BAB II
LANDASAN TEORI

Bab ini berisi teori-teori pendukung yang berkaitan dengan matriks, graf, matriks ketetanggaan, perkalian matriks, determinan matriks, invers matriks, $trace$ matriks, $trace$ matriks ketetanggaan.

2.1 Matriks dan Jenis-jenis Matriks

Definisi 2.1 (Anton dan Rorres, 2004) Suatu matriks (*matrix)* adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks.

Matriks tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan a_{ij} = elemen atau unsur matriks

$i = 1, 2, 3, \dots, m$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, n$

Definisi 2.2 (Anton dan Rorres, 2004) Suatu matriks A dengan jumlah baris n dan jumlah kolom n disebut matriks bujur sangkar orde n, dan entri-entri $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ pada Persamaan (2.1) merupakan diagonal utama dari matriks A

$$A_{nxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Definisi 2.3 (Anton dan Rorres, 2004) Suatu matriks bujur sangkar yang semua entrinya tidak terletak pada diagonal utama adalah nol disebut matriks diagonal. Suatu matriks diagonal umum dapat ditulis sebagai berikut

$$A_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definisi 2.4 (Anton dan Rorres, 2004) Jika A adalah matriks mxn, maka transpos dari A dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks nxm yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A dan seterusnya.

Definisi 2.5 (Anton dan Rorres, 2004) Suatu matriks bujur sangkar A adalah simetris jika $A = A^T$. Jadi $A = [a_{ij}]$ simetris jika $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua i dan j dengan $1 \le i \le n$ dan $1 \le j \le n$.

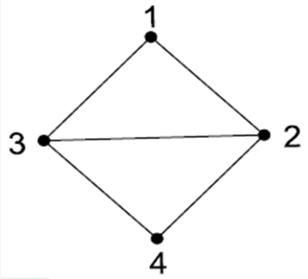
Berikut akan diberikan definisi dan teorema mengenai perkalian matriks dengan matriks, perkalian matriks dengan skalar dan perpangkatan matriks yang akan digunakan untuk menentukan $trace$ dari matriks yang berpangkat.

2.2 Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ yang dalam ini V adalah himpunan tidak kosong dari simpul-simpul dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan sepasang simpul. Graf bisa dipresentasikan dalam beberapa bentuk salah satunya matriks ketetanggaan, dimana matriks ini berukuran dengan $n \times n$.

Graf lengkap adalah graf sederhana dengan n titik, dimana setiap 2 titik berbeda dihubungkan dengan suatu garis. Graf G adalah graf lengkap bila dan hanya bila semua elemen dalam diagonal utama 0 dan semua elemen luar diagonal utama 1. Graf lengkap dengan n buah simpul dilambangkan dengan K_n. Jumlah sisi pada graf lengkap yang terdiri dari n buah simpul adalah $n(n-1))/2$.

Contoh 2.1 Diberikan graf sederhana lengkap dengan $V = \{1,2,3,4\}$ dan $E = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,4)\}$. Maka bentuk grafnya adalah:

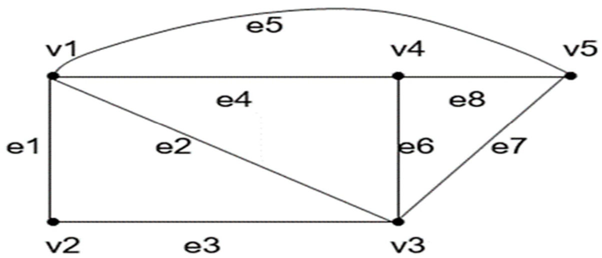


2.3 Matriks Ketetanggaan

Definisi 2.6 (Munir, 2005) Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dengan n simpul, $n \geq 1$. Matriks ketetanggaan G adalah matriks bujur sangkar yang berukuran $n \times n$ dan akan bernilai 1 jika simpul i dan j bertetanggaan, sebaliknya 0 jika simpul i dan j tidak bertetanggaan.

Matriks ketetanggan untuk graf sederana dan tidak berarah selalu simetri, sedangkan untuk graf berarah matriks ketetanggaannya belum tentu simetri (akan simetri jika berupa graf berarah lengkap). Selain itu, diagonal utamnya selalu nol karena tidak ada sisi gelang.

