do'a yang tidak pernah putus

Untuk pengorbanan, cinta dan kasih sayang yang tulus

Untuk semua saudara yang selalu memotivasi

Serta semua rekan-rekan

yang ikut berperan membantu penulis

Saya ucapkan terimaksih

sebanyak-banyaknya

TRACE MATRIKS KETETANGGAAN nxn BERPANGKAT DUA DAN NEGATIF DUA DARI GRAF RODA

VINA RAMADHANI PUTRI
11654200985

Tanggal Sidang : 24 Juni 2020
Tanggal Wisuda : 2020

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini bertujuan untuk mendapatkan bentuk umum *trace* $(A_n)^2$ dan *trace* $(A_n)^{-2}$ dengan A_n adalah matriks ketetanggaan dari graf roda. Dengan mengalikan A_n sebanyak dua kali dan menggunakan definisi *trace*, maka diperoleh *trace* $(A_n)^2$. Selanjutnya hal yang sama berlaku untuk *trace* $(A_n)^{-2}$, tetapi terlebih dahulu dicari $(A_n)^{-1}$ yaitu invers dari A_n. Hasil yang diperoleh adalah bentuk umum *trace* $(A_n)^2$dengan $n \geq 6$ dan *trace* $(A_n)^{-2}$ dengan $n \equiv 0 \ mod\ 4$. Kemudian bentuk umum *trace* $(A_n)^2$ dan *trace* $(A_n)^{-2}$ diaplikasikan dalam bentuk contoh soal.

Kata kunci: determinan, graf roda, invers, matriks ketetanggaan, *trace*.

TRACE OF TWO AND NEGATIVE TWO POWER OF ADJACENCY MATRIX nxn FROM WHEEL GRAPH

VINA RAMADHANI PUTRI
11654200985

Date Of Final Exam: June, 24th 2020
Graduation Ceremony Priod: 2020

Study Program of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

This final script aims to get the general form of trace $(A_n)^2$ and trace $(A_n)^{-2}$, where A_n is the adjacency matrix of awheel graph. By multiplying A_n twice and using the definition of trace, trace $(A_n)^2$ is obtainted. The same method is used to obtained trace $(A_n)^{-2}$, but in this case $(A_n)^{-1}$ should be obtained first, which is the inverse of A_n. The results obtained are the general form of trace $(A_n)^2$ with $n \geq 6$ and trace $(A_n)^{-2}$ with $n \equiv 0 \; mod \; 4$. Finally, the general form of trace $(A_n)^2$ and trace $(A_n)^{-2}$ are applied in example problems.

Keywords: *adjacency matrix, determinant, inverse, trace, wheel graf.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Alhamdulillahirabbil'alamiin. Puji syukur kepada Allah SWT karena atas rahmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul **"*Trace* Matriks Ketetanggaan $n\,x\,n$ Berpangkat Dua dan Negatif Dua dari Graf Roda".** Shalawat beserta salam juga selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, semoga kita semua mendapat syafaat-nya. Penulisan tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Dalam penyusunan tugas akhir ini penulis banyak sekali mendapatkan bimbingan, arahan, dan masukan dari berbagai pihak. Penulis mengucapkan terima kasih khususnya kepada kedua orang tua tercinta Ayahanda Bismark dan Ibunda Putrianti yang selalu mendo'akan dan melimpahkan kasih sayang kepada penulis. Selain itu, penulis juga mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Akhmad Mujahidin, S.Ag, M.Ag., selaku Rektor UIN Suska Riau.
2. Bapak Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika.
4. Ibu Fitri Aryani, M.Sc., selaku Pembimbing Tugas Akhir penulis yang tak pernah bosan memberikan arahan, dukungan, motivasi serta semangat sehingga Tugas Akhir saya dapat terselesaikan.
5. Ibu Rahmadeni, M.Si., selaku Pembimbing Akademik.
6. Ibu Corry Corazon Marzuki, M.Si. selaku Penguji I yang telah banyak memberikan kritik serta saran kepada penulis.
7. Bapak Zukrianto, M.Si., selaku Penguji II yang telah banyak memberikan kritik serta saran kepada penulis.
8. Semua Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika yang telah memberikan ilmu dengan sabar kepada penulis.

9. Teman-teman, seperjuangan di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi khususnya angkatan 2016 yang telah memberikan dukungan, masukan serta pengalaman selama perkuliahan.
10. Semua pihak yang telah memberi bantuan dari awal penyusunan tugas akhir hingga selesai, yang tidak dapat penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tugas akhir ini masih terdapat kesalahan dan kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini. Semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi kita semua. *Aamiin ya Rabbal'alamiin*.

Pekanbaru, 24 Juni 2020

Penulis

Vina Ramadhani Putri

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Gambar **Halaman**

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matriks ketetanggaan merupakan bentuk representasi dari sebuah graf terhubung. Menurut Munir pada tahun 2005, misalkan G adalah matriks dwimatra yang berukuran $n\, x\, n$. Bila matriks tersebut dinamakan $A = [a_{ij}]$, maka $a_{ij} = 1$ jika simpul i dan j bertetangga, sebaliknya $a_{ij} = 0$ jika simpul i dan j tidak bertetangga. Matriks ketetanggaan dinamakan juga matriks nol-satu karena pada matriks tersebut hanya berisi angka nol dan satu. Graf terhubung juga banyak bentuknya, diantaranya graf lengkap, graf bintang, graf domino dan graf roda. Pada tugas akhir ini hanya membahas mengenai matriks ketetanggaan dari graf roda.

