FUNGSI KENDALI MODEL PERSEDIAAN BARANG DENGAN BIAYA PENYIMPANAN MERUPAKAN FUNGSI LINIER

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Program Studi Matematika

Oleh:

EMELIA
11554202866

UIN SUSKA RIAU

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU
2019

LEMBAR PERSETUJUAN

FUNGSI KENDALI MODEL PERSEDIAAN BARANG DENGAN BIAYA PENYIMPANAN MERUPAKAN FUNGSI LINIER

TUGAS AKHIR

Oleh:

EMELIA
11554202866

Telah diperiksa dan disetujui sebagai Laporan Tugas Akhir
di Pekanbaru, 16 Desember 2019

Ketua Program Studi	Pembimbing
Ari Pani Desvina, M.Sc.	**Nilwan Andiraja, S.Pd, M.Sc.**
NIP. 19811225 200604 2 003	**NIP.19840803 201101 1 005**

LEMBAR PENGESAHAN

FUNGSI KENDALI MODEL PERSEDIAAN BARANG DENGAN BIAYA PENYIMPANAN MERUPAKAN FUNGSI LINIER

TUGAS AKHIR

Oleh:

EMELIA
11554202866

Telah dipertahankan di depan sidang dewan penguji
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains
Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
di Pekanbaru, pada tanggal 16 Desember 2019

Pekanbaru, 16 Desember 2019
Mengesahkan,

Dekan	Ketua Program Studi
Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag.	**Ari Pani Desvina, M.Sc.**
NIP. 19660604 199203 1 004	**NIP. 19811225 200604 2 003**

DEWAN PENGUJI

Ketua	**: Sri Basriati, M.Sc.**
Sekretaris	**: Nilwan Andiraja, S.Pd, M.Sc.**
Anggota I	**: Mohammad Soleh, M.Sc.**
Anggota II	**: Irma Suryani, M.Sc.**

LEMBAR HAK ATAS KEKAYAAN INTELEKTUAL

Tugas Akhir yang tidak diterbitkan ini terdaftar dan tersedia di Perpustakaan Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau adalah terbuka untuk umum dengan ketentuan bahwa hak cipta pada penulis. Referensi kepustakaan diperkenankan dicatat, tetapi pengutipan atau ringkasan hanya dapat dilakukan seizin penulis dan harus disertai dengan kebiasaan ilmiah untuk menyebutkan sumbernya.

Penggandaan atau penerbitan sebagian atau seluruh Tugas Akhir ini harus memperoleh izin dari Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau. Perpustakaan yang meminjamkan Tugas Akhir ini untuk anggotanya diharapkan untuk mengisi nama, tanda peminjaman dan tanggal pinjam.

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa dalam Tugas Akhir ini tidak terdapat karya yang pernah diajukan untuk memperoleh gelar kesarjanaan di suatu Perguruan Tinggi dan sepanjang pengetahuan saya juga tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali yang tertulis diacu dalam naskah ini dan disebutkan di dalam daftar pustaka.

Pekanbaru, 16 Desember 2019
Yang membuat pernyataan,

Emelia
11554202866

LEMBAR PERSEMBAHAN

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Laa hawla wa laa quwwata illa billah

"Tiada daya dan upaya selain dengan kehendak Allah"

Maka nikmat Tuhan mu yang manakah yang kamu dustakan?

(QS. Ar-Rahman:13)

Alhamdulillahirabbilalamiin, terima kasih ya Allah telah mengabulkan doa-doa ku, yang telah membuang rasa malas dan takutku, yang telah memberi ku nikmat berupa semangat dan kemudahan dalam pengerjaan skripsi ini.

Di atas karya kecilku ini izinkan aku memberikan ucapan terima kasihku kepada orang tua ku, **Abah (Sahar), Amak (Siti Nur)**. Orang tua ku tercinta yang telah memberikan dukungan, perhatian, kasih sayang, dan materi yang tak terhingga, yang tak pernah bosan mendengar keluh kesahku, yang selalu menengadahkan tangan kepada-Nya untuk mendoa'akan ku. Semoga ini menjadi langkah awal untuk membuat amak dan abah bahagia. karna aku sadar, selama ini belum bisa berbuat yang lebih.

Kepada Abang dan Adik-adikku tersayang tiada yang paling mengharukan saat kumpul bersama kalian, walaupun sering bertengkar tapi hal itu yang selalu menjadi hal yang paling aku rindukan saat berada di kejauhan, terimakasih atas doa dan bantuan kalian selama ini, semangatlah untuk mencapai cita-cita kalian, hanya karya kecil ini yang dapat aku persembahkan. Maaf belum bisa menjadi adik dan kakak yang seperti kalian inginkan, tapi aku akan selalu menjadi yang terbaik untuk kalian semua.

Kepada **Bapak Nilwan Andiraja, S.Pd, M.Sc** selaku dosen pembimbing terimakasih karena telah mengorbankan waktunya demi memberi ilmu dan membimbing saya dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Terima Kasih untuk Sahabat-sahabat terbaikku, Eka Novia R, S.Si, Hasyra, Nourfitri, S.Si, Novia Arda Putri, S.Si, Saniyah, S.Si, Sundari Wibowo, S.Si, Wiwik Septia S.Si, Weni Gustiana, S.Si , Lilies Suryani S.Sos, Sri Mersing SP, Putri Patmawati SE, kak Ervina Siska SE, kak Siska Martadela SE dan Sohibul hijrahku tersayang yang tidak bisa disebut satu persatu serta kakak-kakak, teman-teman dan adik-adik keluarga besar FU Assalam, serta teman-teman kelas C dan teman-teman seperjuangan Jurusan Matematika angkatan 2015 yang telah banyak memberikan motivasi, dorongan, do'a serta pengalaman dalam penyelesaian tugas akhir ini.

