BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab ini terdapat penjelasan materi pendukung yang akan digunakan penulis untuk menyelesaikan permasalahan yang akan dibahas pada bab selanjutnya. Adapun materi pendukungnya adalah :

2.1 Pengertian Matriks dan Jenis-jenis Matriks

Pada sub bab ini menjelaskan tentang pengertian matriks dan jenis-jenis matriks. Pengertian dari suatu matriks dijelaskan sebagai berikut :

Definisi 2.1 (Anton, 2004) Suatu matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks. Ukuran dari suatu matriks dinyatakan dalam jumlah baris (horizontal) dan kolom (vertikal) yang dimilikinya.

Sebuah matriks dinotasikan dengan huruf besar seperti *A, B, H* atau *Z* dan huruf kecil untuk menyatakan kuantitas numerik. Entri yang terletak pada baris *i* dan kolom *j* dalam matriks *A* akan dinyatakan sebagai (a_{ij}). Matriks dengan *m* baris dan *n* kolom disebut matriks $m \times n$, bentuk umum dari suatu matriks $m \times n$ adalah sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (2.1)$$

Jumlah baris dan kolom menentukan ordo dari matriks, jadi $A_{m \times n}$ dibaca sebagai matriks A yang mempunyai m baris dan n kolom. Jika jumlah baris dari suatu matriks sama dengan jumlah kolomnya $(m = n)$ maka matriks tersebut dinamakan matriks bujur sangkar.

Berikut ini terdapat beberapa jenis matriks, diantaranya adalah:

1. Matriks Simetris

   Matriks bujur sangkar disebut matriks simetris jika $A = A^T$.

Contoh 2.1

Diberikan matriks simetris ordo 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

maka $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

sehingga $A = A^T$.

Berdasarkan contoh di atas terlihat bahwa entri-entri pada diagonal utama sebagai sumbu pencerminan sedangkan entri pada baris ke-i kolom ke-j akan dicerminkan sehingga sama dengan entri pada kolom ke-i baris ke-j $\left(a_{ij} = a_{ji}\right)$.

2. Matriks Toeplitz

Definisi 2.2 (Gray, 2005) sebuah matriks Toeplitz adalah matriks berukuran $n \times n$ dinotasikan sebagai $T_n = \left[t_{kj}; k, j = 0,1,\cdots,n-1\right]$ dengan $t_{kj} = t_{k-j}$ sebuah matriks dengan formula :

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & t_{-(n-2)} \\ t_2 & t_1 & t_0 & t_{-(n-3)} \\ & & & \\ t_{(n-1)} & t_{(n-2)} & t_1 & t_0 \end{bmatrix}.$$

Contoh 2.2

Diberikan matriks Toeplitz ordo 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Matriks Toeplitz Simetris

Matriks Toeplitz Simetris merupakan matriks toeplitz yang setiap entri diagonalnya sama, yang mana entri $\left[r_{ij}\right] = \left[r_{ji}\right]$ untuk setiap $i, j = 1,2,.....,n$.

$$R_n = \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & & r_{n-1} & r_n \\ r_1 & r_0 & r_1 & & r_{n-2} & r_{n-1} \\ r_2 & r_1 & r_0 & & r_{n-3} & r_{n-2} \\ & & & & & \\ r_{n-1} & r_{n-2} & r_{n-3} & & r_0 & r_1 \\ r_n & r_{n-1} & r_{n-2} & & r_1 & r_0 \end{bmatrix}$$

Contoh 2.3

Diberikan matriks Toeplitz Simetris 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 \\ r_1 & 1 & r_1 \\ r_2 & r_1 & 1 \end{bmatrix} \quad r_1, r_2 \in \text{bilangan real}$$

2.2 Operasi Matriks

Operasi matriks yang dibahas adalah perkalian matriks dengan skalar, perkalian dua matriks dan perpangkatan matriks.

a. Perkalian Matriks dengan skalar

Definisi 2.3 (Aryani dkk, 2016) Jika A adalah suatu matriks dan c adalah suatu skalar, maka hasil kali (*product*) cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri A oleh c.

