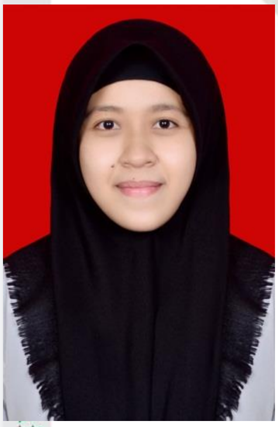
KONSTRUKSI METODE ITERASI TANPA TURUNAN KEDUA MENGGUNAKAN FUNGSI $xy + y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains pada
Program Studi Matematika

Oleh :

<u>LAMBY PRATIWI MAYTASARI</u>
11654201194



UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2019

LEMBAR PERSETUJUAN

KONSTRUKSI METODE ITERASI TANPA TURUNAN KEDUA MENGGUNAKAN FUNGSI
$$xy + y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

TUGAS AKHIR

oleh:

LAMBY PRATIWI MAYTASARI
11654201194

Telah diperiksa dan disetujui sebagai laporan Tugas Akhir
di Pekanbaru, pada tanggal 17 Desember 2019

Ketua Program Studi	Pembimbing
Ari Pani Desvina, M.Sc.	**Wartono, M.Sc.**
NIP. 19811225 200604 2 003	**NIP. 19730818 200604 1 003**

LEMBAR PENGESAHAN

KONSTRUKSI METODE ITERASI TANPA TURUNAN KEDUA MENGGUNAKAN FUNGSI $xy + y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

TUGAS AKHIR

oleh:

LAMBY PRATIWI MAYTASARI
11654201194

Telah dipertahankan didepan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 17 Desember 2019

Pekanbaru, 17 Desember 2019
Mengesahkan,

Dekan	**Ketua Program Studi**
Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag.	**Ari Pani Desvina, M.Sc.**
NIP. 19660604 199203 1 004	**NIP. 19811225 200604 2 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua	**: Mohammad Soleh, M.Sc.**
Sekretaris	**: Wartono, M.Sc.**
Anggota I	**: Dr. Yuslenita Muda, M.Sc.**
Anggota II	**: Rahmawati, M.Sc.**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi, dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang secara tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 17 Desember 2019
Yang membuat pernyataan,

LAMBY PRATIWI MAYTASARI
NIM. 11654201194

LEMBAR PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'aalamin, yang paling utama tidak lupa kuucapkan rasa syukur atas rahmat dan kasih sayangmu ya Allah yang telah memberikan aku kemudahan dalam menuntut ilmu sehingga dapat menyelesaikan kuliah dan Tugas Akhir ini dengan baik. Shalawat dan Salam tetap tercurahkan untuk Baginda, Kekasih Allah Yakni Nabibana Muhammad Salallahu'alaihi Wassalam yang telah membawa manusia dari zaman kejahiliyahan menuju zaman yang penuh dengan ilmu pengetahuan.

Abati Wahyudi dan Ammati Eti Endang P.R, S.Pd.

Terimakasih kusampaikan kepada abati tercinta yaitu sosok pahlawan yang selalu dibanggakan oleh putri-putrinya. Keringat, keluh, sedih, dan kesal beliau simpan sendiri demi kebahagian keluarganya. Bagaimanapun keadaannya beliau selalu mengusahakan yang terbaik dan tetap tegar agar kami hidup dengan layak serta mendapatkan pendidikan yang bermutu dan sesuai dengan ajaran Islam.

Terimakasihku juga kusampaikan kepada ammati tercinta, yang telah menjadi sosok khodijah bagi putri-putrinya, yang mewarnai kehidupanku dengan ribuan nasihat dan didikannya sekaligus menjadi sahabat dihidupku. Beliau mengajarkanku bagaimana menjadi perempuan yang dirindukan oleh Syurga dan bermanfaat bagi orang lain. Terkhusus untuk abati dan ammati yang tangannya tak pernah lelah berdoa dan senantiasa menyebut namaku dalam doa demi meraih kesuksesan. Terimalah persembahan karya sederhana ini sebagai bukti kesungguhanku selama menuntut ilmu.

Keluarga Besar

Terimakasih telah memberi support baik berupa semangat maupun materi selama ini, dan terimakasih kepada semua keluarga besar yang selalu mendoakanku.

Wartono, M.Sc

Terimakasih banyak telah meluangkan waktunya untuk memberi bimbingan, pengarahan dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Rahmadeni, M.Si

Terimakasih banyak telah meluangkan waktunya untuk memberi bimbingan, pengarahan dan selalu sabar mendengarkan keluhan dari mahasiswa bimbingannya serta menjadi ibu di perkuliahan ini.

Sahabat-Sahabatku

Terimakasih banyak kepada sahabatku dimana pun kalian berada yang tak pernah bosan memarahi, mengkritik dan memberi semangat kepadaku, selalu menemaniku disaat suka maupun duka. Tiada balasan yang bisa aku berikan selain ucapan terimakasih dan doa demi kuseksesan kita bersama.

Terimakasih Untuk seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN SUSKA RIAU terkhusus Jurusan Matematika

KONSTRUKSI METODE ITERASI TANPA TURUNAN KEDUA MENGGUNAKAN FUNGSI $xy + y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

LAMBY PRATIWI MAYTASARI
NIM: 11654201194

Tanggal Sidang : 17 Desember 2019
Tanggal Wisuda : 2020

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRAK

Pendekatan fungsional merupakan salah satu cara mengkonstruksi metode iterasi untuk mencari akar-akar persamaan nonlinear. Pada penelitian ini, penulis mengkonstruksi metode iterasi dengan menggunakan fungsi $xy + y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ dan mereduksi turunan keduanya dengan menggunakan fungsi $y + xy + x^3 + sx^2 + tx + r = 0$ yang menghasilkan dua metode iterasi baru. Berdasarkan hasil penelitian, dua metode tersebut tersebut mempunyai orde konvergensi empat yang melibatkan tiga evaluasi fungsi dengan indeks efisiensi sebesar $4^{1/3} \approx 1{,}587401$. Simulasi numerik dilakukan untuk menguji metode iterasi baru, meliputi jumlah iterasi, COC, nilai fungsi, galat mutlak dan galat relatif yang dibandingkan dengan metode Newton, Chebyshev, Halley dan Newton Ganda. Hasil numerik menunjukkan dua metode iterasi tersebut lebih efektif dalam menyelesaikan persamaan nonlinear.

Kata Kunci: Indeks efisiensi, pendekatan fungsional, orde konvergensi, persamaan nonlinear.

CONSTRUCTION OF ITERATION METHODS WITHOUT SECOND DERIVATIVE USING $xy + y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

LAMBY PRATIWI MAYTASARI
NIM: 11654201194

Date of Final Exam : December, 17th 2019
Date of Graduation : 2020

Mathematics Program Study
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Soebrantas Street No.155 Pekanbaru

ABSTRACT

Functional approach is one way to construct iteration methods to find the roots of nonlinear equations. In this research, the author constructs an iteration method using by $xy+y+ax^3+bx^2+cx+d=0$ *and reduces the derivative of both using by* $y+xy+x^3+sx^2+tx+r=0$ *that produce two new iteration methods. Based on the results of the study, the two methods have a four-order convergence involving three evaluation functions with an efficiency index of* $4^{1/3} \approx 1{,}587401$. *Numerical simulations are performed to test the new iteration method which includes the number of iterations, COC, function values, absolute errors and relative errors compared with Newton, Chebyshev, Halley and Newton Double methods. Numerical results show that the two iteration methods are more effective in solving nonlinear equations.*

Keywords: *Efficiency index, functional approach, order of convergence, nonlinear equations.*

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillahirabbil'alamin. Puji syukur kepada Allah Subhanahu Wata'ala karena atas rahmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir dengan judul **"Konstruksi Metode Iterasi Tanpa Turunan Kedua Menggunakan Fungsi $xy + y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$"**. Shalawat dan salam juga selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad Salallahu'alaihi Wassalam, semoga kita selalu mendapatkan syafaat-nya. Penulisan Tugas Akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Dalam penyusunan Tugas Akhir ini penulis banyak sekali mendapatkan bimbingan, arahan, dan masukkan dari berbagai pihak. Penulis mengucapkan terimakasih khususnya kepada kedua orang tua tercinta Abati Wahyudi dan Ammati Eti Endang Puspito Rini yang selalu mendoakan dan melimpahkan kasih sayang kepada penulis. Selain itu, penulis juga mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. KH. Ahmad Mujahidin, S.Ag., M.Ag., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
4. Ibu Fitri Ariyani, M.Sc., selaku Sekretaris Program Studi Matematika.
5. Bapak Wartono, M.Sc., selaku Pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk memberikan arahan, penjelasan serta petunjuk kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan Tugas Akhir ini.
6. Ibu Dr. Yuslenita Muda, M.Sc., selaku Penguji I yang telah banyak memberikan masukkan, saran serta dukungan dalam penulisan Tugas Akhir ini.

7. Ibu Rahmawati, M.Sc., selaku Penguji II yang telah banyak memberikan masukkan, saran serta dukungan dalam penulisan Tugas Akhir ini.
8. Ibu Rahmadeni, M.Si., selaku Pembimbing Akademik yang senantiasa membimbing, memberi arahan serta nasehat kepada Penulis dari awal perkuliahan.
9. Bapak dan Ibu Dosen di lingkungan Fakultas Sains dan Teknologi khususnya Program Studi Matematika.
10. Sahabat-sahabat penulis yaitu Sintia, Tuti, Rini, Fika, Aluna, dan Welly terimakasih atas bantuan, dan masukkan serta segala dukungan yang telah diberikan kepada Penulis.
11. Sahabat-sahabat seperjuangan penulisan TA yaitu Sintia, Mardhiah, dan Andika terimakasih atas bantuan, masukkan dan segala dukungan yang telah diberikan kepada Penulis.
12. Teman-teman seperjuangan di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi angkatan 2016 khususnya mahasiswa kelas C yang telah banyak memberikan bantuan, masukkan serta dukungan.
13. Semua pihak yang telah memberi bantuan dari awal penyusunan Tugas Akhir hingga selesai, yang tidak dapat Penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa penulisan Tugas Akhir ini masih terdapat kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak demi kesempurnaan Tugas Akhir ini. Semoga Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi kita semua. *Aamiin ya Rabbal'alamiin.*

Pekanbaru, 17 Desember 2019

Lamby Pratiwi Maytasari

DAFTAR ISI

		Halaman
LEMBAR PERSETUJUAN		ii
LEMBAR PENGESAHAN		iii
LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL		iv
LEMBAR PERNYATAAN		v
LEMBAR PERSEMBAHAN		vi
ABSTRAK		vii
ABSTRACT		viii
KATA PENGANTAR		ix
DAFTAR ISI		xi
DAFTAR SIMBOL		xiii
DAFTAR GAMBAR		xiv
DAFTAR TABEL		xv
DAFTAR SINGKATAN		xvi
DAFTAR LAMPIRAN		xvii
BAB I	**PENDAHULUAN**	
	1.1 Latar Belakang	I-1
	1.2 Rumusan Masalah	I-4
	1.3 Batasan Masalah	I-4
	1.4 Tujuan Masalah	I-4
	1.5 Manfaat Penelitian	I-5
	1.6 Sistematika Penulisan	I-5
BAB II	**LANDASAN TEORI**	
	2.1 Deret Taylor	II-1

2.2 Orde Hampiran II-2
2.3 Orde Konvergensi II-4
2.4 *Computational Order of Convergence (COC)* II-4
2.5 Indeks Efisiensi II-6
2.6 Metode Iterasi yang Dikonstruksi dari Fungsi Linier dan Orde Konvergensinya II-7
2.7 Metode Iterasi yang Dikonstruksi dari Fungsi Kuadratik II-9
2.7.1 Metode Chebyshev dan Orde Konvergensinya II-11
2.7.2 Metode Halley dan Orde Konvergensinya II-13