.

Terimakasih untuk semua Dosen Program Studi Matematika FST semoga ilmu yang Bapak Ibu berikan dapat saya amalkan dengan baik.

FUNGSI KENDALI MODEL PERSEDIAAN BARANG DENGAN BIAYA PENYIMPANAN MERUPAKAN FUNGSI LINIER

EMELIA
11554202866

Tanggal Sidang : Desember 2019
Periode Wisuda : September 2020

Program Studi Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas masalah persoalan fungsi kendali dari sistem persediaan kasus peningkatan barang waktu berhingga dengan fungsi tujuan berbentuk linier. Untuk menyelesaikan persamaan yang mengalami peningkatan barang maka digunakan teori kendali optimal. Berdasarkan persamaan differensial dinamik dan fungsi tujuan yang diberikan dapat dibentuk Persamaan Hamilton dan Lagrange dan akan dibentuk fungsi kendali, dengan dua cara. Cara yang pertama diperoleh fungsi kendali dengan v dalam bentuk konstanta. Selanjutnya fungsi kendali yang diperoleh di analisa kestabilan persamaan diferensial dinamik nya. Diperoleh persamaan tingkat persediaan, persamaan rata-rata produksi. Berdasarkan contoh yang diberikan diperoleh bahwa kurva tingkat persediaan meningkat pada waktu akhir yang telah ditentukan.

Kata kunci: *Kendali, Linier, Model persediaan, Peningkatan, Persamaan differensial.*

FUNCTION CONTROL OF INVENTORY MODEL WITH HOLDING COST OF LINEAR FUNCTION

EMELIA
11554202866

Date of Final Exam : December 2019
Date of Graduation : September 2020

Mathematics Department
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No. 155 Pekanbaru

ABSTRACT

This final project discusses the problem of the control function of the inventory system in case of an increase in finite time goods with a linear objective function. To solve the equation that has increased goods, the optimal control theory is used. Based on dynamic differential equations and given objective functions, Hamilton and Lagrange equations can be formed and control functions will be formed, in two ways. The first method is obtained by using the control function v in the form of constants. Furthermore, the control function obtained in the analysis of the stability of the dynamic differential equation Obtained equation of inventory levels, the equation of average production. Based on the example given it is found that the inventory level curve increases at the specified end time.

Keywords: *Control, Differential equation, Improvement, Inventor model, Linear.*

KATA PENGANTAR

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Alhamdulillah dengan rasa syukur atas kehadirat Allah subhanahu wata'ala yang telah memberikan rahmat kesehatan sehingga penulis bisa menyelesaikan tugas akhir dengan judul **"Fungsi Kendali Model Persediaan Barang dengan Biaya Penyimpanan Merupakan Fungsi Linier"**. Shalawat beserta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad shallallahu'alaihi wasallam, mudah-mudahan kita semua selalu mendapat syafa'at-Nya dan selalu dalam lindungan Allah subhanahu wata'ala, Aamiin. Penulisan tugas akhir ini bertujuan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.

Dalam penulisan tugas akhir ini, penulis berterima kasih kepada kedua orang tua yang selalu memberikan motivasi dan do'a dalam penyelesaian tugas akhir ini, dan penulis banyak mendapat bimbingan, motivasi, arahan, nasehat dan masukan yang membangun dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. KH. Ahmad Mujahidin, S.Ag, M.ag selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Bapak Dr. Drs. Ahmad Darmawi, M.Ag selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi.
3. Ibu Ari Pani Desvina, M.Sc, selaku Ketua Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
4. Bapak Nilwan Andiraja, M.Sc, selaku Pembimbing yang telah banyak membantu, memberikan arahan dan bimbingan dengan sabar serta ikhlas selama penulis menyelesaikan tugas akhir ini.
5. Bapak Mohammad Soleh, M.Sc, selaku Penguji I yang telah banyak memberikan kritik serta saran kepada penulis.
6. Ibu Irma Suryani, M.Sc, selaku Penguji II yang telah banyak memberikan kritik serta saran kepada penulis.

7. Bapak Wartono, M.Sc, selaku Pembimbing Akademik saya ketika di semester I sampai semester akhir yang telah memberikan dukungan serta arahan pada proses perkuliahan.
8. Semua Bapak dan Ibu Dosen Program Studi Matematika yang banyak memberi ilmu, masukan dan motivasi.
9. Semua pihak yang telah memberi bantuan dari awal hingga akhir penyelesaian tugas akhir ini yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Semoga kebaikan yang telah mereka berikan kepada penulis menjadi amal kebaikan dan mendapat balasan yang setimpal dari Allah subhanahu wata'ala. Selanjutnya, dalam penyusunan tugas akhir ini penulis menyadari bahwa masih adanya kekurangan oleh karena itu penulis berharap agar pembaca dapat memberikan kritik dan saran yang membangun. Semoga tugas akhir ini dapat memberikan manfaat kepada pihak-pihak yang memerlukannya.

Wassalamu'alaikum warohmatullahi wabarakaatuh.