Jika c adalah suatu bilangan skalar dan A= $[a_{ij}]$ maka matriks cA= $[ca_{ij}]$ yaitu suatu matriks cA yang diperoleh dengan mengalikan semua elemen matriks A dengan c.

Contoh 2.4

Jika $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ dan $c = 2$ maka,

$$2A = 2\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

b. Perkalian Dua Matriks

Definisi 2.4 (Aryani dkk, 2016) Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$ maka hasil kali (*product*) AB adalah matriks $m \times n$ yang entri–entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri pada baris i dan kolom j dari AB, yaitu dengan memisahkan baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Mengalikan entri–entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian menjumlahkan hasil yang diperoleh.

Contoh 2.5

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ maka:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 13 \end{bmatrix}.$$

c. Perpangkatan Matriks

Definisi 2.5 (Anton, 2004) Jika A adalah matriks bujursangkar, maka definisi dari pangkat bilangan bulat tak negatif dari A adalah

$$A^0 = I \,,\; A^n = \underbrace{A\,A \quad A}_{n\ faktor} \;\left(n > 0\right)$$

selanjutnya, jika A dapat dibalik, maka definisi dari pangkat bilangan bulat negatif dari A adalah:

$$A^{-n} = \left(A^{-1}\right)^n = \underbrace{A^{-1}\,A^{-1} \quad A^{-1}}_{n\ faktor}.$$

Teorema 2.1 (Anton, 2004) Jika A adalah matriks bujursangkar dan r dan s adalah bilangan bulat – bilangan bulat, maka :

$$A^r\,A^s = A^{r+s} \,,\; \left(A^r\right)^s = A^{rs}.$$

2.3 *Trace* Matriks

Definisi 2.6 (Anton, 2004) Jika A adalah matriks bujursangkar maka *trace* dari A yang dinyatakan sebagai $tr(A)$, didefinisikan sebagai jumlah entri–entri pada diagonal utama A. *Trace* dari A tidak dapat didefinisikan jika A bukan matriks bujursangkar.

Diberikan matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

maka *tr(A)* adalah:

$$\begin{aligned} tr(A) &= a_{11} + a_{22} + \quad + a_{nn} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \end{aligned}$$

Berikut ini contoh matriks dan *trace*nya:

Contoh 2.7 Diberikan matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 8 & -5 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, maka nilai *trace* dari matriks B.

$$tr(B) = 2 + 6 + 8 + 1 = 17 .$$

Teorema berikut menjelaskan sifat – sifat *trace* matriks dari matriks bujursangkar.

Teorema 2.2 (Gentle, 2007) Jika A dan B adalah matriks bujursangkar dengan orde yang sama dan c adalah skalar, maka berlaku:

i. $tr(A) = tr(A^T)$,

ii. $tr(cA) = c\, tr(A)$,

iii. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$,

iv. $tr(AB) = tr(BA)$.

Bukti : Diberikan matriks A dan B adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{bmatrix},$$

maka

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \quad + a_{nn}\,. \tag{2.2}$$

dan

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & & b_{3n} \\ & & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & & b_{nn} \end{bmatrix},$$

maka

$$tr(B) = b_{11} + b_{22} + b_{33} + \quad + b_{nn}\,. \tag{2.3}$$

i. Akan ditunjukkan bahwa $tr(A) = tr(A^T)$. *Transpose* dari matriks A yaitu:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & & a_{n3} \\ & & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & & a_{nn} \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh $tr(A^T) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \quad + a_{nn}\,.$ (2.4)

Berdasarkan persamaan (2.3) dan persamaan (2.4) maka terbukti $tr(A) = tr(A^T)$.

ii. Akan ditunjukkan bahwa $tr(cA) = c\,tr(A)$, untuk c adalah sebarang skalar. Diberikan :