Graf roda W_n didapatkan dari penambahan sebuah simpul ke graf lingkaran C_n, untuk $n \geq 3$ dan menghubungkan simpul baru ini ke setiap simpul di C_n oleh sisi-sisi baru (Rosen, 2007). Untuk setiap graf roda W_{n-1} memiliki n simpul yang menghasilkan matriks ketetanggaan berukuran $n\, x\, n$. Bentuk umum matriks ketetanggaan dari graf roda W_{n-1} sebagai berikut:

$$A_{nxn} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Sebuah matriks bias dioperasikan dengan berbagai cara seperti mencari perkalian matriks, determinan, invers, *trace* dan lainnya. Menurut Anton dan Rorres pada tahun 2004, jika A adalah matriks bujur sangkar dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat dibalik (*invertible*) dan B disebut sebagai invers (*inverse*) dari A.

Jika matriks B tidak dapat didefinisikan, maka A dinyatakan sebagai matriks singular.

Selanjutnya *trace* matriks adalah jumlah dari elemen-elemen diagonal utama dari matriks bujur sangkar. Penelitian *trace* matriks telah dilakukan oleh Pahade dan Jha pada tahun 2017 yang membahas mengenai *trace* bilangan bulat positif pada matriks ketetanggaan dari graf lengkap, yang memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Hasil dari penelitian tersebut berupa persamaan bentuk umum *trace* matriks ketetanggaan dari graf lengkap berpangkat bilangan bulat positif sebagai berikut:

Untuk k genap, yaitu:

$$tr(A^k) = \sum_{r=1}^{n/2} S(k,r)n(n-1)^r(n-2)^{k-2r}.$$

Untuk k ganjil, yaitu:

$$tr(A^k) = \sum_{r=1}^{n-1/2} S(k,r)n(n-1)^r(n-2)^{k-2r}.$$

dengan

$$S(k,r) = 1, S(k,k/2) = 1, S(k,k-1/2) = \frac{k-1}{2},$$

$$S(k,r) = S(k-1,r) + S(k-2,r-1).$$

Penelitian terkait juga dibahas pada tahun 2018 oleh Fatonah dan Yulianis yang meneliti mengenai *trace* matriks berbentuk khusus berpangkat bilangan bulat. Kedua penelitian tersebut menggunakan matriks yang sama, dengan bentuk khususnya ada dua yaitu untuk entri bilangan riil, $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall\, a,b \in R$ dan untuk entri bilangan kompleks, $A = \begin{bmatrix} 0 & a+bi \\ a+bi & 0 \end{bmatrix}, \forall\, a,b \in R$ dan $i =$ imajiner.

Hasil yang diperoleh Fatonah adalah:

$$tr(A^n) = \begin{cases} 0 & \text{, untuk n ganjil.} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}} & \text{, untuk n genap.} \end{cases}$$

Sedangkan hasil yang diperoleh Yulianis adalah:

$$tr(A^{-n}) = \begin{cases} 0 & \text{, untuk n ganjil.} \\ \dfrac{2}{(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}}} & \text{, untuk n genap.} \end{cases}$$

Selanjutnya pada tahun 2019, Nugraha telah meneliti *trace* matriks ketetanggaan dari graf lengkap berpangkat negatif dua. Penelitian tersebut menggunakan bentuk umum matriks ketetanggaan dari graf lengkap seperti berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Hasil yang diperoleh dalam penelitian tersebut merupakan bentuk umum *trace* dari matriks ketetanggaan nxn berpangkat negatif dua seperti berikut:

$$tr(A_n)^{-2} = \frac{n\big((n-1)+(n-2)^2\big)}{(n-1)^2}, \qquad n \geq 2.$$

Berdasarkan latar belakang di atas, maka penulis tertarik untuk melakukan kajian mengenai bentuk umum **"*Trace* Matriks Ketetanggaan $\boldsymbol{n\,x\,n}$ Berpangkat Dua dan Negatif Dua dari Graf Roda".**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, rumusan masalah dalam tugas akhir ini adalah menentukan bentuk umum *trace* matriks ketetanggaan $n\ x\ n$ berpangkat dua dan negatif dua dari graf roda.

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah, maka harus dilakukan batasan masalah agar tujuan dari penelitian ini dapat dicapai dengan baik dan tepat. Permasalahan pada penelitian ini dibatasi pada hal-hal sebagai berikut:

1. Matriks yang digunakan adalah matriks pada Persamaan (1.1).
2. Perpangkatan hanya untuk $(A_n)^2$ dan $(A_n)^{-2}$.
3. Perpangkatan $(A_n)^{-2}$ dibatasi untuk $n \equiv 0 \bmod 4$.
4. Aturan menentukan invers menggunakan metode adjoin.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah mendapatkan bentuk umum *trace* matriks ketetanggaan $n \; x \; n$ berpangkat dua dan negatif dua dari graf roda.