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

BAB IV PEMBAHASAN

4.1 Konstruksi Metode Iterasi Tipe A IV-1
4.1.1 Metode Iterasi IV-1
4.1.2 Orde Konvergensi IV-4
4.1.3 Simulasi Numerik IV-7
4.2 Konstruksi Metode Iterasi Tipe B IV-13
4.2.1 Metode Iterasi IV-13
4.2.2 Orde Konvergensi IV-15
4.2.3 Simulasi Numerik IV-17

BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan V-1
5.2 Saran V-1

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

DAFTAR SIMBOL

$f(x)$	: Fungsi f dari variabel bebas x
f'	: Turunan pertama fungsi f
f''	: Turunan kedua fungsi f
$f^{(n)}$	: Turunan ke-n fungsi f
$O(h^n)$	: Orde hampiran
$\approx$	: Hampiran
e	: Galat atau *error*
!	: Faktorial
α	: Akar persamaan
ρ	: Nilai COC
$\{x_n\}$	: Barisan bilangan real
EI	: Indeks efisiensi
p	: Orde konvergensi
r	: Jumlah evaluasi fungsi
$\in$	: Anggota atau elemen
x_0	: Nilai awal
$R_n(x)$	: Suku sisa deret taylor

DAFTAR GAMBAR

Gambar **Halaman**

4.1 Grafik Fungsi Nonlinier: a) $f_1(x)$, b) $f_2(x)$, c) $f_3(x)$, d) $f_4(x)$, dan e) $f_5(x)$ IV-8

4.2 Grafik Fungsi Nonlinier: a) $f_1(x)$, b) $f_2(x)$, c) $f_3(x)$, d) $f_4(x)$, dan e) $f_5(x)$ IV-18

DAFTAR TABEL

Tabel **Halaman**

Tabel		Halaman
2.1	Hasil Iterasi dari COC Metode Newton	II-6
4.1	Perbandingan Indeks Efisiensi	IV-6
4.2	Perbandingan Jumlah Iterasi untuk $\varepsilon = 10^{-25}$ dan $\varepsilon = 10^{-95}$	IV-9
4.3	Perbandingan COC untuk $\varepsilon = 10^{-25}$	IV-9
4.4	Perbandingan COC untuk $\varepsilon = 10^{-95}$	IV-10
4.5	Nilai $\lvert f(x_n) \rvert$ dengan TNFE =12	IV-10
4.6	Nilai $\lvert x_n - \alpha \rvert$ dengan TNFE = 12	IV-11
4.7	Nilai $\lvert x_n - x_{n+1} \rvert$ dengan TNFE =12	IV-11
4.8	Nilai $\lvert f(x_n) \rvert$ untuk IT = 4	IV-12
4.9	Nilai $\lvert x_n - \alpha \rvert$ dengan IT= 4	IV-12
4.10	Nilai $\lvert x_n - x_{n+1} \rvert$ dengan IT = 4	IV-13
4.11	Perbandingan Indeks Efisiensi	IV-17
4.12	Perbandingan Jumlah Iterasi untuk $\varepsilon = 10^{-25}$ dan $\varepsilon = 10^{-95}$	IV-20
4.13	Perbandingan COC untuk $\varepsilon = 10^{-25}$	IV-20
4.14	Perbandingan COC untuk $\varepsilon = 10^{-95}$	IV-21
4.15	Nilai $\lvert f(x_n) \rvert$ dengan TNFE =12	IV-21
4.16	Nilai $\lvert x_n - \alpha \rvert$ dengan TNFE = 12	IV-22
4.17	Nilai $\lvert x_n - x_{n+1} \rvert$ dengan TNFE =12	IV-22
4.18	Nilai $\lvert f(x_n) \rvert$ untuk IT = 4	IV-23
4.19	Nilai $\lvert x_n - \alpha \rvert$ dengan IT= 4	IV-23
4.20	Nilai $\lvert x_n - x_{n+1} \rvert$ dengan IT = 4	IV-24

DAFTAR SINGKATAN

COC	: *Computational Order of Convergence*
MN	: Metode Newton
MC	: Metode Chebyshev
MH	: Metode Halley
MNG	: Metode Newton Ganda
TIPE A	: Metode Iterasi Pertama dari Persamaan Fungsi $xy + y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ Tanpa Turunan Kedua
TIPE B	: Metode Iterasi Kedua dari Persamaan Fungsi $xy + y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ Tanpa Turunan Kedua
TNFE	: *Total Number of Functional Evaluation*
IT	: Iterasi

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Halaman
A. Orde Konvergensi Metode Iterasi Tipe A	A-1
B. Orde Konvergensi Metode Iterasi Tipe B	B-1

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu dasar yang digunakan sebagai landasan dari segala ilmu dalam kehidupan sehari-hari, matematika juga berperan penting untuk menyelesaikan suatu permasalahan dalam segala bidang. Contohnya pada penyelesaian persamaan nonlinear. Pada kenyataannya, hampir sebagian besar persamaan nonlinear memuat bentuk matematis yang rumit serta didapatkan hasil yang eksak dan kompleks.

Permasalahan yang muncul dalam menyelesaikan persamaan nonlinear adalah menentukan akar-akar persamaan dalam bentuk:

$$f(x) = 0. \tag{1.1}$$

Salah satu solusi penyelesaian yang dapat digunakan adalah dengan metode numerik. Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan matematika biasa (tambah, kurang, kali dan bagi) (Febrinicko dan Rachmawati, 2008), dengan pengoperasian perhitungan matematika tersebut bersifat berulang atau disebut dengan metode iterasi.

Berbagai macam metode iterasi sudah banyak digunakan dalam penyelesaian persamaan nonlinear khususnya untuk menentukan akar-akar persamaannya seperti metode Grafik, metode Bagidua, metode Posisi Palsu, metode Iterasi Satu Titik Sederhana, metode Newton-Raphson, metode Secant dan lainnya (Chapra dan Canale, 2007).

Metode iterasi yang sering digunakan untuk menentukan akar-akar pendekatan pada Persamaan (1.1) adalah metode Newton-Raphson yang dikenal dalam bentuk:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{1.2}$$

dengan $n = 0, 1, 2, 3, ...$ dan $f'(x_n) \neq 0$.

Metode Newton pada Persamaan (1.2) merupakan metode iterasi Satu Titik yang dihasilkan dari pemotongan deret Taylor orde satu. Metode Newton memiliki orde konvergensi kuadratik dan melibatkan dua evaluasi fungsi dengan indeks efisiensi sebesar $2^{1/2} \approx 1{,}4142$ (Traub, 1964). Selain menggunakan pemotongan deret Taylor, beberapa peneliti juga menggunakan berbagai teknik pendekatan untuk menghasilkan metode iterasi, salah satunya dengan pendekatan fungsional, seperti yang dilakukan oleh para peneliti berikut:

Teknik pendekatan fungsional sejak dahulu telah digunakan oleh para peneliti, seperti (Melman, 1997) yang mengkonstruksi metode iterasi dengan menggunakan persamaan $ax^2 + bx + c = f(x)$ dan $a + \dfrac{b}{x+c} = f(x)$ yang masing-masing dapat ditulis:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1 - \sqrt{1 - 2f(x_n)\dfrac{f''(x_n)}{f'^2(x_n)}}}{\dfrac{f''(x_n)}{f'(x_n)}}, n \geq 0,$$

dan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'^2(x_n) - f(x_n)f''(x_n)}, n \geq 0 .$$

(Amat dkk, 2003) kembali melakukan penelitian yang sama dengan menggunakan persamaan Hiperbola $ay^2 + bxy + y + cx + d = 0,$ dalam bentuk:

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{L_f(x_n)}{1 + b_n\left(\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)}\right)\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right), n \geq 0,$$

dengan

$$L_f(x_n) = \frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)^2} . \tag{1.3}$$

Seiring berkembangnya zaman, (Chun, 2007) juga mengkonstruksi metode iterasi dengan menggunakan persamaan Parabola $x^2 + ax + by + c = 0$ dan $x^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ yang masing-masing dapat ditulis:

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2L_f(x_n)}} \right) \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right), n \geq 0,$$

dan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2(1 + a_n f'^2(x_n)) + a_n f(x_n) f''(x_n)}{2(1 + a_n f'^2(x_n)) - L_f(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; a_n \in \Re,$$

dengan menggunakan persamaan Parabola $ay^2 + y + bx + c = 0$, (Sharma, 2007) mengontruksi metode iterasi dalam bentuk:

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2} L_f(x_n) \right) \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right), n \geq 0,$$

dengan $L_f(x_n)$ di berikan pada Persamaan (1.3). Penelitian terbaru kembali dilakukan oleh (Amat dkk, 2008) yang mengkonstruksi metode iterasi dengan menggunakan persamaan Hiperbola $axy + y + bx + c = 0$, dengan bentuk:

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{2}{2 - L_f(x_n)} \right) \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right), n \geq 0,$$

tidak hanya menggunakan persamaan Parabola dan Hiperbola, (Gupta dkk, 2008) juga melakukan penelitian yang sama dengan menggunakan persamaan yang berbeda, yaitu mengkonstruksi persamaan Ellips $\frac{(x - x_0)^2}{k^2} + \frac{\{y - f(x_0)\}^2}{f^2(x_0)} = 1,$ yang menghasilkan metode iterasi yaitu:

$$x_{n+1} = x_n \pm \frac{f(x_n)}{\sqrt{f'^2(x_n) k'^2 \; f^2(x_n)}}, n \geq 0.$$

Berdasarkan uraian diatas, maka pada Tugas Akhir ini penulis akan mengkonstruksi metode iterasi baru dari persamaan fungsi $xy + y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, supaya metode iterasi baru bebas dari turunan kedua, penulis mereduksinya menggunakan bentuk fungsi yang sama yaitu $y + xy + x^3 + sx^2 + tx + r = 0$ dengan teknik mereduksi fungsi, sama seperti yang telah di lakukan oleh (Chun, 2007), (Xiaojian, 2008), (Yu dan Xu, 2012), (Badrun dan Wartono, 2019). Oleh karena itu, pada Tugas Akhir ini penulis akan memberi judul **"Konstruksi Metode Iterasi Tanpa Turunan Kedua Menggunakan Fungsi $xy + y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$".**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian diatas rumusan masalah yang akan dibahas pada Tugas Akhir ini adalah "Bagaimana Mengkonstruksi Metode Iterasi Tanpa Turunan Kedua Menggunakan Fungsi $xy + y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$?".

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada Tugas Akhir ini yaitu fungsi-fungsi yang digunakan merupakan persamaan nonlinear dengan variabel tunggal dan bernilai riil.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengkonstruksi metode iterasi baru tanpa turunan kedua dengan menggunakan fungsi $xy + y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.
2. Menentukan orde konvergensi dari metode iterasi baru.
3. Menentukan jumlah iterasi *Computational Order of Convergence* (COC).
4. Mendapatkan nilai-nilai fungsi, galat relatif dan galat mutlak $|f(x_n)|$.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Memberikan bentuk metode iterasi baru terhadap pengembangan keilmuan khususnya pada bidang metode numerik.
2. Dapat digunakan untuk menentukan akar-akar persamaan nonlinear dengan orde konvergensi yang lebih tinggi dari persamaan klasiknya.
3. Menambah bentuk baru dari metode-metode iterasi yang dapat dijadikan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear.
4. Dapat dijadikan bahan dasar untuk referensi pengembangan metode lainnya.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini mencakup lima bab, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, dan manfaat penelitian.

BAB II LANDASAN TEORI

Bab ini berisi toeri-teori dasar yang digunakan dalam proses penelitian.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

Bab ini berisi tentang langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian pada tugas Akhir ini.

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini berisi tentang pembahasan dan pemaparan hasil penelitian pada Tugas Akhir.

BAB V PENUTUP

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran yang diperoleh dari penelitian yang telah dilakukan.

BAB II

LANDASAN TEORI

Teori dasar yang digunakan sebagai acuan pada penulisan tugas akhir ini, yaitu deret Taylor, orde hampiran, orde konvergensi, *Computational Order of Convergence* (COC), indeks efisiensi, metode iterasi yang dikonstruksi dari fungsi linear dan metode iterasi yang dikonstruksi dari fungsi kuadratik.