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} & & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} & & ca_{2n} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} & & ca_{3n} \\ & & & & \\ ca_{n1} & ca_{n2} & ca_{n3} & & ca_{nn} \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} tr(cA) &= ca_{11} + ca_{22} + ca_{33} + \quad + ca_{nn}, \\ &= c\left(a_{11} + a_{22} + a_{33} + \quad + a_{nn}\right), \\ &= c\,tr(A). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Oleh karena itu, terbukti $tr(cA) = c\,tr(A)$.

iii. Akan ditunjukkan bahwa $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$. Berdasarkan matriks A dan B, diperoleh :

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & & b_{3n} \\ & & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & & b_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & & a_{2n}+b_{2n} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} & & a_{3n}+b_{3n} \\ & & & & \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & a_{n3}+b_{n3} & & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

sehingga

$$tr(A+B) = (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) + (a_{33}+b_{33}) + \quad + (a_{nn}+b_{nn}) \tag{2.6}$$

maka

$$\begin{aligned} tr(A+B) &= (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) + (a_{33}+b_{33}) + \quad + (a_{nn}+b_{nn}) \\ &= a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22} + a_{33} + b_{33} + \quad + a_{nn} + b_{nn} \\ &= (a_{11} + a_{22} + a_{33} + \quad + a_{nn}) + (b_{11} + b_{22} + b_{33} + \quad + b_{nn}). \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (2.2) dan persamaan (2.3) maka terbukti bahwa

$$tr\left(A+B\right)=tr\left(A\right)+tr\left(B\right)$$

iv. Akan ditunjukkan bahwa $tr\left(AB\right)=tr\left(BA\right)$. Dari matriks A dan B maka diperoleh :

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & & b_{3n} \\ & & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+ & +a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+ & +a_{1n}b_{n2} & a_{11}b_{1n}+a_{12}b_{2n}+ & +a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+ & +a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+ & +a_{2n}b_{n2} & a_{21}b_{1n}+a_{22}b_{2n}+ & +a_{2n}b_{nn} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+ & +a_{3n}b_{n1} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+ & +a_{3n}b_{n2} & a_{31}b_{1n}+a_{32}b_{2n}+ & +a_{3n}b_{nn} \\ & & & & & \\ a_{n1}b_{11}+a_{n2}b_{21}+ & +a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12}+a_{n2}b_{22}+ & +a_{nn}b_{n2} & a_{n1}b_{1n}+a_{n2}b_{n2}+ & +a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix},$$

sehingga

$$tr\left(AB\right)=\left(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\quad+a_{1n}b_{n1}\right)+\left(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\quad+a_{2n}b_{n2}\right)+\quad+\left(a_{n1}b_{1n}+a_{n2}b_{n2}+\quad+a_{nn}\right) \tag{2.7}$$

Selanjutnya untuk

$$BA=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & & b_{3n} \\ & & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & & b_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{3n} \\ & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$=\begin{bmatrix} b_{11}a_{11}+b_{12}a_{21}+ & +b_{1n}a_{n1} & b_{11}a_{12}+b_{12}a_{22}+ & +b_{1n}a_{n2} & b_{11}a_{1n}+b_{12}a_{2n}+ & +b_{1n}a_{nn} \\ b_{21}a_{11}+b_{22}a_{21}+ & +b_{2n}a_{n1} & b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}+ & +b_{2n}a_{n2} & b_{21}a_{1n}+b_{22}a_{2n}+ & +b_{2n}a_{nn} \\ b_{31}a_{11}+b_{32}a_{21}+ & +b_{3n}a_{n1} & b_{31}a_{12}+b_{32}a_{22}+ & +b_{3n}a_{n2} & b_{31}a_{1n}+b_{32}a_{2n}+ & +b_{3n}a_{nn} \\ & & & & & \\ b_{n1}a_{11}+b_{n2}a_{21}+ & +b_{nn}a_{n1} & b_{n1}a_{12}+b_{n2}a_{22}+ & +b_{nn}a_{n2} & b_{n1}a_{1n}+b_{n2}a_{2n}+ & +b_{nn}a_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$
\begin{aligned}
tr\left(BA\right) &= \left(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \quad + b_{1n}a_{n1}\right) + \left(b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \quad + b_{2n}a_{n2}\right) \\
&\quad + \quad + \left(b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \quad + b_{nn}a_{nn}\right) \\
&= b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \quad + b_{1n}a_{n1} + b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \quad + b_{2n}a_{n2} \\
&\quad + \quad + b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \quad + b_{nn}a_{nn} \\
&= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \quad + a_{1n}b_{n1} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \quad + a_{2n}b_{n2} \\
&\quad + \quad + a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \quad + a_{nn}b_{nn} \\
&= \left(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \quad + a_{1n}b_{n1}\right) + \left(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \quad + a_{2n}b_{n2}\right) \\
&\quad + \quad + \left(a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \quad + a_{nn}b_{nn}\right)
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

