BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab ini terdapat penjelasan materi pendukung yang akan digunakan penulis untuk menyelesaikan permasalahan yang akan dibahas pada bab selanjutnya. Adapun materi pendukungnya adalah:

2.1 Pengertian Matriks dan Jenis–jenis Matriks

Pada sub bab ini menjelaskan tentang pengertian matriks dan jenis–jenis matriks. Adapun pengertian dari suatu matriks dijelaskan sebagai berikut:

Definisi 2.1 (Anton, 2004) Suatu matriks (*matrix*) adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks. Ukuran dari suatu matriks dinyatakan dalam jumlah baris (horizontal) dan kolom (vertikal) yang dimilikinya.

Matriks dinotasikan dengan huruf besar (A, B, dan seterusnya), dan entri-entri dari matriks dinotasikan dengan huruf kecil. Entri yang terletak pada baris i dan kolom j dalam matriks A dinyatakan sebagai $\left(a_{ij}\right)$. Matriks dengan m baris dan n kolom disebut matriks $m \times n$.

Bentuk umum dari matriks $A_{m \times n}$ adalah:

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (2.1)$$

Jumlah baris dan kolom menentukan ordo (dimensi) dari matriks. Jika jumlah baris dari suatu matriks sama dengan jumlah kolomnya $\left(m = n\right)$ maka matriks tersebut dinamakan matriks bujursangkar.

Berikut ini terdapat beberapa jenis matriks, diantaranya adalah:

1. Matriks Bujursangkar

   Matriks bujursangkar yaitu matriks yang banyak barisnya sama dengan banyak kolomnya. Dengan kata lain matriks tersebut berordo $n \times n$.

Contoh 2.1

Diberikan matriks bujursangkar sebagai berikut:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Matriks di atas mempunyai ordo 3, sedangkan entri yang terletak pada diagonal utamanya adalah 1, 5, dan 9.

2. Matriks Identitas

Matriks identitas atau yang disebut matriks satuan adalah matriks bujursangkar dengan bilangan 1 terletak pada diagonal utama sedangkan bilangan 0 terletak diluar diagonal utama. I_n digunakan untuk menuliskan matriks satuan berukuran $n \times n$.

Contoh 2.2

Matriks identitas berukuran $n \times n$ dinyatakan sebagai

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriks identitas ukuran 2×2 dan 3×3 yaitu:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks bujursangkar yang semua entri-entrinya bernilai nol, kecuali entri-entri diagonal utama, biasanya diberi lambang D.

Contoh 2.3

Diberikan matriks diagonal ordo 3×3 sebagai berikut:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

4. Matriks Segitiga

Matriks segitiga terbagi menjadi 2 jenis antara lain:

a. Matriks Segitiga Atas (*upper triangular*)

Matriks segitiga atas adalah matriks bujursangkar yang semua entri dibawah diagonal utama bernilai nol.

Matriks segitiga atas berukuran 3×3 dinyatakan sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Contoh 2.4

Diberikan matriks segitiga atas ordo 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

b. Matriks Segitiga Bawah (*lower triangular*)

Matriks segitiga bawah adalah matriks bujursangkar yang semua entri di atas diagonal utama bernilai nol.

Matriks segitiga bawah berukuran 3×3 dinyatakan sebagai

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Contoh 2.5

Diberikan matriks segitiga bawah ordo 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Matriks Simetris

Matriks bujursangkar disebut matriks simetris jika $A = A^T$. Berikut matriks simetris untuk ordo 3×3 sebagai berikut:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Contoh 2.6

Diberikan suatu matriks A berukuran 3×3 yaitu:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ maka } A^T=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sehingga $A=A^T$, ini berarti matriks A tersebut simetris.

Berdasarkan contoh diatas terlihat bahwa entri-entri pada diagonal utama sebagai sumbu pencerminan sedangkan entri pada baris ke-i kolom ke-j akan dicerminkan sehingga sama dengan entri pada kolom ke-i baris ke-j $a_{ij}=a_{ji}$.