1.5 Manfaat Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah dan tujuan penelitian yang telah dikemukakan diatas, maka manfaat yang dapat diambil adalah sebagai berikut:

1. Memperdalam pengetahuan khususnya dibidang matematika murni.
2. Mengembangkan ilmu matematika dalam kajian matriks.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini mencakup lima bab, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisi teori-teori pendukung yang berkaitan dengan graf, matriks ketetanggaan, perkalian matriks, determinan matriks, invers matriks dan *trace* matriks.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisi langkah-langkah atau prosedur dalam menentukan bentuk umum *trace* matriks ketetanggaan $n \; x \; n$ dari graf roda berpangkat dua dan negatif dua.

BAB IV PEMBAHASAN

Bab ini berisi penjelasan bagaimana mendapatkan bentuk umum *trace* matriks ketetanggaan $n\ x\ n$ dari graf roda berpangkat dua dan negatif dua.

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini berisi kesimpulan dari hasil pembahasan yang telah dilakukan pada bab IV dan saran dari penulis.

BAB II

LANDASAN TEORI

Bab ini akan membahas teori-teori pendukung yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang akan dibahas pada bab selanjutnya.

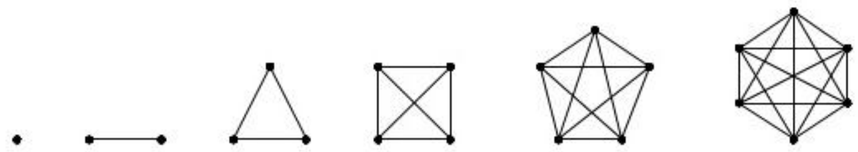
2.1 Graf

Definisi 2.1 (Rosen, 2007) Suatu graf $G = (V, E)$ terdiri dari V, suatu himpunan tak kosong dari simpul-simpul dan E, suatu himpunan dari sisi-sisi. Setiap sisi memiliki satu atau dua simpul yang terkait dengannya yang disebut titik ujung.

Definisi 2.2 (Rosen, 2007) Dua simpul u dan v dalam sebuah graf tidak berarah G disebut bertetanggaan di G jika u dan v adalah titik ujung dari suatu sisi di G. Beberapa contoh graf khusus sederhana:

1. Graf Lengkap

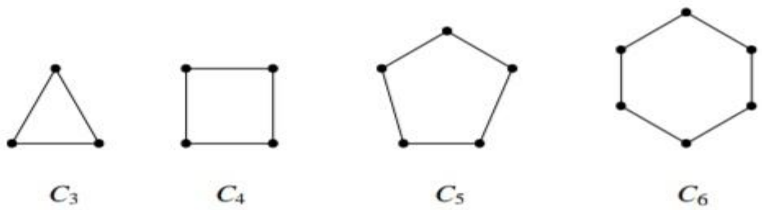
   Graf lengkap dengan n simpul, dinotasikan dengan K_n, adalah graf sederhana yang terdiri dari satu sisi diantara setiap pasang simpul berbeda. Berikut graf K_n untuk $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$:



Gambar 2.1 Graf Lengkap

2. Graf Lingkaran

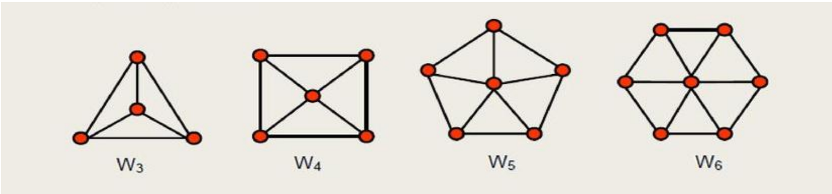
   Graf lingkaran C_n, $n \geq 3$, terdiri atas n simpul $v_1, v_2, \cdots, v_n$ dan sisi $[v_1, v_2], [v_2, v_3], \cdots, [v_{n-1}, v_n]$ dan $[v_n, v_1]$. Berikut graf lingkaran C_3, C_4, C_5 dan C_6:



Gambar 2.2 Graf Lingkaran

3. Graf Roda

   Graf roda didapatkan dari penambahan sebuah simpul pada graf lingkaran C_n, untuk $n \geq 3$ dan menghubungkan simpul baru ini ke setiap simpul di C_n oleh sisi-sisi baru. Berikut graf roda W_3, W_4, W_5 dan W_6:



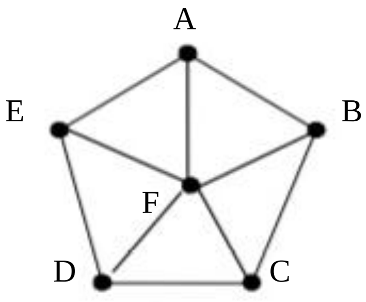
Gambar 2.3 Graf Roda

2.2 Matriks Ketetanggaan

Definisi 2.3 (Munir, 2005) Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dengan n simpul, $n \geq 1$. G adalah matriks dwimatra yang berukuran nxn. Bila matriks tersebut dinamakan $A = [a_{ij}]$, maka $a_{ij} = 1$ jika simpul i dan j bertetangga, sebaliknya $a_{ij} = 0$ jika simpul i dan j tidak bertetangga. Matriks ketetanggaan dinamakan juga matriks nol-satu karena pada matriks tersebut hanya berisi angka nol dan satu.