2.1 Deret Taylor

Pada persoalan matematika, terdapat beberapa fungsi $f(x)$ yang bentuknya kompleks seperti fungsi $f(x)=e^x$, sehingga kita akan mengalami kesulitan dalam perhitungannya tanpa mengunakan kalkulator atau komputer. Salah satu solusi penyelesaian dari persoalan tersebut adalah dengan menggunakan deret Taylor karena deret Taylor merupakan suatu fungsi terdeferensiasi yang dapat dinyatakan dalam suatu deret pangkat atau suku banyak (*polynomial*) dengan suku yang tak-terhingga. Deret ini dapat dianggap sebagai limit *polynomial* Taylor.

Teorema 2.1 (Purcell, 2008) Misalkan f fungsi yang turunan ke-$(n+1)$, $f^{(n+1)}(x)$ ada untuk masing-masing x dalam interval terbuka I yang mengandung a. Maka untuk masing-masing x dalam I dengan bentuk:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x),$$

dengan sisa atau galat $R_n(x)$ diberikan oleh rumus:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$ dan c suatu titik di antara x dan a.

Dengan demikian deret Taylor yang dipotong sampai suku orde ke-n dapat ditulis sebagai berikut:

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (2.1)$$

Pembuktian Teorema 2.1 telah dijelaskan pada buku (Purcel, 2008).

Contoh 2.1 Carilah hampiran $P_1(x)$ dan $P_2(x)$ kedalam deret Taylor dipersekitaran $x_0 = 1$ untuk $f(x) = e^{2x}$.

Penyelesaian

$f(x) = e^{2x}$, maka $f(1) = e^2$,

$f'(x) = 2e^{2x}$, maka $f'(1) = 2e^2$,

$f''(x) = 4e^{2x}$, maka $f''(1) = 4e^2$.

Berdasarkan Persamaan (2.1), $f(x)$ dihampiri dengan deret Taylor dengan $P_1(x)$ dan $P_2(x)$.

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) \\
&= e^2 + 2e^2(x-1) \\
&= e^2(-1+2x).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\
&= e^2 + 2e^2(x-1) + \frac{4e^2}{2!}(x-1)^2 \\
&= e^2(1-2x+2x^2).
\end{aligned}
$$

2.2 Orde Hampiran

Di dalam metode numerik, fungsi $f(x)$ yang rumit sering digantikan dengan fungsi hampiran yang lebih sederhana atau dikenal dengan orde hampiran, karena orde hampiran merupakan salah satu cara untuk menunjukkan ketelitian penghampiran sebuah fungsi dan dinotasikan dengan $O(h^n)$.

Definisi 2.1 (Mathews, 1992) Misalkan $f(h)$ dihampiri dengan fungsi $p(h)$. Jika $|f(h) - p(h)| \le M|h^n|$, dengan M adalah konstanta riil dan $M > 0$, maka dapat dikatakan bahwa $p(h)$ menghampiri $f(h)$ dengan orde penghampiran $O(h^n)$ sehingga dapat ditulis:

$$f(h) = p(h) + O(h^n),$$

dengan $O(h^n)$ dapat diartikan sebagai orde galat hampiran fungsi.

Umumnya h bernilai cukup kecil yaitu kurang dari satu, sehingga semakin tinggi nilai n maka galat akan semakin kecil, yang berarti semakin teliti penghampiran fungsinya, sehingga dapat dikatakan bahwa metode yang berorde $O(h^2)$ lebih teliti hasilnya dari pada metode yang berorde $O(h)$.

Andaikan suatu fungsi dihampiri oleh deret Taylor,

$$x_{i+1} = x_i + h,$$

dengan

$i = 0,1,2,\ldots$

adalah titik-titik selebar h, maka hampiran $f(x_{i+1})$ disekitar x_i dalam bentuk:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} f'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} f''(x_i) + \ldots$$

$$+ \frac{(x_{i+1} - x_i)^n}{n!} f^n(x_i) + R_n(x_{i+1})$$

$$= f(x_i) + \frac{h}{1!} f'(x_i) + \frac{h}{2!} f''(x_i) + \ldots + \frac{h}{n!} f^n(x_i) + R_n(x_{i+1}),$$

dengan

$$R_n(x_{i+1}) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(t) = O(h^{n+1}), x_i < t < x_{n+1},$$

diperoleh:

$$f(x_{i+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_i) + O(h^{n+1}).$$

Sebagai contoh: $e^h = 1 + h + O(h^2)$ adalah orde hampiran dua,

$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + O(h^3)$ adalah orde hampiran tiga,

$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h3}{3!} + O(h^4)$ adalah orde hampiran empat,

$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + O(h^5)$ adalah orde hampiran lima.

2.3 Orde Konvergensi

Orde konvergensi adalah suatu tingkat percepatan pada metode iterasi dalam menghampiri akar-akar persamaan fungsi. Semakin besar orde konvergensi suatu metode maka akan lebih cepat dalam menghampiri akar-akar persamaan fungsi.

Definisi 2.2 Galat Orde Konvergensi (Mathews, 1992) Misalkan $\{x_n\}$ adalah sebuah barisan yang konvergen terhadap α dan himpunan $e_n = x_n - \alpha$ untuk $n \geq 0$. Jika terdapat bilangan konstanta galat $K \neq 0$ dan orde konvergensi $p > 0$, dengan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = K,$$

maka barisan $\{x_n\}$ konvergen terhadap α dengan orde konvergensi *p*.

Didapatkan $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$ dan $p = 4$, maka barisan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ dikatakan masing-masing memiliki orde konvergensi satu, dua, tiga, dan empat.

Definisi 2.3 Orde Konvergensi (Mathews, 1992) Diberikan $e_n = x_n - \alpha$ merupakan galat pada iterasi ke-n, maka didefinisikan:

$$e_{n+1} = ce_n^p + O(e_n^{p+1}). \tag{2.2}$$

Persamaan (2.2) merupakan persamaan galat. Jika diperoleh persamaan galat untuk sembarang metode iterasi, maka nilai p disebut sebagai orde konvergensi. Pada contoh metode Newton yang memiliki persamaan galat $e_{n+1} = c_2 e_n^2 + O(e_n^3)$, berdasarkan definisi mengenai orde konvergensi, dari persamaan galat tersebut diperoleh nilai $p = 2$. Sehingga terbukti bahwa metode Newton memiliki orde konvergensi dua.

2.4 *Computational Order of Convergence* (COC)

Definisi 2.4 (Weerakon & Fernando, 2000) Misalkan α adalah akar dari $f(x)$ dan andaikan x_{n+1}, x_n dan x_{n-1} berturut-turut adalah iterasi yang dekat dengan α, maka *Computational Order of Convergence* (COC) yang dilambangkan dengan ρ dapat diaproksimasikan dengan menggunakan rumus:

$$\rho \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)\right|}{\ln\left|(x_n-\alpha)/(x_{n-1}-\alpha)\right|}.$$

Dikatakan bahwa $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$, maka *Computational Order of Convergence* (COC) dari suatu barisan $\{x_n\}_{n\geq 0}$ adalah:

$$\rho \approx \frac{\ln\left|e_{n+1}/e_n\right|}{\ln\left|e_n/e_{n-1}\right|}.$$

Contoh 2.2 Diberikan fungsi nonlinear $f(x) = x^2 - 2$, tentukan iterasi fungsi tersebut dengan nilai awal $x_0 = 1$ dan $\alpha = 1{,}41421356$ menggunakan metode Newton.

Penyelesaian

$$f(x) = x^2 - 2,$$

$$f'(x) = 2x.$$

Selanjutnya, nilai x_1 dapat dihitung dengan menggunakan metode Newton yang diberikan nilai awal $x_0 = 1$, sehingga diperoleh:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

$$x_1 = 1 - \frac{(-1)}{(2)},$$

$$x_1 \approx 1{,}5.$$

Digunakan cara yang sama secara berturut-turut, diperoleh:

$x_2 \approx 1{,}41666667$, $x_3 \approx 1{,}41421569$, $x_4 \approx 1{,}4142156$ dan $x_5 \approx 1{,}41421356$.

Tentukan nilai $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, sehingga didapat:

$$\rho_1 = \frac{\ln\left|(x_2-\alpha)/(x_1-\alpha)\right|}{\ln\left|(x_1-\alpha)/(x_0-\alpha)\right|}$$

$$= \frac{\ln\left|(1{,}41666667 - 1{,}41421356)/(1{,}5 - 1{,}41421356)\right|}{\ln\left|(1{,}5 - 1{,}41421356)/(1 - 1{,}41421356)\right|}$$

$$= 2{,}25751652 .$$

Cara yang sama diperoleh nilai $\rho_2 = 1{,}98391945$, $\rho_3 = 1{,}99975445$ dan $\rho_4 = 1{,}99999989$.

Hasil COC dari Metode Newton ditunjukkan pada Tabel 2.1 berikut:

Tabel 2.1 Hasil Iterasi dari COC Metode Newton

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$	COC
1	1,5	0,5	-
2	1,41666667	8,33333333e-01	2,25751652e+00
3	1,41421569	2,45098039e-02	1,98391945e+00
4	1,41421356	2,12389982e-04	1,99975445e+00
5	1,41421356	1,59486182e-12	1,99999989e+00

Berdasarkan Tabel 2.1 dapat dilihat bahwa metode Newton memiliki orde konvergensi dua dengan $\rho \approx 2$.

2.5 Indeks Efisiensi

Definisi 2.5 (Traub, 1964) Misalkan q adalah jumlah dari evaluasi pada fungsi atau salah satu dari derivatifnya, maka efisiensi dari suatu metode diukur dengan indeks efisiensi yang didefinisikan oleh:

$$E = p^{1/q},$$

dengan p adalah orde konvergensi dari dari suatu metode.

Contohnya, metode Newton memiliki orde konvergensi dua dan melibatkan dua evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$, sehingga indeks efisiensi metode Newton adalah $2^{1/2} \approx 1{,}4142$. Metode Chebyshev memiliki orde konvergensi tiga dan melibatkan tiga evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$, $f'(x_n)$ dan $f''(x_n)$, sehingga indeks efisiensi metode Chebyshev adalah $3^{1/3} \approx 1{,}4422$..

Berdasarkan uraian diatas dapat disimpulkan bahwa metode Chebyshev lebih efektif jika dibandingkan dengan metode Newton. Hal itu dikarenakan indeks efisiensi metode Chebyshev lebih tinggi dibandingkan metode Newton.

2.6 Metode Iterasi yang dikonstruksi dari Fungsi Linier dan Orde Konvergensinya

Selain dengan menggunakan pemotongan deret Taylor orde satu, metode Newton juga dapat dihasilkan dari pendekatan fungsional, yaitu dengan mempertimbangkan kembali persamaan fungsi linear dalam bentuk:

$$y(x) = ax + b. \tag{2.3}$$

Melalui titik $(x_n, y(x_n))$, Persamaan (2.3) dapat ditulis menjadi:

$$y(x) - y(x_n) = a(x - x_n) + b. \tag{2.4}$$

Turunan pertama dari Persamaan (2.3) adalah $y'(x) = a$, kemudian dengan mengambil $x = x_n$, maka dari turunan pertama tersebut dapat diperoleh konstanta a yaitu:

$$a = y'(x_n). \tag{2.5}$$

Konstanta b dapat diperoleh dari Persamaan (2.4) dengan mengambil $x = x_n$ yaitu:

$$b = 0. \tag{2.6}$$

Selanjutnya, Persamaan (2.5) dan (2.6) disubtitusikan ke Persamaan (2.4) sehingga diperoleh:

$$y(x) - y(x_n) = y'(x_n)(x - x_n),$$

atau

$$y(x) = y'(x_n)(x - x_n) + y(x_n). \tag{2.7}$$

Asumsikan Persamaan (2.7) berpotongan di sumbu-x pada titik $(x_{n+1}, 0)$, sehingga didapat $y(x_{n+1}) = 0$ dalam bentuk:

$$y(x_{n+1}) = y'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + y(x_n),$$

atau

$$0 = y'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + y(x_n). \tag{2.8}$$

Apabila diberikan kondisi $y(x_n) = f(x_n), y'(x_n) = f'(x_n)$ pada Persamaan (2.8), maka diperoleh:

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0\,. \tag{2.9}$$

Persamaan (2.9) merupakan bentuk dari deret Taylor orde satu, sehingga dapat diperoleh metode iterasi Newton-Raphson dengan bentuk:

$$f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -f(x_n)\,,$$

atau

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \geq 0 \text{ dan } f'(x_n) \neq 0\,. \tag{2.10}$$

Persamaan (2.10) merupakan metode Newton yang memiliki orde konvergensi satu dengan melibatkan dua evaluasi fungsi, kemudian akan dibahas mengenai orde konvergensi dari metode tersebut.