2.2 Perkalian Matriks

Perkalian matriks dilakukan untuk mengetahui *trace* matriks yang akan dihitung dengan cara mengalikan matriks sebanyak pangkat yang diinginkan. Berikut diberikan beberapa definisi dan teorema yang berhubungan dengan perkalian matriks.

a. Perkalian Matriks dengan Skalar

Definisi 2.2 (Aryani dkk, 2016) Jika A adalah suatu matriks dan c adalah suatu skalar, maka hasil kali (*product*) cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri A oleh c.

Jika c adalah suatu bilangan skalar dan $A=a_{ij}$ maka matriks $cA=\left(ca_{ij}\right)$ yaitu suatu matriks cA yang diperoleh dengan mengalikan semua elemen matriks A dengan c. Mengalikan matriks dengan skalar dapat dituliskan didepan atau dibelakang matriks. Misalnya $c\left[A\right]=\left[A\right]c$.

$$cA=\begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Contoh 2.7

Jika $A=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ dan $c=2$ maka,

$$2A = 2\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 6 & 4 \\ 4 & 8 & 2 & 6 \\ 6 & 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

b. Perkalian Dua Matriks

Definisi 2.3 (Aryani dkk, 2016) Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$ maka hasil kali (*product*) AB adalah matriks $m \times n$ yang entri–entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri pada baris i dan kolom j dari AB, yaitu dengan memisahkan baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Mengalikan entri–entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian menjumlahkan hasil yang diperoleh. Definisi perkalian matriks mensyaratkan jumlah kolom dari faktor pertama A harus sama dengan jumlah baris dari faktor kedua B agar dapat dibentuk hasilkali AB. Jika syarat ini tidak terpenuhi, maka hasilkali tidak dapat didefinisikan.

Contoh 2.8

Diberikan matriks $A=\begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 & 7 \\ 4 & 8 & 9 & 3 \\ 9 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ dan $B=\begin{bmatrix} 10 & 3 & 7 & 1 & 9 \\ 4 & 2 & 5 & 7 & 0 \\ 9 & 4 & 6 & 8 & 2 \\ 7 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, sehingga

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 2 & 7 \\ 4 & 8 & 9 & 3 \\ 9 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 3 & 7 & 1 & 9 \\ 4 & 2 & 5 & 7 & 0 \\ 9 & 4 & 6 & 8 & 2 \\ 7 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 167 & 63 & 149 & 87 & 90 \\ 174 & 73 & 146 & 144 & 60 \\ 169 & 62 & 137 & 75 & 99 \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.1 (Larson, 2013) Jika A, B, dan C adalah matriks dan c adalah skalar, maka sifat berikut ini benar.

a) $(AB)C = A(BC)$, (hukum asosiatif pada perkalian matriks)

b) $A(B + C) = AB + AC$, (hukum distributif kiri)

c) $(A + B)C = AC + BC$, (hukum distributif kanan)

d) $c(AB) = (cA)B = A(cB)$.

Pembahasan mengenai perpangkatan suatu matriks merupakan salah satu bagian dari operasi matriks yang konsep dasarnya adalah perkalian matriks. Untuk menyelesaikan penghitungan dalam operasi matriks, khususnya perpangkatan suatu matriks membutuhkan prosedur yang rumit dan waktu yang lama, apalagi matriks tersebut berpangkat bilangan yang besar. Untuk keperluan itu, maka dalam aljabar matriks banyak alternatif pemecahan yang dapat digunakan untuk menyelesaikan perpangkatan suatu matriks, salah satunya adalah pemecahan dengan cara perkalian dua matriks atau lebih dengan matriks itu sendiri. Berikut diberikan definisi dan teorema mengenai perpangkatan suatu matriks.

c. Perpangkatan Matriks

Definisi 2.4 (Anton, 2004) Jika A adalah matriks bujursangkar, maka definisi dari pangkat bilangan bulat tak negatif dari A adalah

$$A^0 = I,\ A^n = \underbrace{A\,A \ldots A}_{n\ faktor}\ (n > 0).$$

Selanjutnya, Jika A dapat dibalik, maka definisi dari pangkat bilangan bulat negatif dari A adalah:

$$A^{-n} = \left(A^{-1}\right)^n = \underbrace{A^{-1}\,A^{-1} \ldots A^{-1}}_{n\ faktor}.$$

Teorema 2.2 (Anton, 2004) Jika A adalah matriks bujursangkar dengan r dan s adalah bilangan bulat, maka:

$$A^r\, A^s = A^{r+s}, \left(A^r\right)^s = A^{rs}.$$

2.3 *Trace* Matriks

Definisi 2.5 (Anton, 2004) Jika A adalah matriks bujursangkar, maka *trace* dari A, yang dinyatakan sebagai $tr(A)$, didefinisikan sebagai jumlah entri–entri pada diagonal utama A. *Trace* dari A tidak dapat didefinisikan jika A bukan matriks bujursangkar.