Pekanbaru, 16 Desember 2019

Emelia

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR SIMBOL

$I(t)$	: Fungsi tingkat persediaan
$P(t)$	: Nilai tingkat rata-rata produksi
I_0	: Nilai tingkat persediaan awal
$m(t)$	: Fungsi rata-rata peningkatan
$\theta(t)$	: Fungsi rata-rata penurunan
$v(t)$	: Selisih dari fungsi rata-rata peningkatan dan penurunan
$\Re$	: Himpunan bilangan real
P	: Tingkat Produksi tujuan
I	: Tingkat persediaan tujuan
h	: Koefisien biaya penyimpanan
k	: Koefisien biaya produksi
λ	: Konstanta nonnegatif biaya diskon
M	: Tingkat persediaan maksimal
H	: Persamaan Hamilton
L	: Persamaan Lagrange
$\frac{\partial H}{\partial P}$	: Turunan H terhadap parsial P
$\frac{\partial L}{\partial I}$	: Turunan L terhadap parsial I
$\frac{\partial L}{\partial P}$	: Turunan L terhadap parsial P

DAFTAR GAMBAR

Gambar **Halaman**

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori kendali merupakan suatu metode yang dapat diaplikasikan untuk mengendalikan dan mengatur keadaan dari suatu sistem. Salah satu sistem yang dapat dikendalikan dan diatur adalah sistem persediaan. Persediaan barang perlu dikendalikan agar tingkat persediaan barang tidak terlalu banyak yang akan menyebabkan pembengkakan biaya atau tingkat persediaan barang terlalu sedikit yang akan menyebabkan kekurangan persediaan.

Persediaan secara umum dapat didefinisikan sebagai barang yang disimpan ataupun digunakan untuk diproses atau dijual pada waktu mendatang. Persediaan barang pada perusahaan kadang mengalami penurunan dan peningkatan, penurunan dapat menghambat kelancaran proses produksi sehingga waktu pengiriman barang ke konsumen terganggu. Begitu sebaliknya, peningkatan persediaan merupakan pemborosan karena menyebabkan terlalu tingginya biaya penyimpanan barang digudang. Perusahaan harus dapat mengatur tersedianya suatu barang sehingga perlu pengendalian persediaan barang.

Selain itu terdapat masalah antara kepentingan kelancaran produksi dengan harga penyimpanan persediaan. Tersedianya barang yang cukup merupakan faktor penting dalam kelancaran proses produksi perusahaan. Oleh karena itu, setiap perusahaan dituntut untuk menyediakan bahan baku. Tetapi dengan terlalu besarnya persediaan dapat berakibat meningkatnya biaya penyimpanan dan muncul pemborosan.

Beberapa penelitian tentang penerapan teori kendali pada persediaan bisa dilihat dalam jurnal penelitian yang berkaitan dengan hal tersebut yaitu penelitian yang lakukan oleh Pardi Affandi dkk (2015). Pada jurnal Pardi Affandi dkk membahas tentang " Kendali Optimal dari Sistem *Inventory* dengan Peningkatan dan Penurunan Barang". Penelitian lain dengan pembahasan yang sama juga dilakukan oleh Lotfi Tadj dkk (2008) adalah " *Optimal Control of an Inventory System with Ameliorating and Deteriorating Items*". Penelitian tersebut membahas model matematika dari masalah persediaan yang mengalami peningkatan dan penurunan barang serta menyelesaikan bentuk persediaan barang tersebut menggunakan teknik kendali optimal. Dan dalam penelitian ini membahas peningkatan dan penurunan barang untuk waktu berhingga. Pada modelnya (Tadj, 2008) mendefinisikan persamaan differensial dinamik dan fungsi tujuan untuk kasus peningkatan dan penurunan barang. Pada kasus peningkatan barang, fungsi tujuan model persediaan barang dipengaruhi oleh biaya penyimpanan yang disimbolkan dengan ?. Pada penelitiannya, proses penentuan fungsi kendali didapat dengan membentuk persamaan Hamilton dan Lagrange

Sementara itu penelitian kendali optimal oleh Febriani (2018) membahas "Kendali Optimal pada Masalah Persediaan Barang dengan Fungsi Permintaan Berbentuk Linier Untuk Waktu Berhingga". Penelitian tersebut digunakan untuk mencari tingkat produksi barang yang optimal untuk model persediaan barang yang mengalami penurunan dengan fungsi permintaan berbentuk linier untuk waktu berhingga dengan menggunakan persamaan differensial dinamik. Solusi dari persamaan diferensial dinamik digunakan untuk membentuk fungsi kendali model persediaan barang yang mengalami penurunan dengan fungsi permintaan berbentuk linier untuk waktu berhingga. Selanjutnya, dianalisa kestabilan persamaan dinamik.

Koefisien biaya penyimpanan terbagi menjadi bentuk linier dan bentuk nonlinier. Fungsi Linier adalah fungsi yang sangat sering digunakan oleh para ahli ekonomi dan bisnis dalam menganalisis dan memecahkan masalah-masalah ekonomi. Hal ini dikarenakan kebanyakan masalah dan bisnis dapat di sederhanakan ke dalam model yang berbentuk linier dan salah satunya adalah pada masalah biaya penyimpanan.

Pada Vinod Kumar Mishra (2013) yang berjudul " *An Inventory Model of Instantaneous Deteriorating Items with Controllable Deterioration Rate for Time Dependent Demand and Holding Cost*" membahas model matematika dari masalah persediaan yang mengalami peningkatan barang dengan biaya penyimpanan berbentuk persamaan linier. Pada penelitian ini, penulis ingin merubah fungsi tujuan biaya penyimpanan pada jurnal yang ditulis oleh Lotfi Tadj dkk dengan fungsi linier biaya penyimpanan yang ada pada jurnal Vinod Kumar Mishra.