Teorema 2.2 Asumsikan $\alpha \in D$ adalah akar dari fungsi $f(x)$ dengan $f : D \subset R$ yang terdiferensial pada interval terbuka D. Jika x_0 cukup dekat ke α, maka dari Persamaan (2.10) akan diperoleh galat $e_{n+1} = c_2 e_n^2 + O(e_n^3)$ dengan $e_n = x_n - \alpha$ dan $c_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j = 2, 3, 4, \ldots$

Bukti Misalkan α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$. Asumsikan bahwa $f'(\alpha) \neq 0$ dan $x_n = e_n + \alpha$, selanjutnya dengan menggunakan deret Taylor aproksimasi $f(x_n)$ di sekitar α, diberikan oleh:

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x_n - \alpha)^2 + \ldots,$$

misalkan $x_n = e_n + \alpha$ dan $f(x) = 0$, maka:

$$f(x_n) = f'(\alpha)e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!}e_n^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= f'(\alpha)\left(e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!\,f'(\alpha)}e_n^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!\,f'(\alpha)}e_n^3 + \frac{O(e_n^4)}{f'(\alpha)}\right)$$

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right), \tag{2.11}$$

gunakan deret Taylor dari $f'(x_n)$ disekitar α diperoleh:

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + O(e_n^4)\right). \tag{2.12}$$

Selanjutnya, Persamaan (2.11) dibagi dengan Persamaan (2.12) didapatkan:

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\alpha)\left(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{f'(\alpha)\left(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O(e_n^4)\right)}$$

$$= \frac{e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)}{1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)}.$$

Misalkan $u = 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O(e_n^4)$, maka dengan menggunakan deret $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots$, diperoleh:

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + (-2c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4). \quad (2.13)$$

Persamaan (2.13) disubtitusikan ke Persamaan (2.10) , sehingga didapatkan:

$$x_{n+1} = x_n - \left(e_n - c_2e_n^2 + O(e_n^3)\right), \quad (2.14)$$

misalkan $x_{n+1} = \alpha + e_{n+1}$ dan $x_n = \alpha + e_n$, maka Persamaan (2.14) menjadi:

$$e_{n+1} = c_2e_n^2 + O(e_n^3). \quad (2.15)$$

Persamaan (2.15) merupakan persamaan galat untuk metode Newton yang menunjukkan bahwa metode Newton memiliki orde konvergensi kuadratik.

2.7 Metode Iterasi yang dikonstruksi dari Fungsi Kuadratik

Selain menggunakan pemotongan deret Taylor orde dua, metode Chebyshev dan Halley juga dapat dihasilkan dari pendekatan fungsional, yaitu dengan mempertimbangkan kembali persamaan fungsi kuadratik dalam bentuk:

$$y + ax^2 + bx + c = 0. \quad (2.16)$$

Melalui titik $(x_n, y(x_n))$ Persamaan (2.16) dapat ditulis:

$$y(x) - y(x_n) + a(x - x_n)^2 + b(x - x_n) + c = 0. \quad (2.17)$$

Turunan pertama dan kedua dari Persamaan (2.17) dengan menggunakan teknik turunan implisit masing-masing dapat ditulis:

$$y'(x) + 2a(x - x_n) + b = 0, \quad (2.18)$$

dan

$$y''(x) + 2a = 0. \quad (2.19)$$

Dengan mengambil $x = x_n$ pada Persamaan (2.19), (2.18) dan (2.17), diperoleh konstanta *a*, *b* dan *c* yang masing-masing dapat ditulis:

$$a = \frac{-y''(x_n)}{2}, \tag{2.20}$$

$$b = -y'(x_n), \tag{2.21}$$

$$c = 0. \tag{2.22}$$

Selanjutnya, persamaan (2.20), (2.21) dan (2.22) disubtitusikan ke Persamaan (2.17) maka diperoleh bentuk baru yaitu:

$$y(x) - y(x_n) + \left(\frac{-y''(x_n)}{2}\right)(x - x_n)^2 + \left(-y'(x_n)\right)(x - x_n) = 0,$$

atau

$$y(x) = y(x_n) + y'(x_n)(x - x_n) + \frac{y''(x_n)}{2}(x - x_n)^2. \tag{2.23}$$

Asumsikan Persamaan (2.23) berpotongan di sumbu-x pada titik $(x_{n+1}, 0)$, sehingga $y(x_{n+1}) = 0$, maka diperoleh:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{y''(x_n)}{2}(x_{n+1} - x_n)^2,$$

atau

$$0 = y(x_n) + y'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{y''(x_n)}{2}(x_{n+1} - x_n)^2. \tag{2.24}$$

Apabila diberikan kondisi $y(x_n) = f(x_n), y'(x_n) = f'(x_n)$ pada Persamaan (2.24), maka didapatkan:

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2}(x_{n+1} - x_n)^2 = 0. \tag{2.25}$$

Persamaan (2.25) berbentuk deret Taylor orde dua yang dapat diselesaikan dengan menggunakan dua cara sehingga didapatkan metode Chebyshev dan Halley.

2.7.1 Metode Chebyshev dan Orde Konvergensinya

Metode Chebyshev dapat diperoleh dengan mempertimbangkan kembali Persamaan (2.25), kemudian kedua ruas persamaan tersebut ditambah dengan $-f(x_n)$ dan $-\frac{f''(x_n)}{2}(x_{n+1}-x_n)^2$, sehingga diperoleh:

$$f'(x_n)(x_{n+1}-x_n) = -f(x_n) - \frac{f''(x_n)}{2}(x_{n+1}-x_n)^2. \tag{2.26}$$

Selanjutnya, kedua ruas pada Persamaan (2.26) dikali dengan $\frac{1}{f'(x_n)}$ maka diperoleh:

$$x_{n+1}-x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}(x_{n+1}-x_n)^2,$$

atau

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}(x_{n+1}-x_n)^2. \tag{2.27}$$

Kemudian substitusi $x_{n+1}-x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ pada Persamaan (2.27) sehingga diperoleh metode Chebyshev yaitu:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)f^2(x_n)}{2f'^3(x_n)}. \tag{2.28}$$

Persamaan (2.28) merupakan metode Chebyshev yang memiliki orde konvergensi tiga dengan melibatkan tiga evaluasi fungsi, kemudian akan dibahas mengenai orde konvergensi dari metode tersebut.

Teorema 2.3 Asumsikan $\alpha \in D$ adalah akar dari fungsi $f(x)$ dengan $f: D \subset R$ yang terdiferensial pada interval terbuka D. Jika x_0 cukup dekat ke α, maka Persamaan (2.28) diperoleh galat $e_{n+1} = (-c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)$ dengan $e_n = x_n - \alpha$ dan $c_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)},\ j = 2,\ 3,\ 4,\ ...$

Bukti Misalkan α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha)=0$. Asumsikan bahwa $f'(\alpha)\neq 0$ dan $x_n = e_n + \alpha$, selanjutnya dengan menggunakan deret Taylor aproksimasi $f(x_n)$ di sekitar α, diberikan oleh:

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x_n-\alpha)^2 + \ldots,$$

misalkan $x_n = e_n + \alpha$ dan $f(x)=0$, maka:

$$f(x_n) = f'(\alpha)e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!}e_n^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= f'(\alpha)\left(e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!\,f'(\alpha)}e_n^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!\,f'(\alpha)}e_n^3 + \frac{O(e_n^4)}{f'(\alpha)}\right)$$

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right), \tag{2.29}$$

gunakan deret Taylor dari $f'(x_n)$ disekitar α diperoleh:

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\left(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O(e_n^4)\right), \tag{2.30}$$

dengan melakukan hal yang sama, ekspansi $f''(x_n)$ disekitar α dalam bentuk:

$$f''(x_n) = f'(\alpha)(2c_2 + 6c_3e_n + 12c_4e_n^2 + 20c_5e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{2.31}$$

Selanjutnya, Persamaan (2.29) dibagi dengan Persamaan (2.30) didapatkan:

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\alpha)\left(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{f'(\alpha)\left(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O(e_n^4)\right)}$$

$$= \frac{e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)}{1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)}.$$

Misalkan $u = 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + 4c_4e_n^3 + O(e_n^4)$, maka dengan menggunakan deret $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots$, diperoleh:

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - c_2e_n^2 + (-2c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.32}$$

Kemudian, Persamaan (2.29) dikuadratkan dan dikali dengan Persamaan (2.31) maka diperoleh:

$$f^2(x_n)f''(x_n) = 2c_2e_n^2 + (6c_3 + 4c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.33}$$

Persamaan (2.30) dipangkatkan tiga kemudian dikali dua sehingga didapatkan:

$$2f'^3(x_n) = 2 + 12c_2e_n + (18c_3 + 24c_2^2)e_n^2 + (24c_4 + 72c_2c_3 + 16c_2^3)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.34}$$

Kemudian, Persamaan (2.33) dibagi dengan Persamaan (2.34) , diperoleh:

$$\frac{f^2(x_n)f''(x_n)}{2f'^3(x_n)} = c_2e_n^2 + (3c_3 - 4c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.35}$$

Persamaan (2.32) dan Persamaan (2.35) disubstitusikan ke Persamaan (2.28) diperoleh:

$$x_{n+1} = x_n + (-c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4), \tag{2.36}$$

misalkan $x_{n+1} = \alpha + e_{n+1}$ dan $x_n = \alpha + e_n$, maka Persamaan (2.36) menjadi:

$$e_{n+1} = (-c_3 + 2c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.37}$$

Persamaan (2.37) merupakan persamaan galat untuk metode Chebyshev yang menunjukkan bahwa metode Chebyshev memiliki orde konvergensi kubik.

2.7.2 Metode Halley dan Orde Konvergensinya

Metode Halley dapat diperoleh dengan mempertimbangkan kembali Persamaan (2.25), kemudian kedua ruas persamaan tersebut ditambah dengan $-f(x_n)$, sehingga diperoleh:

$$f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2}(x_{n+1} - x_n)^2 = -f(x_n). \tag{2.38}$$

Keluarkan $(x_{n+1} - x_n)$ pada Persamaan (2.38) maka diperoleh:

$$(x_{n+1} - x_n)\left[f'(x_n) + \frac{f''(x_n)}{2}(x_{n+1} - x_n)\right] = -f(x_n). \tag{2.39}$$

Selanjutnya, kalikan kedua ruas pada Persamaan (2.39) dengan $\dfrac{1}{f'(x_n) + \dfrac{f''(x_n)}{2}(x_{n+1} - x_n)}$, sehingga diperoleh:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{-2f(x_n)}{2f'(x_n) + f''(x_n)(x_{n+1} - x_n)},$$

atau

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)}{2f'(x_n) + f''(x_n)(x_{n+1} - x_n)}. \tag{2.40}$$

Kemudian, substitusi $x_{n+1} - x_n = -\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ pada Persamaan (2.40), maka diperoleh metode Halley yaitu:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'(x_n)^2 - f''(x_n)f(x_n)}. \tag{2.41}$$

Persamaan (2.41) merupakan metode Halley yang memiliki orde konvergensi tiga dengan melibatkan tiga orde konvergensi, kemudian akan dibahas mengenai orde konvergensi dari metode tersebut.