Diberikan matriks A berukuran $n \times n$ sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

maka *trace* dari matriks A adalah

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}.$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Contoh 2.9 Diberikan matriks $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, maka nilai *trace* dari matriks B.

$$tr(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 11.$$

Teorema berikut menjelaskan sifat – sifat *trace* matriks dari matriks bujursangkar.

Teorema 2.3 (Gentle, 2007) Jika A dan B adalah matriks bujursangkar dengan orde yang sama dan c adalah skalar, maka berlaku:

i. $tr(A) = tr(A^T)$,

ii. $tr(cA) = c\,tr(A)$,

iii. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$,

iv. $tr(AB) = tr(BA)$.

Bukti: Diberikan matriks A dan B adalah sebagai berikut:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

maka

$$tr(A)=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\ldots+a_{nn}\,. \qquad (2.3)$$

dan

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

maka

$$tr(B)=b_{11}+b_{22}+b_{33}+\ \ldots+b_{nn}\,. \qquad (2.4)$$

i. Akan ditunjukkan bahwa $tr(A)=tr(A^T)$. *Transpose* dari matriks A yaitu:

$$A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh $tr(A^T)=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\ldots+a_{nn}\,.$ (2.5)

Berdasarkan Persamaan (2.3) dan Persamaan (2.5) maka terbukti $tr(A)=tr(A^T)$.

ii. Akan ditunjukkan bahwa $tr(cA)=c\,tr(A)$, untuk c adalah sebarang skalar. Diberikan:

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} & \cdots & ca_{2n} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} & \cdots & ca_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & ca_{n3} & \cdots & ca_{nn} \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} tr(cA) &= ca_{11} + ca_{22} + ca_{33} + \ldots + ca_{nn}, \\ &= c(a_{11} + a_{22} + a_{33} + \ldots + a_{nn}), \\ &= c\, tr(A). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Oleh karena itu, terbukti $tr(cA) = c\, tr(A)$.

iii. Akan ditunjukkan bahwa $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$. Berdasarkan matriks A dan B, diperoleh:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & \cdots & a_{3n}+b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & a_{n3}+b_{n3} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} tr(A+B) &= (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) + (a_{33}+b_{33}) + \ldots + (a_{nn}+b_{nn}), \\ &= a_{11}+b_{11}+a_{22}+b_{22}+a_{33}+b_{33}+\ldots+a_{nn}+b_{nn}, \\ &= (a_{11}+a_{22}+a_{33}+\ldots+a_{nn}) + (b_{11}+b_{22}+b_{33}+\ldots+b_{nn}). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Berdasarkan Persamaan (2.3) dan Persamaan (2.4) maka terbukti bahwa $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.

iv. Akan ditunjukkan bahwa $tr(AB) = tr(BA)$. Dari matriks A dan B maka diperoleh:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} + \cdots + a_{1n}b_{n2} & \cdots & \cdots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + a_{13}b_{3n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & \cdots & \cdots & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + a_{23}b_{3n} + \cdots + a_{2n}b_{nn} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} + \cdots + a_{3n}b_{n1} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} + \cdots + a_{3n}b_{n2} & \cdots & \cdots & a_{31}b_{1n} + a_{32}b_{2n} + a_{33}b_{3n} + \cdots + a_{3n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + a_{n3}b_{31} + \cdots + a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + a_{n3}b_{32} + \cdots + a_{nn}b_{n2} & \cdots & \cdots & a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + a_{n3}b_{3n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix},$$

sehingga

$$\begin{aligned} tr(AB) &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \ldots + a_{2n}b_{n2}) \\ &\quad + \ldots + (a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{n2} + \ldots + a_{nn}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Selanjutnya untuk