Contoh 2.2 Tentukan matriks ketetanggaan A dari graf G berikut ini.



maka diperoleh $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2.4 Perkalian Matriks

Definisi 2.7 (Rossen, 2007) Misalkan A adalah matriks $m \times k$ dan B adalah matriks $k \times n$. Perkalian A dan B, dinotasikan dengan AB adalah matriks $m \times n$ dengan entri ke-(i, j) sama dengan jumlah perkalian dari elemen yang bersesuaian dari baris ke-i dari A dan kolom ke-j dari B. Dengan kata lain, jika $AB = [C_{ij}]$, maka $C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ik}b_{kj,}\ \forall\ i = 1,2,\cdots,m\ ,\ j = 1,2,\cdots,n$ (2.2)

Contoh 2.3 Diberikan matriks : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

Maka $AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$.

Definisi 2.8 (Anton, 2004) Jika A adalah suatu matriks dan c adalah skalar, maka ***hasil kali (product)*** cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri dari A oleh c.

Contoh 2.4 Diberikan matriks : $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Maka

$$2A = 2\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad (-3)A = (-3)\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -3 & -9 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.9 (Anton, 2004) Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar, maka dapat didefinisikan pangkat-pangkat bilangan bulat tak negatif A menjadi

$$A^0 = I, \qquad A^n = \underbrace{AA\ldots A}_{n\,faktor}\ \ (n > 0). \tag{2.3}$$

Akan tetapi, jika A dapat dibalik, maka dapat didefinisikan pangkat bilangan bulat negatif menjadi

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1}\ldots A^{-1}}_{n\,faktor}. \tag{2.4}$$

Contoh 2.5 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, tentukanlah A^4 dan A^{-4}.

Penyelesaian:

$$A^4 = AAAA$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-4 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ -1+4+1 & -2+2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-4 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ -1+4+1 & -2+2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-4 & -6-8 & 0 \\ 6+8 & -4+16 & 0 \\ -12+4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -14 & 0 \\ 14 & 12 & 0 \\ -8 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-4} = A^{-1}A^{-1}A^{-1}A^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{16} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{16} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{64} & -\frac{7}{128} & -\frac{30}{24} \\ \frac{7}{128} & \frac{5}{256} & -\frac{27}{64} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Berikut diberikan definisi dari determinan suatu matriks dan metode yang digunakan untuk menentukan determinan tersebut.

2.5 Determinan Matriks

Definisi 2.10 (Anton dan Rorres, 2004) Misalkan A adalah matriks bujur sangkar. Fungsi determinan dinotasikan dengan $\det(A)$ sebagai jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda dari A. Angka $\det(A)$ disebut determinan dari A.

Determinan dari matriks bujur sangkar dapat ditentukan dengan beberapa metode yaitu metode Sarrus, metode ekspansi kofaktor, metode CHIO, metode eliminasi Gauss dan metode dekomposisi matriks. Berdasarkan lima metode diatas, penulis hanya menggunakan metode ekspansi kofaktor dalam mencari determinan suatu matriks.

Definisi 2.11 (Anton dan Rorres, 2004) Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka minor dari entri a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan sebagai c_{ij} dan disebut sebagai kofaktor dari entri a_{ij}.

Berdasarkan penjelasan dari minor dan kofaktor di atas, maka dapat dibentuk rumus determinan menggunakan ekspansi kofaktor dalam teorema berikut.

Teorema 2.2 (Anton dan Rorres, 2004) Determinan dari matriks A berukuran $n \times n$ dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali yang diperoleh, dimana setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$,

$$\det(A) = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + a_{3j}c_{3j} + \cdots + a_{nj}c_{nj} \tag{2.5}$$

(ekpansi kofaktor sepanjang kolom ke-j),

$$\det(A) = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + a_{i3}c_{i3} + \cdots + a_{in}c_{in} \tag{2.6}$$

(ekpansi kofaktor sepanjang baris ke-i).

Contoh 2.6. Diberikan matriks 3×3 sebagai berikut : $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

Hitunglah $\det(A)$ dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama dari A.

Penyelesaian :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) - (-2)(-2) + 5(3)$$

$$= 1.$$

Teorema 2.3 (Anton dan Rorres, 2004) Jika A adalah suatu matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal) maka determinan A adalah hasil kali dari entri-entri pada diagonal utama matriks tersebut, yaitu $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn}$. Berdasarkan Teorema 2.2 maka $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}$.