Contoh 2.1:

Tentukan matriks ketetanggan dari graf roda berikut!



Jawab :

Diketahui bahwa simpul A bertetangga dengan simpul B, simpul E dan simpul F. Simpul B bertetangga dengan simpul A, simpul C dan simpul F. Simpul C bertetangga dengan simpul B, simpul D dan simpul F. Simpul D bertetangga dengan simpul C, simpul E dan simpul F. Simpul E bertetangga dengan simpul A, simpul Ddansimpul F. Sedangkan simpul F bertetangga dengan simpul A, simpul B, simpul C, simpul D dan simpul E. Maka,

Matriks ketetanggaan dari graf di atas adalah

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

2.3 Perkalian Matriks

Pada bagian ini akan dibahas mengenai perkalian matriks dengan skalar, perkalian matriks dengan matriks dan perpangkatan matriks.

2.3.1 Perkalian Matriks dengan Skalar

Definisi 2.4 (Anton, 1987) Jika A adalah sebarang matriks dan c adalah sebarang skalar, maka hasil perkalian cA adalah suatu matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri dari A dengan c. Matriks cA disebut perkalian skalar dari A.

Contoh 2.2:

Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } c = 3$$

maka,

$$cA = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 12 \\ 12 & 9 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 12 & 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

2.3.2 Perkalian Matriks dengan Matriks

Definisi 2.5 (Munir, 2005) Dua buah matriks dapat dikalikan jika jumlah kolom matriks pertama sama dengan jumlah baris matriks kedua. Misalkan $A = [a_{ij}]$ adalah matriks mxn dan $B = [B_{ij}]$ adalah matriks nxp. Maka, perkalian A dan B

dilambangkan dengan AB, menghasilkan matriks $C = [C_{ij}]$ yang berukuran mxp, yang dalam hal ini

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}. \tag{2.1}$$

Contoh 2.3:

Diketahui matriks A dan B sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

maka

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (0)+(4)+(9) & (1)+(0)+(9) \\ (0)+(2)+(6) & (0)+(0)+(6) \\ (0)+(0)+(3) & (0)+(0)+(3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 13 & 10 \\ 8 & 6 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.3.3 Perpangkatan Matriks

Definisi 2.6 (Anton dan Rorres, 2013) Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar, maka dapat didefinisikan pangkat-pangkat bilangan bulat tak negatif A menjadi

$$A^0 = I, \qquad A^n = \underbrace{AAA \ldots A}_{nfaktor} \; (n > 0) \tag{2.2}$$

Akan tetapi, jika A dapat dibalik, maka dapat didefinisikan pangkat bilangan bulat negatif menjadi

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}A^{-1} \ldots A^{-1}}_{n\,faktor} \tag{2.3}$$

Contoh 2.4:

Diberikan matriks $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, tentukan A^2.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} A^2 &= A.A \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+2 & -4-2 \\ -2-1 & 2+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -6 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

2.4 Determinan Matriks

Ada beberapa metode dalam menentukan determinan sebuah matriks bujur sangkar, antara lain metode ekspansi kofaktor, metode reduksi baris, metode Sarrus dan lainnya. Pada tugas akhir ini, metode yang digunakan dalam menentukan determinan adalah metode ekspansi kofaktor.

2.4.1 Metode Ekspansi Kofaktor

Sebelum menentukan determinan menggunakan metode ekspansi kofaktor, terlebih dahulu harus memahami istilah minor dan kofaktor.

Definisi 2.7 (Anton dan Rorres, 2004) Jika Aadalah suatu matriks bujur sangkar, maka minor dari entri a_{ij}dinyatakan sebagai M_{ij}dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan disebut sebagai kofaktor dari entri a_{ij}.

Contoh 2.5:

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

minor dari entri a_{11} adalah

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 6 & 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = 0,$$

kofaktor dari entri a_{11} adalah

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11} = 0.$$

Teorema 2.1 (Anton dan Rorres, 2004) Determinan dari matriks A, nxn, dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali-hasil kali yang diperoleh, dimana untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$,

1. Ekspansi sepanjang kolom ke-j

$$\det(A) = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \cdots + a_{nj}a_{nj}. \qquad (2.4)$$

2. Ekspansi sepanjang baris ke-i

$$\det(A) = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \cdots + a_{in}a_{in}. \qquad (2.5)$$

Contoh 2.6:

Diketahui matriks bujur sangkar dengan ukuran $4x4$ sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan $\det(A)$ dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama.