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

sehingga

$$= \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + b_{13}a_{31} + \cdots + b_{1n}a_{n1} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + b_{13}a_{32} + \cdots + b_{1n}a_{n2} & \cdots & \cdots & b_{11}a_{1n} + b_{12}a_{2n} + b_{13}a_{3n} + \cdots + b_{1n}a_{nn} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + b_{23}a_{31} + \cdots + b_{2n}a_{n1} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + b_{23}a_{32} + \cdots + b_{2n}a_{n2} & \cdots & \cdots & b_{21}a_{1n} + b_{22}a_{2n} + b_{23}a_{3n} + \cdots + b_{2n}a_{nn} \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} + b_{33}a_{31} + \cdots + b_{3n}a_{n1} & b_{31}a_{12} + b_{32}a_{22} + b_{33}a_{32} + \cdots + b_{3n}a_{n2} & \cdots & \cdots & b_{31}a_{1n} + b_{32}a_{2n} + b_{33}a_{3n} + \cdots + b_{3n}a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}a_{11} + b_{n2}a_{21} + b_{n3}a_{31} + \cdots + b_{nn}a_{n1} & b_{n1}a_{12} + b_{n2}a_{22} + b_{n3}a_{31} + \cdots + b_{nn}a_{n2} & \cdots & \cdots & b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + b_{n3}a_{3n} + \cdots + b_{nn}a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} tr(BA) &= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1}) + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2}) \\ &\quad + \cdots + (b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn}) \\ &= b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1} + b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2} \\ &\quad + \cdots + b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn} \\ &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2} \\ &\quad + \cdots + a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2}) \\ &\quad + \cdots + (a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn}). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Berdasarkan Persamaan (2.9) maka terbukti $tr(AB) = tr(BA)$.

Berdasarkan Persamaan (2.5), (2.6), (2.7), (2.8), (2.9) maka Teorema 2.3 terbukti. ■

Diberikan contoh untuk menentukan *trace* matriks ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif untuk n genap dan n ganjil.

Contoh 2.10 Tentukan $tr\left(A^5\right)$ dari matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Untuk mendapatkan *trace* matriks tersebut, maka harus dikalikan sebanyak 5 kali sehingga diperoleh:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 9 & 21 \\ 21 & 12 & 30 \\ 22 & 12 & 28 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 15 & 9 & 21 \\ 21 & 12 & 30 \\ 22 & 12 & 28 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 117 & 66 & 156 \\ 162 & 93 & 219 \\ 160 & 90 & 214 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = A^3 \times A = \begin{bmatrix} 117 & 66 & 156 \\ 162 & 93 & 219 \\ 160 & 90 & 214 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 876 & 495 & 1173 \\ 1227 & 693 & 1641 \\ 1198 & 678 & 1606 \end{bmatrix},$$

$$A^5 = A^4 \times A = \begin{bmatrix} 876 & 495 & 1173 \\ 1227 & 693 & 1641 \\ 1198 & 678 & 1606 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6573 & 3717 & 8805 \\ 9201 & 5202 & 12324 \\ 8998 & 5088 & 12052 \end{bmatrix},$$

Sehingga diperoleh

$tr\left(A^4\right) = 876 + 693 + 1606 = 3175.$

$tr\left(A^5\right) = 6573 + 5202 + 12052 = 23827.$

Berikut akan diberikan pembahasan mengenai *trace* matriks 3×3 berpangkat bilangan bulat positif dan langkah–langkah pembentukan persamaan.

2.4 *Trace* Matriks 3×3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Pada tahun 2018, pembahasan mengenai *trace* suatu matriks telah dibahas oleh Aryani dalam makalahnya yang berjudul "*Trace Matriks* 3×3 *Berpangkat Bilangan Bulat*". Makalah tersebut membahas mengenai bentuk umum *trace* dari matriks 3×3 berpangkat bilangan bulat dengan entri pada masing-masing baris bernilai sama. Matriks khusus 3×3 yang dibahas dalam penelitian tersebut merupakan suatu matriks *singular*, sehingga matriks tersebut tidak *invertible*. Akibatnya dalam penelitian tersebut hanya dibahas *trace* matriks khusus 3×3 berpangkat bilangan bulat positif.