Teorema 2.4 Asumsikan $\alpha \in D$ adalah akar dari fungsi $f(x)$ dengan $f : D \subset R$ yang terdiferensial pada interval terbuka D. Jika x_0 cukup dekat ke α, maka Persamaan (2.41) diperoleh galat $e_{n+1} = (-c_3 + c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4)$ dengan $e_n = x_n - \alpha$ dan $c_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j = 2, 3, 4, \ldots$

Bukti Misalkan α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$. Asumsikan bahwa $f'(\alpha) \neq 0$ dan $x_n = e_n + \alpha$, selanjutnya dengan menggunakan deret Taylor aproksimasi $f(x_n)$ di sekitar α, diberikan oleh:

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x_n - \alpha)^2 + \ldots,$$

misalkan $x_n = e_n + \alpha$ dan $f(x) = 0$, maka:

$$f(x_n) = f'(\alpha)e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!}e_n^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!}e_n^3 + O(e_n^4)$$

$$= f'(\alpha)\left(e_n + \frac{f''(\alpha)}{2!\,f'(\alpha)}e_n^2 + \frac{f'''(\alpha)}{3!\,f'(\alpha)}e_n^3 + \frac{O(e_n^4)}{f'(\alpha)}\right)$$

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right), \tag{2.42}$$

gunakan deret Taylor dari $f'(x_n)$ disekitar α diperoleh:

$$f'(x_n) = f'(\alpha)\left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + O(e_n^4)\right), \tag{2.43}$$

dengan melakukan hal yang sama, ekspansi $f''(x_n)$ disekitar α dalam bentuk:

$$f''(x_n) = f'(\alpha)(2c_2 + 6c_3 e_n + 12c_4 e_n^2 + 20c_5 e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{2.44}$$

Kali dua Persamaan (2.42) kemudian dikali lagi dengan Persamaan (2.43), maka didapatkan:

$$2f(x_n)f'(x_n) = 2e_n + 6c_2 e_n^2 + (8c_3 + 4c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.45}$$

Kuadratkan Persamaan (2.43) kemudian dikali 2 maka diperoleh:

$$2f'^2(x_n) = 2 + 8c_2 e_n + (12c_3 + 8c_2^2)e_n^2 + (16c_4 + 24c_2c_3)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.46}$$

Selanjutnya, kalikan Persamaan (2.42) dengan Persamaan (2.44) sehingga didapatkan:

$$f(x_n)f''(x_n) = 2c_2 e_n + (2c_2^2 + 6c_3)e_n^2 + (8c_2c_3 + 12c_4)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.47}$$

Kurangkan Persamaan (2.46) dengan Persamaan (2.47) diperoleh:

$$2f'^2(x_n) - f(x_n)f''(x_n) = 2 + 6c_2 e_n + (6c_3 + 6c_2^2)e_n^2 + (4c_4 + 16c_2c_3)e_n^3 + O(e_n^4) \tag{2.48}$$

Kemudian, Persamaan (2.45) dibagi dengan Persamaan (2.48) maka didapatkan:

$$\frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'^2(x_n) - f(x_n)f''(x_n)} = e_n + (-c_3 + c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.49}$$

Persamaan (2.49) disubstitusikan ke Persamaan (2.41) diperoleh hasilnya yaitu:

$$x_{n+1} = x_n + (-c_3 + c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4), \tag{2.50}$$

misalkan $x_{n+1} = \alpha + e_{n+1}$ dan $x_n = \alpha + e_n$, maka Persamaan (2.50) menjadi :

$$e_{n+1} = (-c_3 + c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.51}$$

Persamaan (2.51) merupakan persamaan galat untuk metode Halley yang menunjukkan bahwa metode Halley memiliki orde konvergensi kubik.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Pada bab ini, metodologi yang digunakan dalam penyelesaian Tugas Akhir ini adalah metode studi kepustakaan yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi-informasi yang berasal dari sumber berupa buku, jurnal, dan artikel yang berhubungan dengan penelitian ini.

Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam metodologi penelitian ini adalah:

1. Diberikan persamaan fungsi yaitu:
$$xy + y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,. \tag{3.1}$$
2. Melalui titik $(x_n, y(x_n))$, Persamaan (3.1) dapat ditulis:
$$(x-x_n)(y(x)-y(x_n)) + (y(x)-y(x_n)) + a(x-x_n)^3 + b(x-x_n)^2 + c(x-x_n) + d = 0\,. \tag{3.2}$$
3. Menentukan turunan pertama dan turunan kedua dari Persamaan (3.2) menggunakan turunan implisit, maka diperoleh:
   a. Turunan pertama
   $$((x-x_n)+1)y'(x) + (y(x)-y(x_n)) + 3a(x-x_n)^2 + 2b(x-x_n) + c = 0 \tag{3.3}$$
   b. Turunan kedua
   $$((x-x_n)+1)y''(x) + 2y'(x) + 6a(x-x_n) + 2b = 0\,. \tag{3.4}$$
4. Mendapatkan konstanta b, c dan d berturut-turut dari Persamaan (3.4), (3.3) dan (3.2) dengan mengambil $x = x_n$.
5. Mensubstitusikan konstanta b, c dan d ke Persamaan (3.2), sehingga diperoleh:
$$(x-x_n)(y(x)-y(x_n)) + (y(x)-y(x_n)) + a(x-x_n)^3 - \left(\frac{y''(x_n)+2y'(x_n)}{2}\right)(x-x_n)^2 - y'(x_n)(x-x_n) = 0\,. \tag{3.5}$$

6. Asumsikan bahwa Persamaan (3.5) berpotongan pada sumbu-x dititik $(x_{n+1},0)$ dan diberikan kondisi $y(x_n)=f(x_n)$, $y'(x_n)=f'(x_n)$, dan $y''(x_n)=f''(x_n)$, sehingga diperoleh bentuk umum yaitu:

$$Ah^3+Bh^2+Ch+D=0\,, \tag{3.6}$$

dengan

$h=x_{n+1}-x_n$,

$A=a$,

$B=-\left(\dfrac{f''(x_n)+2f'(x_n)}{2}\right)$,

$C=-(f'(x_n)+f(x_n))$,

$D=-f(x_n)$.

7. Menentukan bentuk umum metode iterasi baru dari Persamaan (3.6) dengan menggunakan dua cara yang telah digunakan pada persamaan kuadratik untuk memperoleh metode Chebyshev dan Halley yaitu dalam bentuk:

$$h_1=\frac{-Ah^3-Bh^2-D}{C}, \tag{3.7}$$

dan

$$h_2=\frac{-D}{Ah^2+Bh+C}. \tag{3.8}$$

8. Menghilangkan $f''(x_n)$ pada Persamaan (3.7) dan (3.8) dengan menggunakan persamaan $y+xy+x^3+sx^2+tx+r=0$, yaitu:

$$f''(x_n)=-\frac{2f'(x_n)+6(x_n)+2s}{x_n+1}. \tag{3.9}$$

9. Persamaan (3.9) disubtitusikan ke Persamaan (3.7) dan (3.8) maka diperoleh dua metode iterasi baru tanpa turunan kedua.
10. Menentukan orde konvergensi dan indeks efisiensi berdasarkan dua persamaan iterasi yang dihasilkan.
11. Membuat simulasi numerik menggunakan bahasa pemrograman *Maple 13*.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Konstruksi metode iterasi selain menggunakan deret Taylor juga dapat melalui pendekatan fungsional, salah satunya dari persamaan fungsi $xy + y + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ yang menghasilkan dua metode iterasi baru dan kedua metode iterasi tersebut memiliki orde konvergensi tiga, untuk menghidari penggunakan turunan kedua maka digunakan Persamaan (4.14), sehingga didapatkan dua metode iterasi baru yaitu metode iterasi Tipe A tanpa turunan kedua pada Persamaan (4.15) dan metode iterasi Tipe B tanpa turunan kedua pada Persamaan (4.25).

Berdasarkan analisis orde konvergensi, Persamaan (4.15) dan Persamaan (4.25) memiliki orde onvergensi empat dengan $\theta = 0$ yang melibatkan tiga evaluasi fungsi yaitu $f'(x_n), f(w_n)$ dan $f(x_n)$, memiliki indeks efisiensi sebesar $4^{1/3} \approx 1{,}587401$, yang masing-masing galatnya dapat ditulis sebagai berikut:

$$e_{n+1} = (-c_2c_3 + 2c_2^2 + 5c_2^3)e_n^4 + O(e_n^5) \text{ dan } e_{n+1} = (2c_2^3 - c_2c_3)e_n^4 + O(e_n^5).$$

Berdasarkan hasil simulasi numerik, metode iterasi baru Tipe A dan Tipe B yang diperoleh, cepat mencapai kekonvergenan dan lebih efektif digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear dalam menghampiri akar persamaan jika dibandingkan dengan metode Newton, metode Chebyshev, metode Halley, dan metode Newton Ganda. Hal ini ditunjukkan oleh jumlah iterasi yang lebih sedikit dibandingkan dengan beberapa metode tersebut.

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini, penulis termotivasi oleh Chun (2007) yang mengonstruksi metode iterasi dari persamaan parabola $x^2 + ax + by + c = 0$ dan $x^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$, lalu turunan kedua dari metode iterasi tersebut dapat dihilangkan dengan mereduksi dari persamaan lain seperti yang telah dilakukan oleh Xiaojian (2008), Yu dan Xu (2012), Badrun dan Wartono (2019).

Penulis juga menggunakan COC dan indeks efisiensi untuk melihat orde konvergensi dan keefektifan kedua metode iterasi baru. Selanjutnya, Penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengembangkan hasil konstruksi pada Tugas Akhir ini agar mendapatkan metode iterasi baru dengan orde konvergensi tinggi dan lebih efektif digunakan dalam menyelesaikan persamaan nonlinear.

DAFTAR PUSTAKA

Amat, S., S. Busquier, dan J.M. Gutierrez. "Geometric Constructions of Iterative Functions to Solve Nonlinear Equations," *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Vol. 157, hal. 197-205, 2003.

Amat, S., S. Busquier, et all. "On The Global Convergence of Chebysev's Iterative Method," *Journal of Computational and Applied Mathematics*. Vol. 220, hal. 17-21, 2008.

Badrun, S., dan Wartono. "Modifikasi Metode Weerakoon-Fernando dengan Orde Konvergensi Empat," *Jurnal Sains Matematika Dan Statistika*. Vol. 5, hal. 133-140, 2019.

Behl, R., V. Kanwar, dan K.K. Sharma. "Another Simple Way of Deriving Several Iterative Functions to Solve Nonlinear Equations," *Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics*. Vol. 2012, hal. 1-21, 2012.

Chapra, S. C., dan R.P. Canale. "*Metode Numerik Untuk Teknik*." Hal 125-180. Penerbit Universitas Indonesia, Jakarta. 2007.

Chun, C. "A One-Parameter Family of Third-Order Methods to Solve Nonlinear Equations," *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 189, hal. 126-130, 2007.

Chun, C. "Some Variants Of Chebyshev-Halley Methods Free From Second Derivative," *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 191, hal. 193-198, 2007.

Chun, C. "Some Second-Derivative-Free Variants Of Chebyshev-Halley Methods," *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 191, hal. 410-414, 2007.

Febrinicko, E., dan H. Rachmawati. "*Metode Numerik*." Hal 1-4. Penerbit Suska Press, Pekanbaru. 2008.

Gupta, K.C., V. Kanwar, dan S. Kumar. "A Family Of Ellips Methods For Solving Non-Linear Equations," *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. Vol. 4, hal. 571-575, 2008.

Kanwar, V., S. Singh, dan S. Bakshi. "Simple Geometric Constructions of Quadratically and Cubically Convergent Iterative Functions to Solve Nonlinear Equations," *Numer Algor*. Vol. 47, hal. 95-107, 2008.