Penyelesaian:

Karena entri a_{13} dan a_{14} bernilai 0, maka hitung c_{11} dan c_{12} saja.

$$\begin{aligned} c_{11} &= (-1)^{1+1}M_{11} \\ &= M_{11} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix} \\ &= 4\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \\ &= 4(2) - 6(4) + 5(2) \\ &= -6 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} c_{12} &= (-1)^{1+2}M_{12} \\ &= -M_{12} \\ &= -\begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 7 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= -\left(2\begin{bmatrix}3 & 1\\4 & 2\end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix}7 & 1\\8 & 2\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}7 & 3\\8 & 4\end{bmatrix}\right)$$
$$= -\big(2(2) - 6(6) + 5(4)\big)$$
$$= -(-12)$$
$$= 12$$

Sehingga

$$\det(A) = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} + a_{14}c_{14}$$
$$= a_{11}(M_{11}) + a_{12}(-M_{12}) + a_{13}(M_{13}) + a_{14}(-M_{14})$$
$$= 1(-6) + 3(12) + 0 + 0$$
$$= -6 + 36$$
$$= 30$$

Jadi, $\det(A) = 30$.

2.4.2 Metode Reduksi Baris

Teorema 2.2 (Anton dan Rorres, 2004) Jika A adalah matriks segitiga $n\ x\ n$ (segitiga atas, segitiga bawah atau diagonal) maka $\det(A)$ adalah hasil kali dari entri-entri pada diagonal utama matriks tersebut, yaitu $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

Contoh 2.7:

$$\begin{bmatrix}2 & 7 & -3 & 8 & 3\\0 & -3 & 7 & 5 & 1\\0 & 0 & 6 & 7 & 6\\0 & 0 & 0 & 9 & 8\\0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix} = (2)(-3)(6)(9)(4) = -1296.$$

2.4.3

2.5 Invers Matriks

Definisi 2.8 (Anton dan Rorres, 2004) Jika A adalah matriks bujur sangkar dan jika terdapat matriks B yang berukuran sama sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat dibakik (*invertible*) dan B disebut invers (*inverse*) dari A.

Terdapat beberapa metode untuk mencari invers matriks seperti metode adjoin, metode kofaktor, metode OBE (Operasi Baris Elementer) dan lain-lain.

Pada penelitian ini penulis menggunakan metode adjoin dalam menentukan invers matriks.

Definisi 2.9 (Anton dan Rorres, 2004) Jika A adalah matriks nxn sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka matriks

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari A. Transpose dari matriks ini disebut adjoin dari A dan dinyatakan sebagai $adj(A)$.

Teorema 2.3 (Anton dan Rorres, 2004) Jika Aadalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A). \tag{2.6}$$

Contoh 2.8:

Tentukan invers dari matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Terlebih dahulu tentukan determinan matriks A.

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 2(7) - 1(2) + 2(-3) \\ &= 14 - 2 - 6 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan rumus adjoin, diperoleh:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} * \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 2 * 4 - 1 * 1 = 7$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = -[1 * 4 - 1 * 2] = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} * \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1 * 1 - 2 * 2 = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} * \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = -[1 * 4 - 2 * 1] = -2$$

$A_{22} = (-1)^{2+2} * \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 2 * 4 - 2 * 2 = 4$

$A_{23} = (-1)^{2+3} * \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -[2 * 1 - 1 * 2] = 0$

$A_{31} = (-1)^{3+1} * \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 1 * 1 - 2 * 2 = -3$

$A_{32} = (-1)^{3+2} * \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = -[2 * 1 - 2 * 1] = 0$

$A_{33} = (-1)^{3+3} * \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 * 2 - 1 * 1 = 3$

Sehingga

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Jadi, A^{-1} dapat dihitung sebagi berikut:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{-3}{6} \\ \frac{-2}{6} & \frac{4}{6} & 0 \\ \frac{-3}{6} & 0 & \frac{3}{6} \end{bmatrix}$$

2.6 Kekongruenan

Definisi 2.10 (Sukirman, 2005) Jika m suatu bilangan bulat positif, maka a kongruen dengan b modulo m (ditulis $a \equiv b \pmod{m}$) bila m membagi $(a - b)$. Jika m tidak membagi $(a - b)$ maka dikatakan bahwa a tidak kongruen dengan b modulo m (ditulis $a \not\equiv b \pmod{m}$).

Contoh 2.9:

$25 \equiv 1 \pmod{4}$, sebab $(25 - 1) = 24$ terbagi oleh 4.

$31 \not\equiv 5 \pmod{6}$, sebab $(31 - 5) = 26$ tidak terbagi oleh 6.

2.7 *Trace* Matriks

Trace matriks merupakan jumlah dari elemen-elemen diagonal utama dari matriks bujur sangkar.

Definisi 2.11 (Anton, 1987) Misalkan $A = [a_{ij}]$ suatu matriks persegi berukuran nxn, maka *trace* dari matriks A didefinisikan sebagai jumlah dari elemen diagonal matriks A dan dinotasikan dengan $tr(A)$. Dinyatakan bahwa *trace* matriks A adalah:

$$tr(A) = \sum_i a_{ii} \tag{2.7}$$

Contoh 2.10:

Tentukan *trace* matriks ketetanggaan dari graf roda berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka

$$tr(A) = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Teorema 2.4 (Banerjee dan Roy, 2014) Jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks-matriks kuadrat n dan k adalah suatu skalar, maka

a. $tr(I_n) = n$
b. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
c. $tr(kA) = k\, tr(A)$
d. $tr(A^T) = tr(A)$