Berikut diberikan langkah – langkah pembentukan persamaannya:

1. Diberikan matriks $A_3 = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}, \forall\, a, b, c \in R.$ $\quad (2.10)$

2. Menentukan perpangkatan matriks $(A_3)^2$ sampai $(A_3)^{11}$.

$$\begin{aligned}(A_3)^2 &= A_3 \,.\, A_3 \\ &= \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \\ &= (a+b+c)\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}(A_3)^3 &= (A_3)^2 \,.\, A_3 \\ &= (a+b+c)\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \\ &= (a+b+c)^2\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$
\begin{aligned}
(A_3)^4 &= (A_3)^3 \,.\, A_3 \\
&= (a+b+c)^2 \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \\
&= (a+b+c)^3 \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

$$
\begin{aligned}
(A_3)^5 &= (A_3)^4 \,.\, A_3 \\
&= (a+b+c)^3 \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \\
&= (a+b+c)^4 \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

$$
\begin{aligned}
(A_3)^6 &= (A_3)^5 \,.\, A_3 \\
&= (a+b+c)^4 \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \\
&= (a+b+c)^5 \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

$$
\begin{aligned}
(A_3)^7 &= (A_3)^6 \,.\, A_3 \\
&= (a+b+c)^5 \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \\
&= (a+b+c)^6 \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

$$
\begin{aligned}
(A_3)^8 &= (A_3)^7 \,.\, A_3 \\
&= (a+b+c)^6 \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \\
&= (a+b+c)^7 \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

$$(A_3)^9 = (A_3)^8 . A_3$$

$$= (a+b+c)^7 \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^8 \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \qquad (2.18)$$

$$(A_3)^{10} = (A_3)^9 . A_3$$

$$= (a+b+c)^8 \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^9 \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \qquad (2.19)$$

$$(A_3)^{11} = (A_3)^{10} . A_3$$

$$= (a+b+c)^9 \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^{10} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \qquad (2.20)$$

3. Menentukan bentuk umum matriks $(A_3)^n$.

Bentuk umum $(A_3)^n$ dinyatakan dalam Teorema 2.4 berikut ini.

Teorema 2.4 Diberikan matriks dengan bentuk $A_3 = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}, \forall\, a, b, c \in R$

maka

$$(A_3)^n = (a+b+c)^{n-1} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \qquad (2.21)$$

Persamaan (2.21) yang dinyatakan dalam Teorema 2.4 dapat dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika.

4. Menentukan *trace* dari matriks (A_3) sampai $(A_3)^{11}$.

Berdasarkan Persamaan (2.10) maka:

$$tr(A_3) = (a+b+c) \tag{2.22}$$

Berdasarkan Persamaan (2.11) maka:

$$tr(A_3)^2 = (a+b+c)^2 \tag{2.23}$$

Berdasarkan Persamaan (2.12) maka:

$$tr(A_3)^3 = (a+b+c)^3 \tag{2.24}$$

Berdasarkan Persamaan (2.13) maka:

$$tr(A_3)^4 = (a+b+c)^4 \tag{2.25}$$

Berdasarkan Persamaan (2.14) maka:

$$tr(A_3)^5 = (a+b+c)^5 \tag{2.26}$$

Berdasarkan Persamaan (2.15) maka:

$$tr(A_3)^6 = (a+b+c)^6 \tag{2.27}$$

Berdasarkan Persamaan (2.16) maka:

$$tr(A_3)^7 = (a+b+c)^7 \tag{2.28}$$

Berdasarkan Persamaan (2.17) maka:

$$tr(A_3)^8 = (a+b+c)^8 \tag{2.29}$$

Berdasarkan Persamaan (2.18) maka:

$$tr(A_3)^9 = (a+b+c)^9 \tag{2.30}$$

Berdasarkan Persamaan (2.19) maka:

$$tr(A_3)^{10} = (a+b+c)^{10} \tag{2.31}$$

Berdasarkan Persamaan (2.20) maka:

$$tr(A_3)^{11} = (a+b+c)^{11} \tag{2.32}$$

5. Menentukan bentuk umum *trace* dari matriks $(A_3)^n$.

Bentuk umum $tr(A_3)^n$ dinyatakan dalam Teorema 2.5 berikut ini.