Maka berdasarkan dari penjelasan diatas, diperoleh bahwa penelitian yang dilakukan Tadj dkk (2008) dilakukan secara kontinu dengan waktu berhingga, penelitian Febriani (2018) dilakukan secara kontinu dengan waktu berhingga dan untuk mencari tingkat produksi barang yang optimal menggunakan persamaan diferensial dinamik. Sedangkan penelitian Vinod Kumar Mishra (2013) yang membahas model matematika dari masalah persediaan yang mengalami peningkatan barang dengan biaya penyimpanan berbentuk persamaan linier. Sehingga penulis tertarik melakukan penelitian tentang kasus persediaan barang pada waktu kontinu dengan mengganti fungsi tujuan biaya penyimpanan ℎ pada penelitian Tadj dkk dengan fungsi biaya penyimpanan $\propto + \beta t$ yang ada pada penelitian Vinod Khumar Mishra (2013), oleh karena itu penulis mengambil judul penelitian yaitu **“ Fungsi Kendali Model Persediaan Barang dengan Biaya Penyimpanan Merupakan Fungsi Linier ”.**

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan fungsi produksi pada model persediaan barang dengan biaya penyimpanan merupakan fungsi linier ?
2. Bagaimana analisis kestabilan bentuk model persediaan barang dengan biaya penyimpanan merupakan fungsi linier?

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Permasalahan hanya di fokuskan pada persediaan barang yang mengalami peningkatan dengan biaya penyimpanan adalah fungsi linier.
2. Fungsi tujuan berbentuk kuadratik untuk waktu berhingga.
3. Model yang di pakai adalah model persediaan barang yang mengalami peningkatan.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian tugas akhir ini sebagai berikut:

1. Mendapatkan fungsi produksi model persediaan dengan biaya penyimpanan merupakan fungsi linier .
2. Mendapatkan kestabilan model matematika dari persediaan barang yang mengalami peningkatan dengan biaya penyimpanan merupakan fungsi linier.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah :

1. Sebagai wawasan untuk menambah pengetahuan tentang system kendali.

   Memberi konstribusi bagi pembaca memperdalam masalah kestabilan tentang persedian barang dengan biaya penyimpanan merupakan fungsi linear untuk waktu berhingga.
2. Sebagai *literature* penunjang khususnya bagi mahasiswa yang menempuh mata kuliah teori kendali.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini mencakup 5 bab yaitu:

BAB I Pendahuluan

Pendahuluan menguraikan latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, serta sistematika penulisan.

BAB II Landasan Teori

Landasan teori berisi tentang hal-hal yang dijadikan sebagai dasar teori untuk mengembangkan petulisan tugas akhir.

BAB III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan tentang metode-metode yang dilakukan agar dapat memperoleh hasil yang dibutuhkan dalam penulisan tugas akhir ini.

BAB IV Pembahasan

Bab ini berisikan pemaparan cara-cara untuk mendapatkan hasil penelitian tersebut.

BAB V Penutup

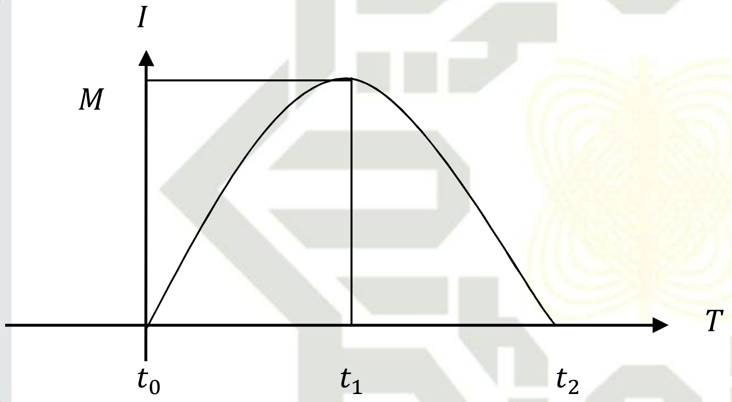
Bab ini berisikan kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Model Persediaan Barang yang Mengalami Peningkatan dan Penurunan

Pembentukan model ini didasarkan pada sistem persediaan dimana ditinjau persediaan saat terjadi peningkatan dan penurunan barang. Di asumsikan bahwa fase pertama dari t_0 hingga t_1 untuk tingkat persedian yang meningkat, kemudian fase kedua yaitu t_1 hingga t_2 untuk tingkat persediaan yang menurun. Berikut ini digambarkan model persediaan.



Gambar 2.1 Model Persediaan Menurut Lotf Tadj (2008)

Pada Gambar 2.1 membahas dua kasus yaitu kasus model penurunan barang dan model kenaikan barang. Berdasarkan batasan masalah yang telah diberikan maka yang dibahas pada penelitian ini hanya untuk kasus peningkatan barang yang ditunjukkan pada selang waktu $[t_0, t_1]$, dapat didefinisikan fungsi persamaan diferensial untuk model peningkatan barang sebagai berikut :

$$\dot{I}(t) = P(t) + v(t) \cdot I(t) \qquad t \in [t_0, t_1] \qquad (2.1)$$

dengan $v = m(t) - \theta(t)$, $P(t) \geq 0$. Untuk menjamin bahwa tingkat persediaan meningkat dari waktu t_0 hingga t_1 . Maka lebih lanjut memenuhi Persamaan (2.1).

$$P(t) + v(t).I(t) > 0 \quad t \in [t_0, t_1] \tag{2.2}$$

dengan:

$I(t)$: Fungsi tingkat persediaan

$P(t)$: Fungsi tingkat rata-rata produksi.

$I_0(\mathrm{t})$: Tingkat persediaan awal.