Bukti:

a. Misalkan $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$

$tr(I_n) = 1 + 1 + \cdots + 1$

$tr(I_n) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$ ■

b. Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$, maka

$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

$tr(B) = b_{11} + b_{22} + b_{33}$

$$tr(A + B) = tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\right)$$

$$tr(A + B) = tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix}\right)$$

$tr(A + B) = a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22} + a_{33} + b_{33}$

$tr(A + B) = (a_{11} + a_{22} + a_{33}) + (b_{11} + b_{22} + b_{33})$

$tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$ ■

c. Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, maka

$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

$$kA = k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$tr(kA) = tr\left(k\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right)$$

$$tr(kA) = tr\left(\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{bmatrix}\right)$$

$tr(kA) = ka_{11} + ka_{22} + ka_{33}$

$tr(kA) = k(a_{11} + a_{22} + a_{33})$

$tr(kA) = k\ tr(A)$ ■

d. Misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, maka

$$tr(A)^T = tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^T\right)$$

$$tr(A)^T = tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}\right)$$

$$tr(A)^T = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$tr(A)^T = tr(A) \qquad \blacksquare$$

2.8 *Trace* Matriks Ketetanggaan $n\,x\,n$ dari Graf Lengkap Berpangkat Negatif Dua

Pada tahun 2019 Aulia Arjuna Nugraha telah melakukan penelitian untuk mendapatkan bentuk umum *trace* matriks ketetanggaan dari graf lengkap berpangkat negatif dua. Bentuk umum matriks ketetanggaan dari graf lengkap telah ditemukan oleh Pahade dan Jha pada tahun 2017 seperti pada Persamaan (1.2).

Di dalam penelitiannya Pahade dan jha telah mendapatkan bentuk umum matriks ketetanggaan dari graf lengkap berpangkat positif dua. Bentuk umum $(A_n)^2$ dinyatakan dalam Teorema (2.4) berikut:

Teorema 2.4 Bentuk umum A_n^2 dari matriks ketetanggaan pada Persamaan (1.2) yaitu:

$$A_n^2 = \begin{bmatrix} (n-1) & (n-2) & (n-2) & \cdots & (n-2) & (n-2) & (n-2) \\ (n-2) & (n-1) & (n-2) & \cdots & (n-2) & (n-2) & (n-2) \\ (n-2) & (n-2) & (n-1) & \cdots & (n-2) & (n-2) & (n-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-2) & (n-2) & (n-2) & \cdots & (n-1) & (n-2) & (n-2) \\ (n-2) & (n-2) & (n-2) & \cdots & (n-2) & (n-1) & (n-2) \\ (n-2) & (n-2) & (n-2) & \cdots & (n-2) & (n-2) & (n-1) \end{bmatrix}, \qquad n \geq 2$$

Bukti:

$$(A_n)^\wedge 2 = \begin{bmatrix} \underbrace{0+1+\cdots+1}_{n\ faktor} & \underbrace{0+0+1+\cdots+1}_{n\ faktor} & \underbrace{0+1+0+1+\cdots+1}_{n\ faktor} & \cdots & \underbrace{0+1+\cdots+1+0+1+1}_{n\ faktor} & \underbrace{0+1+\cdots+1+0+1}_{n\ faktor} & \underbrace{0+1+\cdots+1+0}_{n\ faktor} \\ \underbrace{0+0+1+\cdots+1}_{n\ faktor} & \underbrace{1+0+1+\cdots+1}_{n\ faktor} & \underbrace{1+0+0+1+\cdots+1}_{n\ faktor} & \cdots & \underbrace{1+0+1+\cdots+1+0+1+1}_{n\ faktor} & \underbrace{1+0+1+\cdots+1+0+1}_{n\ faktor} & \underbrace{1+0+1+\cdots+1+0}_{n\ faktor} \\ \underbrace{0+1+0+1+\cdots+1}_{n\ faktor} & \underbrace{1+0+0+1+\cdots+1}_{n\ faktor} & \underbrace{1+1+0+1+\cdots+1}_{n\ faktor} & \cdots & \underbrace{1+1+0+1+\cdots+1+0+1+1}_{n\ faktor} & \underbrace{1+1+0+1+\cdots+1+0+1}_{n\ faktor} & \underbrace{1+1+0+1+\cdots+1+0}_{n\ faktor} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underbrace{0+1+\cdots+1+0+1+1}_{n\ faktor} & \underbrace{1+0+1+\cdots+1+0+1+1}_{n\ faktor} & \underbrace{1+1+0+1+\cdots+1+0+1+1}_{n\ faktor} & \cdots & \underbrace{1+\cdots+1+0+1+1}_{n\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1+0+0+1}_{n\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1+0+1+0}_{n\ faktor} \\ \underbrace{0+1+\cdots+1+0+1}_{n\ faktor} & \underbrace{1+0+1+\cdots+1+0+1}_{n\ faktor} & \underbrace{1+1+0+1+\cdots+1+0+1}_{n\ faktor} & \cdots & \underbrace{1+\cdots+1+0+0+1}_{n\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1+0+1}_{n\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1+0+0}_{n\ faktor} \\ \underbrace{0+1+\cdots+1+0}_{n\ faktor} & \underbrace{1+0+1+\cdots+1+0}_{n\ faktor} & \underbrace{1+1+0+1+\cdots+1+0}_{n\ faktor} & \cdots & \underbrace{1+\cdots+1+0+1+0}_{n\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1+0+0}_{n\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1+0}_{n\ faktor} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underbrace{1+\cdots+1}_{n-1\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \cdots & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} \\ \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-1\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \cdots & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} \\ \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-1\ faktor} & \cdots & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \cdots & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-1\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} \\ \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \cdots & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-1\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} \\ \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \cdots & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-2\ faktor} & \underbrace{1+\cdots+1}_{n-1\ faktor} \end{bmatrix}$$