berdasarkan Persamaan (2.8) maka terbukti $tr\left(AB\right) = tr\left(BA\right)$.

Karena Persamaan (i), (ii), (iii), dan (iv) terpenuhi, maka Teorema 2.2 diatas terbukti. ■

Diberikan contoh untuk menentukan *trace* matriks ordo 3×3 berpangkat bilangan bulat positif untuk n genap dan n ganjil.

Contoh 2.8 Tentukan $tr\left(A^4\right)$ dari matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Untuk mendapatkan *trace* matriks tersebut, maka harus dikalikan sebanyak 4 kali sehingga diperoleh :

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 9 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 16 & 9 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 68 & 57 \\ 76 & 49 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \times A = \begin{bmatrix} 68 & 57 \\ 76 & 49 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 364 & 261 \\ 348 & 277 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$tr\left(A^4\right) = 364 + 277 = 641$

Berikut akan diberikan pembahasan mengenai *trace* matriks 2×2 berpangkat bilangan bulat negatif dan langkah–langkah pembentukan persamaan.

2.4 *Trace* Matriks 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Pada tahun 2017, pembahasan mengenai *trace* suatu matriks telah dibahas oleh Titik Fatonah dalam penelitiannya yang berjudul "*Trace Matriks Berbentuk Khusus 2×2 Berpangkat Bilangan Bulat Positif*". Penelitian tersebut membahas mengenai bentuk umum *trace* dari matriks 2×2 berpangkat bilangan positif dengan entri–entri matriksnya bilangan real. Berikut diberikan langkah – langkah pembentukan persamaannya:

1. Diberikan matriks $A=\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall\, a, b, \in R$

$$\det(A) = -ab \tag{2.9}$$

dan

$$tr(A) = 0 \tag{2.10}$$

2. Menentukan bentuk umum A^n dengan *n* ganjil dan *n* genap.

Sebelum menentukan bentuk umum $tr(A^n)$ berpangkat bilangan bulat positif, maka diperlukan bentuk umum A^n berpangkat bilangan bulat positif sebagai berikut:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} A^2 &= A\cdot A \\ &= \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 A \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a^2b \\ ab^2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} A^4 &= A^3\cdot A \\ &= \begin{bmatrix} a^2b^2 & 0 \\ 0 & a^2b^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$A^5 = A^4 \cdot A$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & a^3b^2 \\ a^2b^3 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

$$A^6 = A^5 \cdot A$$
$$= \begin{bmatrix} a^3b^3 & 0 \\ 0 & a^3b^3 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

$$A^7 = A^6 \cdot A$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & a^4b^3 \\ a^3b^4 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

$$A^8 = A^7 \cdot A$$
$$= \begin{bmatrix} a^4b^4 & 0 \\ 0 & a^4b^4 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

$$A^9 = A^8 \cdot A$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & a^5b^4 \\ a^4b^5 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

$$A^{10} = A^9 \cdot A$$
$$= \begin{bmatrix} a^5b^5 & 0 \\ 0 & a^5b^5 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

$$A^{11} = A^{10} \cdot A$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & a^6b^5 \\ a^5b^6 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

$$A^{12} = A^{11} \cdot A$$
$$= \begin{bmatrix} a^6b^6 & 0 \\ 0 & a^6b^6 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

Dengan melihat kembali Persamaan (2.11) sampai (2.22) maka dapat diduga bentuk umum A^n yaitu:

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} & ,untuk\ n\ ganjil \\ \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} & ,untuk\ n\ genap \end{cases} \tag{2.23}$$

3. Membuktikan bentuk umum A^n dengan *n* ganjil dan *n* genap menggunakan induksi matematika.
4. Menentukan bentuk umum $tr\left(A^n\right)$ dengan *n* ganjil dan *n* genap.