$\theta(t)$: Fungsi tingkat rata-rata penurunan.

$m(t)$: Fungsi tingkat rata-rata peningkatan.

$v(t)$: Selisih rata-rata persediaan

Fungsi tujuan dari model persediaan barang yang mengalami peningkatan sebagai berikut :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^t \left(\square\left[I(t) - \hat{I}\right]^2 + K\left[P(t) - \hat{P}\right]^2 \right) dt \tag{2.3}$$

Kemudian koefisien biaya penyimpanan h pada fungsi tujuan dit atas akan diganti dengan koefisien biaya penyimpanan berbentuk linier $(\alpha + \beta t)$ yang ada pada penelitian (**Mishra, Vinod K 2013).**

Dari fungsi tujuan di kenalkan beberapa notasi sebagai berikut :

$\square$: Biaya penyimpanan.

K: Biaya Produksi.

$\hat{I}$: Tingkat persediaan tujuan

$\hat{P}$: Tingkat produksi tujuan.

Menurut **(Tadj, L 2008)** untuk mencari tingkat produksi yang optimal maka didefinisikan persamaan berikut :

$$H = -\frac{1}{2}\left(\square\left(I - \hat{I}\right)^2 + K(P - \hat{P})^2 \right) + \lambda g, \tag{2.4}$$

Dimana

$$g = P(t) + v(t)I(t) \quad t \in [t_0, t_1] \tag{2.5}$$

Dan Fungsi Lagrange adalah sebagai berikut:

$$L = -\frac{1}{2}\left(▯(I - \hat{I})^2 + K(P - \hat{P})^2\right) + (\lambda + \mu)g, \quad t \in [t_0, t_1] \tag{2.6}$$

Syarat perlu untuk kondisi optimal diberikan dengan

$$\frac{\partial H}{\partial P} = 0 \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial L}{\partial I} = -\dot{\lambda} \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial L}{\partial P} = 0 \tag{2.9}$$

$$\mu \geq 0, \mu g \geq 0 \tag{2.10}$$

2.2 Bentuk Kuadratik

Pada bagian ini dijelaskan bentuk kuadratik yaitu :

$$\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} \tag{2.11}$$

Dan dengan entri matriks A adalah $c_{ij} = c_{ji}$ untuk semua i dan $j, c_{ij} \in$ ▯$, x \in R^n$ $A \in R^{n \times n}$ maka Persamaan (2.11) dapat dituliskan dalam notasi sigma sebagai berikut:

$$\boldsymbol{x}^T A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j \tag{2.12}$$

Menurut (**Lewis, 1995**) sifat definit dari Persamaan kuadratik (2.11) dapat diperoleh dengan menghitung nilai eigen dari matriks A. Jika A matriks simetri berukuran n x n dan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ merupakan nilai eigen dari matriks A maka bentuk kudratik $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ memenuhi :

1. Definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i > 0 \; \forall \; i, I = 1, 2, \ldots n$
2. Semi definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i \geq 0 \; \forall i \ni \lambda_i = 0$
3. Definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i < 0 \; \forall i, I = 1, 2, \ldots n$
4. Semi definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i \leq 0 \; \forall i \ni \lambda i = 0$

Jika $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ tidak memenuhi keempat sifat di atas, maka bentuk kuadratik $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ disebut undefinite. Selanjutnya untuk lebih memahami bentuk kuadratik, diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.1 :

Bentuklah persamaan $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} -5x_i x_j$ ke bentuk kuadratik dan tentukan sifat definit dari matriks A.

Penyelesaian:

Bentuk kuadratik sebagai berikut

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} -5x_j &= -5x_1 - 5x_1x_2 - 5x_2x_1 - 5x_2x_2\\ &= -5{x_1}^2 - 5x_1x_2 - 5x_2x_1 - 5{x_2}^2\\ &= -5{x_1}^2 - 10x_1x_2 - 5{x_2}^2\\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & -5\\ -5 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Selanjutnya untuk sifat definit di dapatkan sebagai berikut

Dari matriks $A = \begin{bmatrix} -5 & -5\\ -5 & -5 \end{bmatrix}$ didapat nilai eigennya:

$$\text{Det}\,(\lambda I - A) = 0$$

$$\text{Det}\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0\\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & -5\\ -5 & -5 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\text{Det}\begin{bmatrix} (\lambda + 5) & 5\\ 5 & (\lambda + 5) \end{bmatrix} = 0$$

$$\big((\lambda + 5)(\lambda + 5)\big) - (5\,.5) = 0$$

$$\lambda^2 + 10\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -10$$

Jadi, dari nilai eigen dapat disimpulkan bahwa bentuk kuadratik diatas memiliki sifat semi definit negatif.

2.3 Persamaan Diferensial Biasa Nonhomogen Koefisien Konstanta

Bentuk umum persamaan diferensial biasa nonhomogen diberikan sebagai berikut:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = g(x) \tag{2.13}$$

Selanjutnya dimisalkan $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ adalah penyelesaian untuk persamaan homogen

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{2.14}$$

Persamaan (2.14) dapat diselesaikan dengan memisalkan $y = e^{rx}$, sehingga akan diperoleh

$$a\frac{d^2(e^{rx})}{dx^2} + b\frac{(e^{rx})}{dx} + ce^{rx} = 0$$

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

Oleh karena, $e^{rx} = 0$ maka $y(x) = e^{rx}$ merupakan penyelesaian Persamaan (2.14) jika dan hanya jika nilai r memenuhi karasteriktik,

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2.15}$$

Peyelesaian dari Persamaan karakteristik (2.15) adalah

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$

dan

$$r_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

Penyelesaian khusus dari persoalan persamaan diferensial linier orde dua dengan persamaan karekteristik pada Persamaan (2.15) bergantung pada nilai diskriminan.