Bukti:

Berdasarkan Teorema 2.4, maka

$$tr(A_n)^{-2} = tr\left(\frac{1}{(n-1)^2}\begin{bmatrix} (n-1)+(n-2)^2 & -(n-2) & -(n-2) & \cdots & -(n-2) & -(n-2) & -(n-2) \\ -(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & -(n-2) & \cdots & -(n-2) & -(n-2) & -(n-2) \\ -(n-2) & -(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & -(n-2) & -(n-2) & -(n-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -(n-2) & -(n-2) & -(n-2) & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & -(n-2) & -(n-2) \\ -(n-2) & -(n-2) & -(n-2) & \cdots & -(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & -(n-2) \\ -(n-2) & -(n-2) & -(n-2) & \cdots & -(n-2) & -(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 \end{bmatrix}\right)$$

$$tr(A_n)^{-2} = \frac{1}{(n-1)^2}\left[\left((n-1)+(n-2)^2\right)+\left((n-1)+(n-2)^2\right)+\cdots+\left((n-1)+(n-2)^2\right)\right]$$

Karena $\left((n-1)+(n-2)^2\right)$ dijumlahkan sebanyak n maka $tr(A_n)^{-2}$ dapat disederhanakan menjadi:

$$tr(A_n)^{-2} = \frac{1}{(n-1)^2}\left[\left((n-1)+(n-2)^2\right)n\right]$$

$$= \frac{n\left((n-1)+(n-2)^2\right)}{(n-1)^2}$$

Berdasarkan pembuktian di atas maka Teorema 2.6 terbukti.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Penulisan tugas akhir ini menggunakan metode kajian pustaka (studi literatur). Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini berdasarkan matriks ketetanggaan yang diberikan adalah sebagai berikut:

1. Diberikan matriks ketetanggaan dari graf roda W_{n-1} pada Persamaan (1.1).
2. Menentukan $(A_4)^2$ sampai $(A_9)^2$.
3. Menduga bentuk umum $(A_n)^2$.
4. Membuktikan $(A_n)^2 = A_n \cdot A_n$ dengan pembuktian langsung.
5. Membuktikan *trace* $(A_n)^2$ dengan pembuktian langsung.
6. Menentukan $(A_4)^{-1}$ sampai $(A_{15})^{-1}$.
7. Menduga bentuk umum $(A_n)^{-1}$.
8. Membuktikan $(A_n)^{-1}$ dengan cara $(A_n) \cdot (A_n)^{-1} = I = (A_n)^{-1} \cdot (A_n)$.
9. Menentukan entri diagonal utama pada $(A_n)^{-2}$.
10. Membuktikan *trace* $(A_n)^{-2}$ dengan pembuktian langsung.
11. Mengaplikasikan $tr(A_n)^2$ dan $tr(A_n)^{-2}$ dengan contoh soal.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah di paparkan pada Bab IV tentang *trace* matriks ketetanggaan $n\,x\,n$ berpangkat dua dan negatif dua dari graf roda dengan matriks pada Persamaan (1.1), maka diperoleh :

1. Bentuk umum matriks ketetanggaan berpangkat dua dari graf roda yaitu:

$$(A_n)^2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 2 & (n-1) \end{bmatrix}, \qquad n \geq 6$$