Berdasarkan Persamaan (2.23) maka dapat dibentuk $tr\left(A^n\right)$ yaitu:

i. Untuk n bilangan ganjil

$$\begin{aligned} tr\left(A^n\right) &= tr\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$tr\left(A^n\right) = 0$$

ii. Untuk n bilangan genap, yaitu:

$$\begin{aligned} tr\left(A^n\right) &= tr\begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} \\ &= a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} + a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \\ &= 2a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \\ &= 2\left(ab\right)^{\frac{n}{2}} \\ &= 2\left(-\left(-ab\right)\right)^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} tr\left(A^n\right) &= 2\left(-\det\left(A\right)\right)^{\frac{n}{2}} \\ &= 2\left(-1\right)^{\frac{n}{2}}\left(\det\left(A\right)\right)^{\frac{n}{2}}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Dari Persamaan (2.24) dan (2.25) maka dapat ditulis:

$$tr\left(A^n\right)=\begin{cases} 0 & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ 2\left(-1\right)^{\frac{n}{2}}\left(\det\left(A\right)\right)^{\frac{n}{2}} & \text{, untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti bentuk umum A^n dengan n ganjil menggunakan induksi matematika pada bagian 2.5 di bawah ini..

2.5 Induksi Matematika

Definisi 2.7 (Rinaldi, 2005) Prinsip induksi sederhana sebagai berikut : Misalkan $p\left(n\right)$ suatu pernyataan yang menyatakan bilangan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa pernyataan $p\left(n\right)$ tersebut benar untuk semua bilangan positif n, maka untuk membuktikan pernyataan ini digunakan aturan sebagai berikut :

1. Akan ditunjukkan $p\left(1\right)$ benar, dan
2. Jika $p\left(n\right)$ benar, maka $p\left(n+1\right)$ juga benar untuk $n \geq 1$.

Sehingga $p\left(n\right)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Langkah 1 dinamakan *basis induksi*, sedangkan langkah 2 dinamakan *langkah induksi.* Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p\left(n\right)$ benar. Asumsi tersebut dinamakan hipotesis induksi. Bila sudah ditunjukkan kedua langkah tersebut benar maka sudah dibuktikan bahwa $p\left(n\right)$ benar untuk semua bilangan n.

Contoh 2.7 Diberikan matriks $A=\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall\, a,b \in R$, tunjukkan bahwa

$A^n=\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$, untuk n ganjil dengan induksi matematika.

Penyelesaian:

$$p(n): A^n=\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Buktikan proposisi ini dengan dua langkah induksi matematika sebagai berikut:

1. *Basis induksi:* Untuk $n = 1$ maka,

$$p(1): A^1 = \begin{bmatrix} 0 & a^1 b^0 \\ a^0 b^1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \text{ maka } p(1) \text{ benar.}$$

2. *Langkah induksi*:

Asumsikan untuk $n = k$, $p(k)$ benar, yaitu:

$$p(k): A^k = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}} \\ a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Maka akan dibuktikan untuk $n = k + 2$, $p(k+2)$ juga benar.

$$\begin{aligned}
A^{k+2} &= \left(A^k . A^2\right) \\
&= \left(A^k . A . A\right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}} \\ a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}} \\ a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & ab\left(a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}}\right) \\ ab\left(a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}}\right) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+3}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} \\ a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k+3}{2}} & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Oleh karena langkah 1 dan 2 sudah diperlihatkan benar, maka terbukti

$$A^n = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}, \text{ untuk } n \text{ ganjil.} \qquad \blacksquare$$