Adapun bentuk-bentuk penyelesaian berdasarkan nilai deskriminan adalah sebagai berikut:

a. Akar-akar Real dan Berbeda ($b^2 - 4ac > 0$)

Jika akar-akar r_1 dan r_2 pada persamaan karakteristik $ar^2 + br + c = 0$ adalah real dan berbeda, maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.14) adalah:

$$y_C(x) = c_1e^{r_1x} + c_1e^{r_2x} \tag{2.16}$$

Dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang.

b. Akar-akar Berulang ($b^2 - 4ac = 0$)

Jika akar-akar r_1 dan r_2 pada persamaan karakteristik $ar^2 + br + c = 0$ adalah sama ($r_1 = r_2$), maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.14) adalah

$$y_C(x) = c_1e^{r_1x} + c_1e^{r_2x} \tag{2.17}$$

Dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang.

c. Akar-akar Imajiner ($b^2 - 4ac < 0$)

Jika akar-akar r_1 dan r_2 pada persamaan karakteristik $ar^2 + br + c = 0$ adalah bilangan kompleks ($r_1 = \alpha + i\beta \; dan \; r_2 = \alpha - i\beta$), maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.14) adalah

$$y_C(x) = e^{\alpha x}(c_1 cos\beta x + c_2 sin\beta x) \qquad (2.18)$$

Dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang.

Kemudian $y_p(x)$ adalah penyelesaian untuk persamaan nonhomogen. Maka penyelesaian umum dari Persamaan nonhomogen (2.14) dapat ditulis dalam bentuk

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) \qquad (2.19)$$

Contoh 2.2 :

Tentukan penyelesaian umum dari persamaan diferensial biasa nonhomogen berikut:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 12y = x^2$$

Penyelesaian:

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah menentukan terlebih dahulu penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

Kemudian dibentuk persamaan karakteristik untuk persamaan homogennya yaitu:

$$r^2 + 8r + 12 = 0$$

$$(r + 6)(r + 2) = 0$$

$$r_1 = -6 \quad r_2 = -2$$

Maka diperoleh penyelesaian:

$$y_c(x) = c_1 e^{-6x} + c_2 e^{-2x}$$

Selanjutnya untuk penyelesain $y_p(x)$ diberikan oleh:

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Sehingga,

$y_p{}'(x) = 2Ax + B$ dan $y_p{}''(x) = 2A$

Untuk menentukan nilai A, B dan C maka disubsitusikan nilai-nilai $y_p(x), y_p'(x)$ dan $y_p''(x)$ ke dalam persamaan $\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 12y = x^2$ sehingga diperoleh:

$$2A + 8(2Ax + B) + 12(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

Dengan menggunakan kesamaan koefisien untuk persamaan di atas maka, diperoleh nilai $A = \frac{1}{12}, B = -\frac{2}{18}$, dan $C = \frac{2}{108}$, sehingga:

$$y_p(x) = \frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{18}x + \frac{2}{108}$$

Jadi, penyelesaian umum untuk persoalan diatas adalah menjumlahan persamaan $y_c(x)$ dengan persamaan $y_p(x)$ sehingga diperoleh:

$$y(x) = c_1e^{-6x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{18}x + \frac{2}{108}$$

2.4 Kestabilan

Sebelum membahas tentang kestabilan, terlebih dahulu dibahas tentang ekuilibrium berdasarkan definisi yang diberikan sebagai berikut :

Definisi 2.1 (Olsder, 1994) diberikan persamaan diferensial orde 1 yaitu $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dengan nilai awal $x(0) = \boldsymbol{x}_0$, sebuah vektor $\overline{\boldsymbol{x}}$ yang memenuhi $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0$ disebut titik ekuilibrium.

Untuk memahami definisi di atas maka di beri contoh sebagai berikut:

Contoh 2.3 :

Tentukan titik ekuilibrium dari persamaan berikut:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = 2x$$

Penyelesaian:

Diketahui

$$\dot{\boldsymbol{x}} = 2x$$

maka diperoleh titik ekuilibriumnya:

$$\overline{\boldsymbol{x}} = 0$$

Definisi titik ekuilibrium di atas diberikan untuk memudahkan dalam memahami pengertian dari kestabilan, diberikan definisi tentang kestabilan sebagai berikut:

Definisi 2.2 (Olsder, 1994) Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sehingga $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$ maka $\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil asimtotik jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ merupakan titik stabil dan $\exists \delta > 0$ sehingga $\lim_{t \to \infty} \|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \bar{\boldsymbol{x}}\| = 0$ memenuhi $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$. Titik ekuilibirium $\bar{\boldsymbol{x}}$ tak stabil jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ tidak stabil.