Teorema 2.4 (Anton dan Rorres, 2004) Misalkan A adalah suatu matriks bujur sangkar. Jika A mempunyai satu baris atau satu kolom bilangan nol, maka $\det(A) = 0$.

Contoh 2.7 Akan ditentukan determinan dari matriks $3x3$ dengan

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Berdasarkan Teorema 2.2 maka $\det(A) = 0$

Definisi 2.12 (Anton dan Rorres, 2004) Suatu matriks persegi A dikatakan singular apabila $\det(A) = 0$, jika $\det(A) \neq 0$ maka dikatakan matriks nonsingular. Matriks nonsingular memiliki invers dan matriks singular tidak memiliki invers.

Suatu matriks akan mempunyai invers apabila determinan matriks tersebut tak nol. Berikut akan didefinisikan invers dari suatu matriks.

2.6 Invers Matriks

Definisi 2.13 (Anton dan Rorres, 2004) Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut bisa dibalik dan B disebut invers dari A. Jika matriks B tidak dapat didefinisikan, maka A dinyatakan sebagai matriks singular.

Definisi 2.14 (Anton dan Rorres, 2004) Jika A adalah matriks $n \times n$ sebarang dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, maka matriks

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari A. Transpose dari matriks ini disebut adjoin dari A dan dinyatakan sebagai $adj(A)$.

Contoh 2.8 Diberikan $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, tentukan $adj(A)$.

Penyelesaian:

Kofaktor-kofaktor dari A adalah

$c_{11} = 12$ $\quad c_{12} = 6$ $\quad c_{13} = -16$

$c_{21} = 4$ $\quad c_{22} = 2$ $\quad c_{23} = 16$

$c_{31} = 12$ $\quad c_{32} = -10$ $\quad c_{33} = 16$

jadi matriks kofaktor- kofaktornya adalah

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

dan adjoin dari A adalah

$$adj(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Suatu matriks A mempunyai invers atau tidak dapat dilihat dari determinan matriks A tersebut. Apabila $\det(A) \neq 0$ berarti matriks A memiliki invers. Hal tersebut dijelaskan dalam teorema berikut.

Teorema 2.5 (Anton dan Rorres, 2004) Suatu matriks A dapat dibalik jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

Berdasarkan pembahasan sebelumnya telah diperoleh formula adjoin yang akan digunakan untuk mencari invers dari suatu matriks yang dapat dibalik. Berikut diberikan teorema untuk mencari invers tersebut.

Teorema 2.6 (Anton dan Rorres, 2004) Jika A adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Bukti:

$$A\, adj(A) = \det(A)\, I$$

$$A\, adj(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{j1} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{j2} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{jn} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Entri pada baris ke-1 dan kolom ke-1 dari hasil kali $A\, adj(A)$ adalah

$$a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} + \cdots + a_{1n}c_{1n}.$$

Entri pada baris ke-2 dan kolom ke-2 dari hasil kali $A\, adj(A)$ adalah

$$a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22} + a_{23}c_{23} + \cdots + a_{2n}c_{2n}.$$

Entri pada baris ke-3 dan kolom ke-3 dari hasil kali $A\,adj(A)$ adalah

$$a_{31}c_{31} + a_{32}c_{32} + a_{33}c_{33} + \cdots + a_{3n}c_{3n}.$$

Begitu seterusnya hingga entri pada baris ke-i dan kolom ke-j, sehingga hasil kali $A\,adj(A)$ pada baris ke-i dan kolom ke-j adalah

$$a_{i1}c_{j1} + a_{i2}c_{j2} + a_{i3}c_{j3} + \cdots + a_{in}c_{jn}. \tag{2.7}$$

Jika $i = j$, maka Persamaan (2.7) adalah ekspansi kofaktor dari $\det(A)$ sepanjang baris ke-i dan jika $i \neq j$, maka semua a dan kofaktor-kofaktornya berasal dari baris-baris yang berbeda dari A sehingga nilai dari Persamaan (2.7) adalah nol. Oleh karena itu

$$A\,adj(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix}$$

$$= \det(A)\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \det(A)\, I. \tag{2.8}$$

Karena A dapat dibalik, maka $\det(A) \neq 0$, sehingga Persamaan (2.8) dapat ditulis kembali sebagai berikut :

$$A\left[\frac{1}{\det(A)}adj(A)\right] = I$$

dengan mengalikan kedua sisi di sebelah kiri dengan A^{-1} menghasilkan

$$A^{-1}A\left[\frac{1}{\det(A)}adj(A)\right] = A^{-1}I$$

$$I\left[\frac{1}{\det(A)}adj(A)\right] = A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}adj(A). \tag{2.9}$$