Kung, H.T., dan J.F. Traub. "Optimal Order Of One-Point And Multipoint Iterations," *Journal Of The Association For Computing Machinery*. Vol. 21, hal. 643-651, 1974.

Mathews, J.H. "*Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering, 2nd*." Prentice Hall International, Inc. New York. 1992.

Melman, A. "Geometry and Convergence of Euler's and Halley's Methods," *Society for Industrial and Applied Mathematics*. Vol. 39, hal. 728-235, 1997.

Purcell, E.J. "*Kalkulus Edisi Kesembilan*." Jilid 2, hal. 107-108. Penerbit Erlangga, Jakarta. 2008.

Sharma, J.R. "A Family of Third-Order Methods to Solve Nonlinear Equations by Quadratic Curves Approximation," *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 184, hal. 210-215, 2007.

Traub, J.F. "*Iterative Methods for The Solution Of Equations*." Hal. 18-21. Prentice Hall, New York. 1964.

Weerakoon, S., dan T.G.I. Fernando. "A Variant Of Newton Method With Accelerated Third-Orde Convergence," *Applied Mathematics Letters*. Vol. 13, hal. 87-93, 2000.

Xiaojian, Z. "Modified Chebyshev-Halley Methods Fee From Second Derivative," *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 203, hal. 824-827, 2008.

Yu, X., dan Xu, X. "A New Family Of Chebyshev-Halley Like Methods Free From Second Derivative," *Fixed Point Theory*. Vol. 13, hal. 319-325, 2012.

LAMPIRAN A

Orde Konvergensi Metode Iterasi Tipe A

$> restart;$

$> Order := 8:$

$> xn := en + \text{alpha};$

$$xn := en + \alpha$$

$> fxn := collect\left(expand\left(series\left(fa\cdot\left(en + c2\cdot en^2 + c3\cdot en^3 + c4\cdot en^4 + c5\cdot en^5 + c6\cdot en^6 + O\left(en^7\right)\right), en\right)\right), [en]\right);$

$$fxn := fa\ en + fa\ c2\ en^2 + fa\ c3\ en^3 + fa\ c4\ en^4 + fa\ c5\ en^5 + fa\ c6\ en^6 + O\left(en^7\right)$$

$> dfxn := diff(fxn, en);$

$$dfxn := fa + 2\ fa\ c2\ en + 3\ fa\ c3\ en^2 + 4\ fa\ c4\ en^3 + 5\ fa\ c5\ en^4 + 6\ fa\ c6\ en^5 + O\left(en^6\right)$$

$> hasil1 := collect\left(expand\left(series\left(\frac{fxn}{dfxn}, en\right)\right), [en]\right);$

$$hasil1 := en - c2\ en^2 + \left(-2\ c3 + 2\ c2^2\right) en^3 + \left(7\ c2\ c3 - 3\ c4 - 4\ c2^3\right) en^4 + \left(10\ c2\ c4 - 4\ c5 + 6\ c3^2 - 20\ c3\ c2^2 + 8\ c2^4\right) en^5 + \left(13\ c2\ c5 - 5\ c6 + 17\ c4\ c3 - 28\ c4\ c2^2 - 33\ c2\ c3^2 + 52\ c3\ c2^3 - 16\ c2^5\right) en^6 + O\left(en^7\right)$$

$> wn := collect(expand(series(xn - hasil1, en)), [en]);$

$$wn := \alpha + c2\ en^2 + \left(2\ c3 - 2\ c2^2\right) en^3 + \left(-7\ c2\ c3 + 3\ c4 + 4\ c2^3\right) en^4 + \left(-10\ c2\ c4 + 4\ c5 - 6\ c3^2 + 20\ c3\ c2^2 - 8\ c2^4\right) en^5 + \left(-13\ c2\ c5 + 5\ c6 - 17\ c4\ c3 + 28\ c4\ c2^2 + 33\ c2\ c3^2 - 52\ c3\ c2^3 + 16\ c2^5\right) en^6 + O\left(en^7\right)$$

$> sn := collect(expand(series(wn - \text{alpha}, en)), [en]);$

$$sn := c2\ en^2 + \left(2\ c3 - 2\ c2^2\right) en^3 + \left(-7\ c2\ c3 + 3\ c4 + 4\ c2^3\right) en^4 + \left(-10\ c2\ c4 + 4\ c5 - 6\ c3^2 + 20\ c3\ c2^2 - 8\ c2^4\right) en^5 + \left(-13\ c2\ c5 + 5\ c6 - 17\ c4\ c3 + 28\ c4\ c2^2 + 33\ c2\ c3^2 - 52\ c3\ c2^3 + 16\ c2^5\right) en^6 + O\left(en^7\right)$$

$$> fwn := collect(expand(series(fa \cdot (sn + c2 \cdot sn^2 + c3 \cdot sn^3 + c4 \cdot sn^4 + c5 \cdot sn^5 + c6 \cdot sn^6), en)), [en]);$$

$$fwn := fa\ c2\ en^2 + (2\ fa\ c3 - 2\ c2^2\ fa)\ en^3 + (-7\ c2\ fa\ c3 + 3\ fa\ c4 + 5\ fa\ c2^3)\ en^4 + (-10\ c2\ fa\ c4 + 4\ fa\ c5 - 6\ fa\ c3^2 + 24\ fa\ c3\ c2^2 - 12\ fa\ c2^4)\ en^5 + (-13\ c2\ fa\ c5 + 5\ fa\ c6 - 17\ fa\ c4\ c3 + 34\ fa\ c4\ c2^2 + 37\ fa\ c3^2\ c2 - 73\ fa\ c3\ c2^3 + 28\ fa\ c2^5)\ en^6 + O(en^7)$$

$$> M := simplify(collect(expand(series((-fwn \cdot dfxn^3 \cdot xn + \theta \cdot (fwn \cdot dfxn^2 \cdot fxn + fxn^3) - fwn \cdot dfxn^3), en)), [en]));$$

$$M := (-fa^4\ c2\ \alpha - fa^4\ c2)\ en^2 + (-fa^4\ c2 - 4\ \alpha\ fa^4\ c2^2 - 2\ \alpha\ fa^4\ c3 + \theta\ fa^4\ c2 + \theta\ fa^3 - 4\ fa^4\ c2^2 - 2\ fa^4\ c3)\ en^3 + (3\ \theta\ fa^4\ c2^2 + 2\ \theta\ fa^4\ c3 + 3\ \theta\ fa^3\ c2 - 4\ fa^4\ c2^2 - 2\ fa^4\ c3 - 14\ \alpha\ fa^4\ c2\ c3 - 5\ \alpha\ fa^4\ c2^3 - 3\ \alpha\ fa^4\ c4 - 14\ fa^4\ c2\ c3 - 5\ fa^4\ c2^3 - 3\ fa^4\ c4)\ en^4 + (-24\ \alpha\ fa^4\ c2^2\ c3 - 20\ \alpha\ fa^4\ c2\ c4 - 14\ fa^4\ c2\ c3 - 20\ fa^4\ c2\ c4 - 24\ fa^4\ c2^2\ c3 - 2\ \alpha\ fa^4\ c2^4 - 4\ \alpha\ fa^4\ c5 - 12\ \alpha\ fa^4\ c3^2 + 3\ \theta\ fa^3\ c2^2 + 3\ \theta\ fa^3\ c3 + 3\ \theta\ fa^4\ c2^3 + 3\ \theta\ fa^4\ c4 - 5\ fa^4\ c2^3 - 3\ fa^4\ c4 - 4\ fa^4\ c5 - 12\ fa^4\ c3^2 + 10\ \theta\ fa^4\ c2\ c3 - 2\ fa^4\ c2^4)\ en^5 + (6\ \theta\ fa^3\ c3\ c2 + 13\ \theta\ fa^4\ c2^2\ c3 + 14\ \theta\ fa^4\ c2\ c4 - 26\ \alpha\ fa^4\ c2\ c5 - 34\ \alpha\ fa^4\ c2^2\ c4 - 37\ \alpha\ fa^4\ c2\ c3^2 - 12\ \alpha\ fa^4\ c2^3\ c3 - 34\ \alpha\ fa^4\ c4\ c3 - 20\ fa^4\ c2\ c4 - 26\ fa^4\ c2\ c5 - 24\ fa^4\ c2^2\ c3 + \theta\ fa^3\ c2^3 + 3\ \theta\ fa^3\ c4 + 8\ \theta\ fa^4\ c3^2 + \theta\ fa^4\ c2^4 + 4\ \theta\ fa^4\ c5 - 34\ fa^4\ c2^2\ c4 - 37\ fa^4\ c2\ c3^2 - 12\ fa^4\ c2^3\ c3 - 34\ fa^4\ c4\ c3 - 4\ fa^4\ c5 - 12\ fa^4\ c3^2 - 5\ fa^4\ c6 - 2\ fa^4\ c2^4 - 5\ \alpha\ fa^4\ c6)\ en^6 + O(en^7)$$

> $N := simplify(collect(expand(series((dfxn^2 \cdot fxn^2 \cdot (1 + xn)), en)), [en]));$

$$
\begin{aligned}
N := {} & (fa^4 + fa^4\,\alpha)\,en^2 + (fa^4 + 6\,fa^4\,c2 + 6\,fa^4\,c2\,\alpha)\,en^3 \\
& + (6\,fa^4\,c2 + 8\,fa^4\,c3 + 8\,\alpha\,fa^4\,c3 + 13\,fa^4\,c2^2 \\
& + 13\,\alpha\,fa^4\,c2^2)\,en^4 + (8\,fa^4\,c3 + 13\,fa^4\,c2^2 + 34\,fa^4\,c2\,c3 \\
& + 34\,\alpha\,fa^4\,c2\,c3 + 12\,fa^4\,c2^3 + 12\,\alpha\,fa^4\,c2^3 + 10\,fa^4\,c4 \\
& + 10\,\alpha\,fa^4\,c4)\,en^5 + (34\,fa^4\,c2\,c3 + 12\,fa^4\,c2^3 + 10\,fa^4\,c4 \\
& + 12\,fa^4\,c5 + 12\,\alpha\,fa^4\,c5 + 42\,fa^4\,c2\,c4 + 42\,\alpha\,fa^4\,c2\,c4 \\
& + 22\,fa^4\,c3^2 + 22\,\alpha\,fa^4\,c3^2 + 46\,fa^4\,c2^2\,c3 + 46\,\alpha\,fa^4\,c2^2\,c3 \\
& + 4\,fa^4\,c2^4 + 4\,\alpha\,fa^4\,c2^4)\,en^6 + (50\,\alpha\,fa^4\,c2\,c5 \\
& + 56\,\alpha\,fa^4\,c2^2\,c4 + 58\,\alpha\,fa^4\,c2\,c3^2 + 20\,\alpha\,fa^4\,c2^3\,c3 \\
& + 54\,\alpha\,fa^4\,c4\,c3 + 42\,fa^4\,c2\,c4 + 50\,fa^4\,c2\,c5 + 46\,fa^4\,c2^2\,c3 \\
& + 56\,fa^4\,c2^2\,c4 + 58\,fa^4\,c2\,c3^2 + 20\,fa^4\,c2^3\,c3 + 54\,fa^4\,c4\,c3 \\
& + 12\,fa^4\,c5 + 22\,fa^4\,c3^2 + 14\,fa^4\,c6 + 4\,fa^4\,c2^4 \\
& + 14\,\alpha\,fa^4\,c6)\,en^7 + O(en^8)
\end{aligned}
$$