Untuk memahami definisi di atas maka diberi contoh sebagai berikut:

Contoh 2.4 :

Tentukan kestabilan dari persamaan differensial berikut $\dot{x} = -2x$ dengan diperoleh titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$

Penyelesaian:

Sebelum di analisa kestabilan, maka diberi solusi sebagai berikut

$$\dot{x} = -2x$$

$$\frac{dx}{dt} = -2x$$

$$\frac{dx}{x} = -2dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int -2dt$$

$$\ln x = -2t + c$$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

Sehingga:

$$\ln x - c = -2t$$

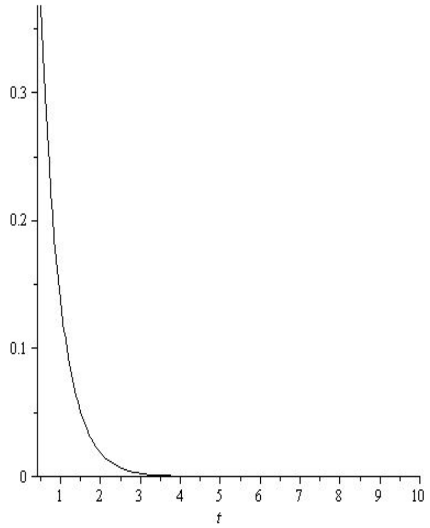
$$\ln x - \ln x_0 = -2t$$

$$\ln \frac{x}{x_0} = -2t$$

$$\frac{x}{x_0} = e^{-2t}$$

$$x = x_0 e^{-2t}$$

Selanjutnya, untuk melihat kecenderungan e^{-2t} dapat dilihat sebagai berikut:



Gambar 2.2 Grafik fungsi $f(t) = e^{-2t}$

Berdasarkan gambar 2.2 jika $t \rightarrow 10$ maka $x \rightarrow 0$ dapat disimpulkan bahwa $\dot{x} = -2x$ stabil asimtotik karena solusinya menuju 0.

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

Penulisan tugas akhir ini membahas penyelesaian fungsi kendali optimal persediaan barang yang mengalami peningkatan dengan biaya penyimpanan merupakan fungsi linear. Dalam penelitian ini akan dilakukan tahapan-tahapan sebagai berikut:

1. Diketahui persamaan diferensial dinamik untuk peningkatan barang sebagai berikut:

   $\dot{I} = P(t) + v(t)I(t)$

   Kemudian diketahui fungsi tujuan untuk kasus peningkatan barang waktu berhingga pada persamaan (2.3) sebagai berikut:

   $J = \int_0^t \left(\left(\frac{h}{2}\right)\left[I - \hat{I}\right]^2 + \frac{K}{2}\left[P - \hat{P}\right]^2\right) dt$

   Selanjutnya merubah fungsi tujuan biaya penyimpanan □ pada kasus peningkatan diatas dengan fungsi tujuan biaya penyimpanan berbentuk linear yaitu $\alpha + \beta t$.
2. Dibentuk persamaan Hamilton dan Lagrange berdasarkan diferensial dinamik dan fungsi tujuan pada langkah 1.
3. Selanjutnya berdasarkan langkah 2, ditentukan $\frac{\partial H}{\partial P} = 0, \frac{\partial L}{\partial I} = -\dot{\lambda}$dan $\frac{\partial L}{\partial P} = 0$.
4. Dari $\frac{\partial H}{\partial P} = 0$ pada langkah 3 didapatkan fungsi kendali yaitu tingkat produksi $(P(t))$.
5. Dari $\frac{\partial L}{\partial I} = -\dot{\lambda}$ dan $\frac{\partial L}{\partial P} = 0$ pada langkah langkah 3 didapatkan $\dot{\lambda}$.
6. $P(t)$ dilangkah 4 disubstitusikan ke persamaan differensial dinamik pada langkah 1.
7. Persamaan differensial dinamik dari langkah 6 dicari solusinya.
8. Dan solusi pada langkah 7 yang merupakan solusi untuk tingkat persediaan kemudian, akan di analisis kestabilannya.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Peningkatan persediaan biasanya disebabkan karena adanya persediaan awal dan kemudian terjadinya penambahan persediaan sedangkan permintaan barang masih sedikit. Berdasarkan pembahasan yang dilakukan pada Bab IV maka dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Fungsi produksi model persediaan dengan biaya penyimpanan merupakan fungsi linier yang di peroleh dengan dua kasus yaitu:

A. Fungsi v dalam bentuk konstanta diperoleh sebagai berikut:

a. Persamaan rata-rata produksi yang optimal yaitu:

$$P(t) = P + \left(c_1(r-v)e^{rt} - c_2(r+v)e^{-rt} + Q(t) - P - vQ(t)\right) \qquad t\epsilon[t_0, t_1]$$

b. Persamaan tingkat persediaan yang optimal yaitu:

$$I(t) = c_1 e^{rt} + c_2 e^{-rt} + Q(t)$$

Dimana

$$c_1 = \frac{e^{-rt_1}(I_0 - Q(t_0)) - e^{-rt_0}(M - Q(t_1))}{(e^{rt_0})(e^{-rt_1}) - (e^{-rt_0})(e^{rt_1})}$$

$$c_2 = \frac{-e^{-rt_1}(I_0 - Q(t_0)) + e^{rt_0}(M - Q(t_1))}{(e^{rt_0})(e^{-rt_1}) - (e^{-rt_0})(e^{rt_1})}$$

$$Q(t) = \frac{(\alpha+\beta t)\hat{I} - vK\hat{P}}{(\alpha+\beta t) + Kv^2}$$

B. Fungsi $\frac{(\alpha+\beta t)}{K} + \dot{v} + v^2$ dalam bentuk konstanta diperoleh sebagai berikut:

a. Persamaan rata-rata produksi yang optimal yaitu:

$$P(t) = \left(\left((k_1 - v(t))[(c_1 + V_1(t))]e^{k_1 t} - (k_1 + v(t))[(c_2 + V_2(t))]e^{-k_1 t}\right) + V_1(t)e^{k_1 t} + V_2(t)e^{-k_1 t} - \frac{(\alpha+\beta t)\hat{I}}{Kk_1^2} v(t)\right).$$

b. Persamaan tingkat persediaan yang optimal yaitu:

$$I(t) = (c_1 + V_1(t))e^{k_1 t} + (c_2 + V_2(t))e^{-k_1 t} + \frac{(\alpha + \beta t)\hat{I}}{Kk_1^{\,2}} \qquad t \in [t_0, t_1]$$

2. Kestabilan model diperoleh dari analisis kurva tingkat persediaan untuk $t \in [t_0, t_1]$ pada persamaan $I(t) = c_1 e^{rt} + c_2 e^{-rt} + Q(t)$. Hasil analisis kurva di peroleh bahwa persediaan mengalami kenaikan yang optimal. Artinya tingkat persediaan $I(t)$ meningkat pada waktu yang ditentukan.