2.7 *Trace* Matriks

Teorema 2.7 (Gentle, 2007) Misalkan $A = \{a_{ij}\}$ suatu matriks persegi berukuran $n \, x \, n$, maka *trace* dari A didefinisikan sebagai jumlah dari elemen diagonal A dan dinotasikan dengan $tr(A)$, yaitu $tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. Beberapa sifat dari *trace* matriks diantaranya adalah sebagai berikut:

1. $tr(I_n) = n$
2. $tr(kA) = k \, tr(A)$
3. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
4. $tr(A^T) = tr(A)$

Di mana k adalah sembarang skalar, sedangkan A dan B adalah matriks berukuran $n \, x \, n$.

Bukti:

1. Akan dibuktikan bahwa $tr(I_n) = n$

Ambil matriks $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

$$tr(I_n) = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$$
$$= \textstyle\sum_1^n 1 = n$$

2. Akan dibuktikan bahwa $tr(kA) = k \, tr(A)$

Ambil sembarang matriks $A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

dan skalar k

$$tr(kA_n) = tr\left(k \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \right)$$

$$= tr\left(\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \dots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \cdots & ka_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n1} & ka_{n3} & \cdots & ka_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= ka_{11} + ka_{22} + ka_{33} + \cdots + ka_{nn}$$

$$= k\,(a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn})$$

$$= k\,tr(A_n)$$

3. Akan dibuktikan bahwa $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$

Ambil sembarang matriks $A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

dan $B_n = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n1} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$

Maka,

$$tr(A_n + B_n) = tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n1} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} & \cdots & a_{3n} + b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n1} & a_{n3} + b_{n3} & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22} + a_{33} + b_{33} + \cdots + a_{nn} + b_{nn}$$

$$= (a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}) + (b_{11} + b_{22} + b_{33} + \cdots + b_{nn})$$

$$= tr(A_n) + tr(B_n)$$

4. Akan dibuktikan bahwa $tr(A^T) = tr(A)$

Ambil sembarang matriks $A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

$$tr(A_n^T) = tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^T\right)$$

$$= tr\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$$

$$= tr(A_n)$$

Contoh 2.10 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ dan $= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$,

maka tentukan

1. $tr(A)$.
2. $tr(2A)$.
3. $tr(A + B)$.
4. $tr(A^T)$

Penyelesaian:

1. $tr(A) = 2 + 1 - 3 + 6 = 6$
2. $tr(2A) = 2.tr(A)$

   $= 2(6) = 12$
3. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$

   $= 6 + (9) = 15$
4. $tr(A^T) = tr(A)$

   $= 6$

2.8 $Trace$ Matriks Ketetanggaan Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Pahade dan Jha pada tahun 2017, membahas mengenai $trace$ matriks ketetanggaan berpangkat bilangan bulat positif dengan judul *Trace of Positive Integer Power of Adjacency Matrix*. Makalah tersebut membahas mendapatkan bentuk umum *trace* matriks $n \times n$ berpangkat bilangan bulat positif graf lengkap untuk *n* genap dan *n* ganjil. Berikut diberikan teoremanya:

Teorema 2.8 Misalkan A adalah matriks ketetanggaan simetris dari graf lengkap dengan n simpul, maka

$$tr(A^k) = \sum_{r=0}^{n/2} s(k,r)n(n-1)^r(n-2)^{k-2r}, \ k \text{ genap}$$

$$tr(A^k) = \sum_{r=0}^{n-1/2} S(k,r)n(n-1)^r(n-2)^{k-2r}, \ \ k \text{ ganjil}$$

dengan $S(k,r)$ menjadi angka yang bergantung pada k dan r, dan didefinisikan sebagai: $S(k,1) = 1$, $S\left(k,\frac{k}{2}\right) = 1$, $S\left(k,\frac{k-1}{2}\right) = \frac{k-1}{2}$, $S(k,r) = S(k-1,r) + S(k-2,r-1)$.

Berikut diberikan contoh $trace$ matriks ketetanggaan dari graf lengkap berpangkat bilangan bulat positif.