> $K := simplify(collect(expand(series((fxn^2 \cdot (1 + xn)), en)), [en]));$

$$
\begin{aligned}
K := {} & (fa^2 + fa^2\,\alpha)\,en^2 + (fa^2 + 2\,fa^2\,c2 + 2\,fa^2\,c2\,\alpha)\,en^3 \\
& + (2\,fa^2\,c2 + 2\,fa^2\,c3 + 2\,fa^2\,c3\,\alpha + fa^2\,c2^2 \\
& + fa^2\,c2^2\,\alpha)\,en^4 + (2\,fa^2\,c3 + fa^2\,c2^2 + 2\,fa^2\,c2\,c3 \\
& + 2\,fa^2\,c2\,c3\,\alpha + 2\,fa^2\,c4 + 2\,fa^2\,c4\,\alpha)\,en^5 + (2\,fa^2\,c2\,c3 \\
& + 2\,fa^2\,c4 + 2\,fa^2\,c5 + 2\,fa^2\,c5\,\alpha + 2\,fa^2\,c2\,c4 \\
& + 2\,fa^2\,c2\,c4\,\alpha + fa^2\,c3^2 + fa^2\,c3^2\,\alpha)\,en^6 + (2\,fa^2\,c5 \\
& + 2\,fa^2\,c2\,c4 + fa^2\,c3^2 + 2\,fa^2\,c6 + 2\,fa^2\,c6\,\alpha + 2\,fa^2\,c5\,c2 \\
& + 2\,fa^2\,c5\,c2\,\alpha + 2\,fa^2\,c3\,c4 + 2\,fa^2\,c3\,c4\,\alpha)\,en^7 + O(en^8)
\end{aligned}
$$

$$> A := simplify\left(collect\left(expand\left(series\left(-\frac{fxn}{dfxn + fxn} \cdot \left(\left(\frac{fxn^2 \cdot M \cdot (-N + 2 \cdot M)}{N^2 \cdot dfxn^2}\right) + \left(\frac{fxn \cdot (-2 \cdot M + 2 \cdot dfxn^2 \cdot K)}{2 \cdot dfxn^3 \cdot K}\right) + 1\right), en\right)\right), [en]\right)\right);$$

$$A := -en + \frac{(fa\ c2 + 1)\,\theta}{fa\,(1+\alpha)}\,en^3 + \frac{1}{fa\,(1+\alpha)^2}\big(-c2\ fa\ c3 + 2\,c2^2\,fa + 5\,fa\ c2^3 - \theta - 2\,\alpha\,fa\ c2\ c3 - fa\ c2\ \alpha^2\,c3 - \theta\,fa\ c2^2\,\alpha + 2\,\theta\,fa\ c3\ \alpha + 4\,\alpha\,fa\ c2^2 - \theta\,fa\ c2 - \theta\,c2 + 10\,\alpha\,fa\ c2^3 - \theta\,fa\ c2^2 + 2\,\theta\,fa\ c3 + 5\,fa\ c2^3\,\alpha^2 + 2\,fa\ \alpha^2\,c2^2 - c2\,\theta\,\alpha\big)\,en^4 + O(en^5)$$

$$> hasil2 := simplify(collect(expand(series(xn + A, en)), [en]));$$

$$hasil2 := \alpha + \frac{(fa\ c2 + 1)\,\theta}{fa\,(1+\alpha)}\,en^3 + \frac{1}{fa\,(1+\alpha)^2}\big(-c2\ fa\ c3 + 2\,c2^2\,fa + 5\,fa\ c2^3 - \theta - 2\,\alpha\,fa\ c2\ c3 - fa\ c2\ \alpha^2\,c3 - \theta\,fa\ c2^2\,\alpha + 2\,\theta\,fa\ c3\ \alpha + 4\,\alpha\,fa\ c2^2 - \theta\,fa\ c2 - \theta\,c2 + 10\,\alpha\,fa\ c2^3 - \theta\,fa\ c2^2 + 2\,\theta\,fa\ c3 + 5\,fa\ c2^3\,\alpha^2 + 2\,fa\ \alpha^2\,c2^2 - c2\,\theta\,\alpha\big)\,en^4 + O(en^5)$$

$$> hasil3 := eval(hasil2, [\mathrm{theta} = 0]);\ hasil3 := simplify(collect(expand(series(hasil3 - \mathrm{alpha}, en)), en))$$

$$hasil3 := \alpha + \frac{1}{fa\,(1+\alpha)^2}\big(-c2\ fa\ c3 + 2\,c2^2\,fa + 5\,fa\ c2^3 - 2\,\alpha\,fa\ c2\ c3 - fa\ c2\ \alpha^2\,c3 + 4\,\alpha\,fa\ c2^2 + 10\,\alpha\,fa\ c2^3 + 5\,fa\ c2^3\,\alpha^2 + 2\,fa\ \alpha^2\,c2^2\big)\,en^4 + O(en^5)$$

$$hasil3 := c2\,(-c3 + 2\,c2 + 5\,c2^2)\,en^4 + O(en^5)$$

LAMPIRAN B

Orde Konvergensi Metode Iterasi Tipe B

> $restart;$

> $Order := 8:$

> $xn := en + \text{alpha};$

$$xn := en + \alpha$$

> $fxn := collect\left(expand\left(series\left(fa \cdot \left(en + c2 \cdot en^2 + c3 \cdot en^3 + c4 \cdot en^4 + c5 \cdot en^5 + c6 \cdot en^6 + \mathrm{O}\left(en^7\right)\right), en\right)\right), [en]\right);$

$$fxn := fa\ en + fa\ c2\ en^2 + fa\ c3\ en^3 + fa\ c4\ en^4 + fa\ c5\ en^5 + fa\ c6\ en^6 + \mathrm{O}\left(en^7\right)$$

> $dfxn := diff\,(fxn, en);$

$$dfxn := fa + 2\,fa\ c2\ en + 3\,fa\ c3\ en^2 + 4\,fa\ c4\ en^3 + 5\,fa\ c5\ en^4 + 6\,fa\ c6\ en^5 + \mathrm{O}\left(en^6\right)$$

> $hasil1 := collect\left(expand\left(series\left(\frac{fxn}{dfxn}, en\right)\right), [en]\right);$

$$hasil1 := en - c2\ en^2 + \left(-2\,c3 + 2\,c2^2\right) en^3 + \left(7\,c2\ c3 - 3\,c4 - 4\,c2^3\right) en^4 + \left(10\,c2\ c4 - 4\,c5 + 6\,c3^2 - 20\,c3\ c2^2 + 8\,c2^4\right) en^5 + \left(13\,c2\ c5 - 5\,c6 + 17\,c4\ c3 - 28\,c4\ c2^2 - 33\,c2\ c3^2 + 52\,c3\ c2^3 - 16\,c2^5\right) en^6 + \mathrm{O}\left(en^7\right)$$

> $wn := collect\,(expand\,(series\,(xn - hasil1, en)), [en]);$

$$wn := \alpha + c2\ en^2 + \left(2\,c3 - 2\,c2^2\right) en^3 + \left(-7\,c2\ c3 + 3\,c4 + 4\,c2^3\right) en^4 + \left(-10\,c2\ c4 + 4\,c5 - 6\,c3^2 + 20\,c3\ c2^2 - 8\,c2^4\right) en^5 + \left(-13\,c2\ c5 + 5\,c6 - 17\,c4\ c3 + 28\,c4\ c2^2 + 33\,c2\ c3^2 - 52\,c3\ c2^3 + 16\,c2^5\right) en^6 + \mathrm{O}\left(en^7\right)$$

> $sn := collect\,(expand\,(series\,(wn - \text{alpha}, en)), [en]);$

$$sn := c2\ en^2 + \left(2\,c3 - 2\,c2^2\right) en^3 + \left(-7\,c2\ c3 + 3\,c4 + 4\,c2^3\right) en^4 + \left(-10\,c2\ c4 + 4\,c5 - 6\,c3^2 + 20\,c3\ c2^2 - 8\,c2^4\right) en^5 + \left(-13\,c2\ c5 + 5\,c6 - 17\,c4\ c3 + 28\,c4\ c2^2 + 33\,c2\ c3^2 - 52\,c3\ c2^3 + 16\,c2^5\right) en^6 + \mathrm{O}\left(en^7\right)$$

> $fwn := collect\left(expand\left(series\left(fa\cdot\left(sn + c2\cdot sn^2 + c3\cdot sn^3 + c4\cdot sn^4 + c5\cdot sn^5 + c6\cdot sn^6\right), en\right)\right), [en]\right);$

$$fwn := fa\ c2\ en^2 + \left(2\,fa\ c3 - 2\,fa\ c2^2\right) en^3 + \left(-7\,fa\ c2\ c3 + 3\,fa\ c4 + 5\,fa\ c2^3\right) en^4 + \left(-10\,fa\ c2\ c4 + 4\,fa\ c5 - 6\,fa\ c3^2 + 24\,fa\ c3\ c2^2 - 12\,fa\ c2^4\right) en^5 + \left(-13\,fa\ c2\ c5 + 5\,fa\ c6 - 17\,fa\ c4\ c3 + 34\,fa\ c4\ c2^2 + 37\,fa\ c2\ c3^2 - 73\,fa\ c3\ c2^3 + 28\,fa\ c2^5\right) en^6 + \mathrm{O}\left(en^7\right)$$

> $M := simplify\left(collect\left(expand\left(series\left(\left(-fwn\cdot dfxn^3\cdot xn + \theta\cdot\left(fwn\cdot dfxn^2\cdot fxn + fxn^3\right) - fwn\cdot dfxn^3\right), en\right)\right), [en]\right)\right);$

$$M := \left(-fa^4\,c2\,\alpha - fa^4\,c2\right) en^2 + \left(-fa^4\,c2 - 4\,\alpha\,fa^4\,c2^2 - 2\,\alpha\,fa^4\,c3 + \theta\,fa^4\,c2 + \theta\,fa^3 - 4\,fa^4\,c2^2 - 2\,fa^4\,c3\right) en^3 + \left(3\,\theta\,fa^4\,c2^2 + 2\,\theta\,fa^4\,c3 + 3\,\theta\,fa^3\,c2 - 4\,fa^4\,c2^2 - 2\,fa^4\,c3 - 14\,\alpha\,fa^4\,c2\,c3 - 5\,\alpha\,fa^4\,c2^3 - 3\,\alpha\,fa^4\,c4 - 14\,fa^4\,c2\,c3 - 5\,fa^4\,c2^3 - 3\,fa^4\,c4\right) en^4 + \left(-5\,fa^4\,c2^3 - 3\,fa^4\,c4 - 2\,fa^4\,c2^4 - 4\,fa^4\,c5 - 12\,fa^4\,c3^2 - 24\,fa^4\,c2^2\,c3 - 2\,\alpha\,fa^4\,c2^4 - 4\,\alpha\,fa^4\,c5 - 12\,\alpha\,fa^4\,c3^2 + 3\,\theta\,fa^3\,c2^2 + 3\,\theta\,fa^3\,c3 + 3\,\theta\,fa^4\,c2^3 + 3\,\theta\,fa^4\,c4 + 10\,\theta\,fa^4\,c2\,c3 - 14\,fa^4\,c2\,c3 - 20\,fa^4\,c2\,c4 - 24\,\alpha\,fa^4\,c2^2\,c3 - 20\,\alpha\,fa^4\,c2\,c4\right) en^5 + \left(-2\,fa^4\,c2^4 - 4\,fa^4\,c5 - 12\,fa^4\,c3^2 - 5\,fa^4\,c6 - 24\,fa^4\,c2^2\,c3 + \theta\,fa^3\,c2^3 + 3\,\theta\,fa^3\,c4 + 8\,\theta\,fa^4\,c3^2 + \theta\,fa^4\,c2^4 + 4\,\theta\,fa^4\,c5 - 34\,fa^4\,c2^2\,c4 - 37\,fa^4\,c2\,c3^2 - 12\,fa^4\,c2^3\,c3 - 34\,fa^4\,c4\,c3 - 5\,\alpha\,fa^4\,c6 - 20\,fa^4\,c2\,c4 - 26\,fa^4\,c2\,c5 + 6\,\theta\,fa^3\,c3\,c2 + 13\,\theta\,fa^4\,c2^2\,c3 + 14\,\theta\,fa^4\,c2\,c4 - 34\,\alpha\,fa^4\,c2^2\,c4 - 37\,\alpha\,fa^4\,c2\,c3^2 - 12\,\alpha\,fa^4\,c2^3\,c3 - 34\,\alpha\,fa^4\,c4\,c3 - 26\,\alpha\,fa^4\,c2\,c5\right) en^6 + \mathrm{O}\left(en^7\right)$$