Teorema 2.5 Jika diberikan matriks khusus dengan bentuk

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}, \forall\, a, b, c \in R$$

maka

$$tr\left(A_3 \right)^n = \left(a + b + c \right)^n \ . \qquad (2.33)$$

Bukti: Teorema ini akan dibuktikan menggunakan pembuktian langsung.

Berdasarkan Teorema 2.4 maka bentuk umum $\left(A_3 \right)^n$ yaitu

$$\left(A_3 \right)^n = \left(a + b + c \right)^{n-1} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan Definisi 2.5 maka,

$$\begin{aligned} tr\left(A_3 \right)^n &= tr\left(\left(a + b + c \right)^{n-1} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \right) \\ &= \left(a + b + c \right)^{n-1} tr \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Berdasarkan Teorema 2.3} \\ \text{bagian (ii)} \end{array} \right\} \\ &= \left(a + b + c \right)^{n-1} \left(a + b + c \right) \\ &= \left(a + b + c \right)^{(n-1)+1} \\ &= \left(a + b + c \right)^n . \end{aligned}$$

Selanjutnya bentuk umum A_3^n dan $tr\left(A_3^n \right)$ yang diperoleh pada penelitian diaplikasikan pada contoh soal.

2.5 Induksi Matematika

Definisi 2.7 (Rinaldi, 2005) Induksi matematika adalah salah satu metode pembuktian dari banyak teorema dalam teori bilangan maupun dalam matematika lainnya. Induksi merupakan salah satu argumentasi pembuktian suatu teorema atau pernyataan matematika yang semesta pembicaraannya himpunan bilangan bulat atau lebih khusus himpunan bilangan asli.

Misalkan $p(n)$ adalah suatu proporsi/pernyataan yang akan dibuktikan kebenarannya untuk setiap bilangan asli n. Langkah-langkah pembuktian menggunakan induksi matematika adalah sebagai berikut.

1. *Basis Induksi* : Akan ditunjukkan $p(1)$ benar, dan
2. *Langkah Induksi* : Jika $p(n)$ benar, maka $p(n+1)$ juga benar untuk $n \geq 1$.

   Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Contoh 2.11 Berikut ini akan dibuktikan Teorema 2.4 menggunakan induksi matematika.

Penyelesaian: Misalkan $p(n):(A_3)^n = (a+b+c)^{n-1}\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}, \forall\, a, b, c \in R.$

i. *Basis Induksi* : Untuk $n = 1$ maka

$$p(1):(A_3)^1 = (a+b+c)^{1-1}\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

$$= (a+b+c)^0\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

$= A_3$, dengan memperhatikan Persamaan (2.10), maka $p(1)$ benar.

ii. *Langkah induksi* : Untuk $n = k$ diasumsikan $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k) : (A_3)^k = (a+b+c)^{k-1}\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}, \forall\, a, b, c \in R$$

maka akan ditunjukkan untuk $n = k+1$ maka $p(k+1)$ juga benar, yaitu:

$$p(k+1) : (A_3)^{k+1} = (a+b+c)^k \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}, \forall\, a, b, c \in R. \qquad (2.34)$$

Pembuktiannya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
(A_3)^{k+1} &= (A_3)^k . (A_3) \\
&= (a+b+c)^{k-1} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \\
&= (a+b+c)^{k-1} \begin{bmatrix} a^2+ab+ac & a^2+ab+ac & a^2+ab+ac \\ ab+b^2+bc & ab+b^2+bc & ab+b^2+bc \\ ac+bc+c^2 & ac+bc+c^2 & ac+bc+c^2 \end{bmatrix} \\
&= (a+b+c)^{k-1} \begin{bmatrix} (a+b+c)a & (a+b+c)a & (a+b+c)a \\ (a+b+c)b & (a+b+c)b & (a+b+c)b \\ (a+b+c)c & (a+b+c)c & (a+b+c)c \end{bmatrix} \\
&= (a+b+c)^{k-1} (a+b+c) \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix} \\
&= (a+b+c)^k \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Dengan memperhatikan Persamaan (2.34) maka $p(k+1)$ benar.

Oleh karena Langkah (i) dan (ii) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti bahwa:

$$(A_3)^n = (a+b+c)^{n-1} \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}, \forall\, a, b, c \in R.$$