2. Bentuk umum *trace* matriks ketetanggaan berpangkat dua dari graf roda yaitu:

$$tr(A_n)^2 = 4(n-1), \qquad n \geq 4$$

3. Bentuk umum matriks ketetanggaan berpangkat negatif satu dari graf roda yaitu:

$$(A_n)^{-1} = \frac{1}{(-n+1)} \begin{bmatrix} \frac{n}{2} & -\frac{n}{2}+1 & -\frac{n}{2}+1 & \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & \cdots & \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & -\frac{n}{2}+1 & -\frac{n}{2}+1 & -1 \\ -\frac{n}{2}+1 & \frac{n}{2} & -\frac{n}{2}+1 & -\frac{n}{2}+1 & \frac{n}{2} & \cdots & -\frac{n}{2}+1 & \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & -\frac{n}{2}+1 & -1 \\ -\frac{n}{2}+1 & -\frac{n}{2}+1 & \frac{n}{2} & -\frac{n}{2}+1 & -\frac{n}{2}+1 & \cdots & -\frac{n}{2}+1 & -\frac{n}{2}+1 & \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & -1 \\ \frac{n}{2} & -\frac{n}{2}+1 & -\frac{n}{2}+1 & \frac{n}{2} & -\frac{n}{2}+1 & \cdots & \frac{n}{2} & -\frac{n}{2}+1 & -\frac{n}{2}+1 & \frac{n}{2} & -1 \\ \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & -\frac{n}{2}+1 & -\frac{n}{2}+1 & \frac{n}{2} & \cdots & \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & -\frac{n}{2}+1 & -\frac{n}{2}+1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{n}{2} & -\frac{n}{2}+1 & -\frac{n}{2}+1 & \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & \cdots & \frac{n}{2} & -\frac{n}{2}+1 & -\frac{n}{2}+1 & \frac{n}{2} & -1 \\ \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & -\frac{n}{2}+1 & -\frac{n}{2}+1 & \frac{n}{2} & \cdots & -\frac{n}{2}+1 & \frac{n}{2} & -\frac{n}{2}+1 & -\frac{n}{2}+1 & -1 \\ -\frac{n}{2}+1 & \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & -\frac{n}{2}+1 & -\frac{n}{2}+1 & \cdots & -\frac{n}{2}+1 & -\frac{n}{2}+1 & \frac{n}{2} & -\frac{n}{2}+1 & -1 \\ -\frac{n}{2}+1 & -\frac{n}{2}+1 & \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & -\frac{n}{2}+1 & \cdots & \frac{n}{2} & -\frac{n}{2}+1 & -\frac{n}{2}+1 & \frac{n}{2} & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad n \equiv 0 \ mod\ 4$$

4. Bentuk umum *trace* matriks ketetanggaan berpangkat negatif dua dari Persamaan (4.15) yaitu:

$$tr(A_n)^{-2} = \frac{\frac{n^4}{4} - n^3 + \frac{5n^2}{4} + \frac{3n}{2} + 2}{n^2 - 2n + 1}, \qquad n \equiv 0 \ mod\ 4\ .$$

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini penulis membahas tentang *trace* matriks ketetanggaan nxn berpangkat dua dan negatif dua dari graf roda. Disarankan untuk mengembangkan perpangkatannya yang lebih besar seperti pangkat tiga dan negatif tiga, pangkat empat dan negatif empat dan seterusnya.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. “*Elementary Linear Algebra*”, Fifth Ed., John Wiley & Sons, New York. 1987.

Anton, H. dan Rorres C. *“Dasar-Dasar Aljabar Linear Versi Aplikasi”*, Edisi 8. Erlangga, Jakarta. 2004.

Anton, H. dan Rorres, C. “*Elementary Linear Algebra*”, Wiley, United States of Amerika. 2013.

Banerjee, S dan Roy, A. “*Linear Algebra and Matrix Analysis for Statistics”*, CRC Press, Boca Raton. 2014.

Fatonah, T. “Trace Matriks Berbentuk Khusus $2\,x\,2$ Berpangkat Bilangan Bulat Positif”. *Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau*. 2017.

Munir, R. “*Matematika Diskrit*”, Edisi 3. Informatika, Bandung. 2005.

Nugraha, A. A. “Trace matriks ketetanggaan $n\,x\,n$ Berpangkat Negatif Dua”. *Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau*. 2019.

Pahade, J. dan Jha M. “Trace of Positive Integer Power of Adjacency Matrix”. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, Volume 13, Number 6, pp. 20179-2087. 2017.

Rosen, Kenneth H. “*Discrete Mathematics and Its Applications*”, Mc Graw Hill, New York. 2007.

Sukirman. “*Pengantar Teori Bilangan”,* Hanggar Kreator, Yogyakarta. 2005.

Yulianis. “Trace Matriks Berbentuk Khusus $2\,x\,2$ Berpangkat Bilangan Bulat Negatif*”*. *Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau*. 2017.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 22 Januari 1998 di Desa Perawang Kabupaten Siak, Riau. Penulis adalah anak tunggal dari pasangan Bapak Bismark dan Ibu Putrianti. Penulis menyelesaikan pendidikan di TK PPLP-PGRI Tualang pada tahun 2004, pada tahun 2010 penulis menyelesaikan Pendidikan formal di SDS Yayasan Pendidikan Persada Indah Perawang. Kemudian penulis menyelesaikan pendidikan lanjut tingkat pertama di SMPS Yayasan Pendidikan Persada Indah Perawang pada tahun 2013 dan menyelesaikan Pendidikan Menengah Atas di SMAN 2 Tualang pada tahun 2016 dengan jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA). Pada tahun 2016 penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Program Studi Matematika.

Pada tahun 2019, tepatnya pada semester VI penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Dinas Ketahanan Pangan Kota Pekanbaru dengan laporan kerja praktek yang berjudul **"Peramalan Harga Cabai Merah Keriting di Pasar Sukaramai Kota Pekanbaru Menggunakan Metode *Single Exponential Smoothing*"** yang dibimbing oleh Dr. Riswan Efendi M.Sc. dari tanggal 16 Januari sampai 16 Februari 2019 dan diseminarkan pada tanggal 22 Mei 2019. Selanjutnya pada tahun yang sama penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Gunung Sari, Kecamatan Gunung Sahilan, Kabupaten Kampar.

Pada tanggal 24 Juni 2020 penulis dinyatakan lulus dalam ujian sarjana dengan judul tugas akhir "***Trace* Matriks Ketetanggaan n x n Berpangkat Dua dan Negatif Dua dari Graf Roda"** di bawah bimbingan Ibu Fitri Aryani, M.Sc.