> $N := simplify\left(collect\left(expand\left(series\left(\left(fxn\cdot(1 + xn)\right), en\right)\right), [en]\right)\right);$

$$N := \left(fa + fa\,\alpha\right) en + \left(fa + fa\ c2 + fa\ c2\,\alpha\right) en^2 + \left(fa\ c2 + fa\ c3 + fa\ c3\,\alpha\right) en^3 + \left(fa\ c3 + fa\ c4 + fa\ c4\,\alpha\right) en^4 + \left(fa\ c4 + fa\ c5 + fa\ c5\,\alpha\right) en^5 + \left(fa\ c5 + fa\ c6 + fa\ c6\,\alpha\right) en^6 + \mathrm{O}\left(en^7\right)$$

$$> A := simplify\Big(collect\Big(expand\Big(series\Big(\big(\big(2\cdot fxn^3\cdot dfxn^5\cdot(1+xn)^2\big)\big/\big(2\cdot\big(M^2 - N\cdot dfxn^3\cdot(N\cdot dfxn^3 + M)\big)\big)\big), en\Big)\Big), [en]\Big)\Big);$$

$$\begin{aligned}
A := {} & -en + \frac{(1+fa\,c2)\,\theta}{fa\,(1+\alpha)}\,en^3 + \frac{1}{fa\,(1+\alpha)^2}\big(2\,\theta\,fa\,c3 - \theta\,c2 \\
& + 4\,\alpha\,fa\,c2^3 - \theta\,fa\,c2 + 2\,fa\,\alpha^2\,c2^3 - \alpha\,\theta\,c2 - 2\,\alpha\,fa\,c2\,c3 \\
& - fa\,\alpha^2\,c3\,c2 - \alpha\,\theta\,fa\,c2^2 + 2\,\alpha\,\theta\,fa\,c3 - \theta - \theta\,fa\,c2^2 \\
& - fa\,c2\,c3 + 2\,fa\,c2^3\big)\,en^4 \\
& - \frac{1}{fa^2\,(1+\alpha)^3}\big(2\,fa^2\,c2\,\alpha^2\,\theta\,c3 + \theta\,fa\,c3 - \theta\,fa\,c2 \\
& - 6\,\alpha\,\theta\,fa^2\,c4 - 3\,\alpha^2\,\theta\,fa^2\,c4 + 2\,\alpha\,\theta\,fa^2\,c3 + 8\,\alpha\,\theta\,fa\,c2^2 \\
& + 2\,\alpha\,\theta\,fa\,c3 - \alpha\,\theta\,fa\,c2 + 4\,\alpha^2\,\theta\,fa\,c2^2 + \alpha^2\,\theta\,fa\,c3 \\
& + 2\,fa^2\,c2\,\theta\,c3 + 6\,fa^2\,c2\,c4\,\alpha^2 - 42\,fa^2\,c2^2\,\alpha\,c3 \\
& - 42\,fa^2\,c2^2\,\alpha^2\,c3 + 8\,fa^2\,c2^3\,\alpha\,\theta + 4\,fa^2\,c2^3\,\alpha^2\,\theta \\
& - 14\,fa^2\,c2^2\,\alpha^3\,c3 + 2\,fa^2\,c2\,\alpha^3\,c4 + 6\,fa^2\,c2\,c4\,\alpha \\
& - fa^2\,c2^2\,\theta\,\alpha + 2\,\theta^2\,fa^2\,c2^2\,\alpha + 4\,\theta^2\,fa\,c2\,\alpha + 11\,fa^2\,c2^4 \\
& + 2\,\theta^2 + 2\,\theta^2\,\alpha - \theta\,fa^2\,c2 + 33\,fa^2\,c2^4\,\alpha + 33\,fa^2\,c2^4\,\alpha^2 \\
& + 11\,fa^2\,c2^4\,\alpha^3 + 4\,fa^2\,c2^3\,\theta - 14\,fa^2\,c2^2\,c3 - fa^2\,c2^2\,\theta \\
& + 6\,fa^2\,c3^2\,\alpha^2 + 6\,fa^2\,c3^2\,\alpha + 2\,\theta^2\,fa^2\,c2^2 + 4\,\theta^2\,fa\,c2 \\
& + 2\,fa^2\,c3^2\,\alpha^3 - 3\,\theta\,fa^2\,c4 + 2\,\theta\,fa^2\,c3 - \theta\,fa \\
& + 4\,fa^2\,c2\,\alpha\,\theta\,c3 + 2\,fa^2\,c3^2 + 4\,\theta\,fa\,c2^2 + 2\,fa^2\,c2\,c4\big)\,en^5 \\
& + \mathrm{O}\big(en^6\big)
\end{aligned}$$

$$> hasil2 := simplify(collect(expand(series(xn + A, en)), [en]));$$

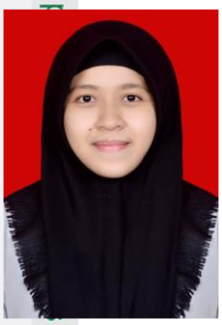
$$
\begin{aligned}
hasil2 :=\ & \alpha + \frac{(1 + fa\ c2)\ \theta}{fa\ (1 + \alpha)}\ en^3 + \frac{1}{fa\ (1 + \alpha)^2}\big(2\ \theta\ fa\ c3 - \theta\ c2 \\
& + 4\ \alpha\ fa\ c2^3 - \theta\ fa\ c2 + 2\ fa\ \alpha^2\ c2^3 - \alpha\ \theta\ c2 - 2\ \alpha\ fa\ c2\ c3 \\
& - fa\ \alpha^2\ c3\ c2 - \alpha\ \theta\ fa\ c2^2 + 2\ \alpha\ \theta\ fa\ c3 - \theta - \theta\ fa\ c2^2 \\
& - fa\ c2\ c3 + 2\ fa\ c2^3\big)\ en^4 \\
& - \frac{1}{fa^2\ (1 + \alpha)^3}\big(2\ fa^2\ c2\ \alpha^2\ \theta\ c3 + \theta\ fa\ c3 - \theta\ fa\ c2 \\
& - 6\ \alpha\ \theta\ fa^2\ c4 - 3\ \alpha^2\ \theta\ fa^2\ c4 + 2\ \alpha\ \theta\ fa^2\ c3 + 8\ \alpha\ \theta\ fa\ c2^2 \\
& + 2\ \alpha\ \theta\ fa\ c3 - \alpha\ \theta\ fa\ c2 + 4\ \alpha^2\ \theta\ fa\ c2^2 + \alpha^2\ \theta\ fa\ c3 \\
& + 2\ fa^2\ c2\ \theta\ c3 + 6\ fa^2\ c2\ c4\ \alpha^2 - 42\ fa^2\ c2^2\ \alpha\ c3 \\
& - 42\ fa^2\ c2^2\ \alpha^2\ c3 + 8\ fa^2\ c2^3\ \alpha\ \theta + 4\ fa^2\ c2^3\ \alpha^2\ \theta \\
& - 14\ fa^2\ c2^2\ \alpha^3\ c3 + 2\ fa^2\ c2\ \alpha^3\ c4 + 6\ fa^2\ c2\ c4\ \alpha \\
& - fa^2\ c2^2\ \theta\ \alpha + 2\ \theta^2\ fa^2\ c2^2\ \alpha + 4\ \theta^2\ fa\ c2\ \alpha + 11\ fa^2\ c2^4 \\
& + 2\ \theta^2 + 2\ \theta^2\ \alpha - \theta\ fa^2\ c2 + 33\ fa^2\ c2^4\ \alpha + 33\ fa^2\ c2^4\ \alpha^2 \\
& + 11\ fa^2\ c2^4\ \alpha^3 + 4\ fa^2\ c2^3\ \theta - 14\ fa^2\ c2^2\ c3 - fa^2\ c2^2\ \theta \\
& + 6\ fa^2\ c3^2\ \alpha^2 + 6\ fa^2\ c3^2\ \alpha + 2\ \theta^2\ fa^2\ c2^2 + 4\ \theta^2\ fa\ c2 \\
& + 2\ fa^2\ c3^2\ \alpha^3 - 3\ \theta\ fa^2\ c4 + 2\ \theta\ fa^2\ c3 - \theta\ fa \\
& + 4\ fa^2\ c2\ \alpha\ \theta\ c3 + 2\ fa^2\ c3^2 + 4\ \theta\ fa\ c2^2 + 2\ fa^2\ c2\ c4\big)\ en^5 \\
& + \mathrm{O}(en^6)
\end{aligned}
$$

\> $hasil3 := eval(hasil2, [\mathrm{theta} = 0]);\ hasil3 := simplify(collect(expand(series(hasil3 - \mathrm{alpha}, en)), en))$

$$
\begin{aligned}
hasil3 :=\ & \alpha + \frac{1}{fa\ (1 + \alpha)^2}\big(4\ \alpha\ fa\ c2^3 + 2\ fa\ \alpha^2\ c2^3 - 2\ \alpha\ fa\ c2\ c3 \\
& - fa\ \alpha^2\ c3\ c2 - fa\ c2\ c3 + 2\ fa\ c2^3\big)\ en^4 \\
& - \frac{1}{fa^2\ (1 + \alpha)^3}\big(6\ fa^2\ c2\ c4\ \alpha^2 - 42\ fa^2\ c2^2\ \alpha\ c3 \\
& - 42\ fa^2\ c2^2\ \alpha^2\ c3 - 14\ fa^2\ c2^2\ \alpha^3\ c3 + 2\ fa^2\ c2\ \alpha^3\ c4 \\
& + 6\ fa^2\ c2\ c4\ \alpha + 11\ fa^2\ c2^4 + 33\ fa^2\ c2^4\ \alpha + 33\ fa^2\ c2^4\ \alpha^2 \\
& + 11\ fa^2\ c2^4\ \alpha^3 - 14\ fa^2\ c2^2\ c3 + 6\ fa^2\ c3^2\ \alpha^2 + 6\ fa^2\ c3^2\ \alpha \\
& + 2\ fa^2\ c3^2\ \alpha^3 + 2\ fa^2\ c3^2 + 2\ fa^2\ c2\ c4\big)\ en^5 + \mathrm{O}(en^6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
hasil3 :=\ & c2\ (-c3 + 2\ c2^2)\ en^4 + (-2\ c3^2 - 2\ c2\ c4 - 11\ c2^4 \\
& + 14\ c3\ c2^2)\ en^5 + \mathrm{O}(en^6)
\end{aligned}
$$

DAFTAR RIWAYAT HIDUP



Penulis dilahirkan pada tanggal 26 Mei 1998 di Bangkinang, sebagai anak pertama dari tiga bersaudara dari pasangan Bapak Wahyudi dan Ibu Eti Endang Puspito Rini. Penulis menyelesaikan pendidikan formal di Sekolah Dasar Negeri 034 Sukamulya, Bangkinang Seberang, Kampar pada tahun 2010. Penulis melanjutkan sekolah tingat pertama di MTs Darul Hikmah Pekanbaru pada tahun 2013. Penulis menyelesaikan Pendidikan Menengah Atas di SMAS Babussalam Pekanbaru tahun 2016 dengan jurusan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (MIPA). Pada tahun 2016 Penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Jurusan Matematika.

Pada tahun 2019, tepatnya pada semester VI Penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Dinas Kependudukan dan Pencatatan Sipil dengan judul **"Pengaruh Jumlah Penduduk dan Jumlah Tenaga Kerja Terhadap Kemiskinan di Kota Pekanbaru"** yang dibimbing oleh Ibu Rahmadeni, M.Si. dari tanggal 21 Januari sampai 21 Februari 2019 dan diseminarkan pada tanggal 29 Mei 2019. Selanjutnya pada tahun yang sama Penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Gunung Sari, Kecamatan Gunung Sahilan Kabupaten Kampar.