5.2 Saran

Tugas akhir ini memaparkan tentang masalah persediaan barang yang mengalami peningkatan dan menyelesaikan dengan menggunakan teknik kendali optimal. Penulis terinspirasi oleh Loft Tadj (2008) dan Vinod Kumar Mishra (2013) dengan mengganti koefisien biaya penyimpanan □ yang ada pada Loft Tadj dengan yang ada pada Vinod Kumar Mishra yang berbentuk linier. Penulis menyarankan dengan mengganti fungsi tujuan, koefisien biaya penyimpanan bentuk linier menjadi bentuk Nonlinier, atau penelitian ini dapat dikembangkan dengan jenis permintaan yang berbentuk lebih kompleks yang dapat di arahkan kedalam bentuk stokastik.

Demikian saran-saran yang disampaikan penulis, semoga pembaca dapat mengembangkan lebih lanjut tentang fungsi kendali pada model persediaan barang yang mengalami peningkatan dalam waktu berhingga.

DAFTAR PUSTAKA

Affandi, P dkk. "Kendali Optimal dari Sistem Inventory dengan Peningkatan dan Penurunan Barang", *Jurnal MIPA*. 79-88, 2015.

Febriani dan Andiraja, N. "Kendali Optimal pada Masalah Persediaan dengan Fungsi Permintaan Berbentuk Linier ". *Skripsi Sains Matematika dan Statistik*, 2018.

Lewis, F.L. "*Optimal Control*". Toronto : John Wiley & Sons, Inc. 1995.

Mishra,V.K., "An Inventory of Instantaneous Deteriorating Items with Controllable Deterioration Rate for Time Dependent Demand and Holding Cost".*Jurnal of Industrial Engineering and Management.* hal. 495-506. 2013.

Muhaijir, M. N. *"Persamaan Diferensial Biasa dengan MAPLE"*. Pekanbaru. 2014.

Olsder, GJ. "*Mathematical Sistem Theory"*. Halaman 26 University Technology, Delft. 1994.

Purcell, E. J dan Varbeg, D. *"Kalkulus dan Geometri Analitis Jilid 1 Edisi Kelima"*. Jakarta : Erlangga. 2005.

Subiono. "*Sistem Linear dan Kontrol Optimal*", Surabaya : Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS). 2013.

Tadj, L dkk. "Optimal Control of an Inventory System with Ameliorating and Detreriorating Items", *Applied Sciences*, Vol.10, pp. 243-255, 2008.

Xie, W. C. "*Differential Equation for Engineers*". Amerika : Cambrigde University Press, 2010.

DAFTAR RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan pada tanggal 15 November 1996 di Danau Bingkuang ,Kecamatan Tambang ,Kabupaten Kampar , sebagai anak kedua dari lima bersaudara dari pasangan Bapak Sahar dan Ibu Siti Nur. Penulis menyelesaikan pendidikan formal di Taman Kanak-kanak (Tk) Tunas Harapan Danau Bingkuang tahun 2002, kemudian Sekolah Dasar (Sd) Negeri 005 Tambang Kecamatan Tambang , Kabupaten Kampar pada tahun 2008. Pada tahun 2011 penulis menyelesaikan Pendidikan Sekolah Menengah Pertama/ Madrasah Tsanawiyah di Mts Islamic Centre Al-Hidayah Kampar Kecamaan Kampar Timur, Kabupaten Kampar dan menyelesaikan Pendidikan Sekolah Menengah Atas/ Madrasah Aliyah di sekolah/pondok yang sama di MA Islamic Centre Al-Hidayah Kampar Kecamatan Kampar Timur, Kabupaten Kampar tahun 2014 dengan jurusan Ilmu Pengetahuan Alam (IPA). Pada tahun 2015 penulis melanjutkan pendidikan ke Perguruan Tinggi di Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau di Fakultas Sains dan Teknologi dengan Jurusan Matematika.

Pada Tahun 2018, tepatnya semester VI, Penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Balai Pemasyarakatan Kelas II Pekanbaru dengan judul **"Analisa Deskriptif Jumlah Keadaan Klien Dewasa Menurut Status Klien Dan Jenis Kelamin Di Balai Pemasyarakatan Kelas II Pekanbaru Tahun 2017"** yang dibimbing oleh Bapak Nilwan Andiraja, S.Pd,M.Sc dan Bapak Nursal dari tanggal 18 Januari sampai 19 Februari 2018 dan diseminarkan pada Mei 2018. Selanjutnya pada tahun yang sama penulis mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kabupaten Rokan Hulu, Kecamatan Rambah Hilir, Desa Rambah Hilir.

Pada tahun 2019 penulis dinyatakan lulus dalam ujian sarjana dengan judul tugas akhir **" Fungsi Kendali Model Persediaan Barang dengan Biaya Penyimpanan Merupakan Fungsi Linier untuk Waktu Berhingga"** di bawah bimbingan Bapak Nilwan Andiraja, S.Pd, M.Sc.