Contoh 2.11 Tentukan $tr(A^5)$ dari matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian : $n = 4. k = 5$

$$trA^5 = \sum_{r=1}^{2} s(5,r)n(n-1)^r(n-2)^{5-2.r}$$

$$= \sum_{r=1}^{2} s(5,1)4(4\text{-}1)^1(4\text{-}2)^{5\text{-}2.1} + s(5,2)4(4\text{-}1)^2(4\text{-}2)^{5\text{-}2.2}$$

$$= \sum_{r=1}^{2} s(5,1)4(3)^1(2)^3 + s(5,2)4(3)^2(2)^1$$

$$= (1\times4\times3\times2^3) + (2\times4\times3^2\times2)$$

$$= 96 + 144 = 240$$

Pembahasan mengenai *trace* matriks ketetanggaan berpangkat bilangan bulat negatif telah diperoleh oleh Aulia Arjuna Nugraha dengan judul *Trace Matriks Ketetanggaan* $n \times n$ *Berpangkat Negatif Dua* pada tahunn 2019. Hal yang sama juga dilakukan oleh Muhammad Faisal dengan judul *Trace Matriks Ketetanggaan Dari Graf Lengkap Berpangkat Negatif Tiga* pada tahun 2019. Berikut diberikan bentuk umum matriks ketetanggaan dari garf lengkap, yaitu:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

1. Bentuk Umum Perpangkatan Matriks Ketetanggaan Dari Graf Lengkap Berpangkat Dua Dan Tiga, yaitu:

$$A_n{}^2 = \begin{bmatrix} (n-1) & (n-2) & (n-2) & \cdots & (n-2) & (n-2) & (n-2) \\ (n-2) & (n-1) & (n-2) & \cdots & (n-2) & (n-2) & (n-2) \\ (n-2) & (n-2) & (n-1) & \cdots & (n-2) & (n-2) & (n-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-2) & (n-2) & (n-2) & \cdots & (n-1) & (n-2) & (n-2) \\ (n-2) & (n-2) & (n-2) & \cdots & (n-2) & (n-1) & (n-2) \\ (n-2) & (n-2) & (n-2) & \cdots & (n-2) & (n-2) & (n-1) \end{bmatrix}, n \geq 2$$

$$A_n^3 = \begin{bmatrix} (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)(n-2) \end{bmatrix}, n \geq 2$$

2. Bentuk Umum Perpangkatan Matriks Ketetanggaan Dari Graf Lengkap Berpangkat Negatif Dua Dan Negatif Tiga, yaitu:

$$A_n^{-2} = \frac{1}{(n-1)^2}\begin{bmatrix} (n-1)+(n-2)^2 & -(n-2) & -(n-2) & \cdots & -(n-2) & -(n-2) & -(n-2) \\ -(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & -(n-2) & -(n-2) & -(n-2) \\ -(n-2) & -(n-2) & -(n-1) & \cdots & -(n-2) & -(n-2) & -(n-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -(n-2) & -(n-2) & -(n-2) & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & -(n-2) & -(n-2) \\ -(n-2) & -(n-2) & -(n-2) & \cdots & -(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 & -(n-2) \\ -(n-2) & -(n-2) & -(n-2) & \cdots & -(n-2) & -(n-2) & (n-1)+(n-2)^2 \end{bmatrix}, n \geq 2$$

$$A_n^{-3} = \frac{1}{(n-1)^3}\begin{bmatrix} -(2(n-1)(n-2)+(n-2)^3) & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & -(2(n-1)(n-2)+(n-2)^3) & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & -(2(n-1)(n-2)+(n-2)^3) & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & -(2(n-1)(n-2)+(n-2)^3) & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & -(2(n-1)(n-2)+(n-2)^3) & (n-1)+(n-2)^2 \\ (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & \cdots & (n-1)+(n-2)^2 & (n-1)+(n-2)^2 & -(2(n-1)(n-2)+(n-2)^3) \end{bmatrix}, n \geq 2$$

3. Bentuk Umum *Trace* Matriks Ketetanggaan Dari Graf Lengkap Berpangkat Negatif Dua Dan Negatif Tiga, yaitu:

$$tr(A_n)^{-2} = \frac{n\left((n-1)+(n-2)^2\right)}{(n-1)^2}, n \geq 2$$

$$tr(A_n)^{-3} = \frac{n\left[-2(n-1)(n-2)-(n-2)^3\right]}{(n-1)^3}, n \geq 2$$