BAB II
LANDASAN TEORI

Teori dasar yang digunakan pada tugas akhir ini, yaitu: deret Taylor, orde hampiran, orde konvergensi, indeks efesiensi, metode Newton dan konvergensinya, metode Chebyshev-Halley dan konvergensinya.

2.1. Deret Taylor

Deret Taylor merupakan suatu fungsi yang terdeferensiasi dapat dinyatakan dalam suatu deret pangkat atau suku banyak (*polynomial*) dengan suku yang tak-terhingga. Deret ini dapat dianggap sebagai limit *polynomial* Taylor.

Teorema 2.1 (Larson dan Edwards, 2010) Misalkan f fungsi yang turunan ke-$(n+1)$, dalam interval terbuka I yang mengandung c. Maka untuk masing-masing x dalam I, terdapat z diantara x dan c sedemikian sehingga

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(x), \qquad (2.1)$$

dengan

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1},\ x < z < c. \qquad (2.2)$$

Persamaan (2.2) merupakan sisa deret Taylor $P_n(x)$ merupakan polinomial Taylor yang ditulis

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n. \qquad (2.3)$$

Persamaan (2.1) dapat ditulis kembali menjadi

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x). \qquad (2.4)$$

Contoh 2.1 : Carilah hampiran $P_3(x)$ berdasarkan pada $c = 1$ untuk $f(x) = 2x^3$!

Penyelesaian:

$f(x) = 2x^3$ maka $f(1) = 2$,

$f'(x) = 6x^2$, maka $f'(1) = 6$,

$f''(x) = 12x$, maka $f''(1) = 12$,

$f'''(x) = 12$, maka $f'''(1) = 12$.

Berdasarkan Persamaan (2.3), $f(x)$ dihampiri dengan deret Taylor dengan $P_3(x)$.

$$
\begin{aligned}
P_3(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 . \\
&= 2 + 6(x-1) + \frac{12}{2!}(x-1)^2 + \frac{12}{3!}(x-1)^3 . \\
&= 2x^3 + 6x^2 - 6x^2 + 6x - 12x + 6x + 2 - 2 . \\
&= 2x^3 .
\end{aligned}
$$

2.2. Orde Hampiran

Untuk memahami tentang orde hampiran, berikut definisi tentang orde hampiran:

Definisi 2.1 Orde Hampiran (Munir, 2003) Misalkan nilai fungsi $f(h)$ dihampiri oleh fungsi $p(h)$. Jika $|f(h) - p(h)| \leq K\left|h^n\right|$ dengan K merupakan konstanta riil dan $K > 0$ maka dapat dikatakan $p(h)$ menghampiri fungsi $f(h)$ dengan orde penghampiran $O(h^n)$ sehingga dapat ditulis

$$f(h) = p(h) + O(h^n), \tag{2.5}$$

dengan $O(h^n)$ merupakan orde error dari penghampiran suatu fungsi.

Pada umumnya, karena h cukup kecil yaitu kurang dari 1, maka semakin tinggi nilai n, galat atau *error* akan semakin kecil sehingga semakin teliti penghampiran fungsinya.

Umumnya, deret Taylor sering digunakan untuk menghampiri nilai dari suatu fungsi. Misalkan

$$x_{n+1} = x_n + h,$$

dengan $n = 0, 1, 2, \ldots, k$ adalah titik-titik selebar h, maka hampiran fungsi $f(x_{n+1})$ dengan deret Taylor di sekitar x_n adalah

$$
\begin{aligned}
f(x_{n+1}) &= f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) f'(x_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2!} f''(x_n) + \cdots \\
&\quad + \frac{(x_{n+1} - x_n)^n}{n!} f^n(x_n) + R_n(x_{n+1}), \\
&= f(x_n) + hf'(x_n) + \frac{h^2}{2!} f''(x_n) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^n(x_n) + R_n(x_{n+1}),
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

dengan

$$
\begin{aligned}
R_n(x_{n+1}) &= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(x_n), \\
&= O(h^{n+1}) .
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

Persamaan (2.7) menyatakan bahwa jika fungsi $f(x)$ dihampiri dengan deret Taylor derajat n, maka suku sisanya cukup dinyatakan dengan $O(h^{n+1})$. Pada suku sisa yang digunakan di dalam notasi $O-$besar adalah suku yang dimulai dengan perpangkatan h^{n+1}.

Definisi 2.2 *Galat Orde Konvergensi* (Thukral, 2016) Misalkan $f(x)$ adalah fungsi nilai real dengan akar persamaan α dan misalkan $\{x_n\}$merupakan sebuah barisan dari bilangan real yang konvergen menuju α. Orde konvergensi p adalah

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^p}=\xi,\ \xi\neq 0. \tag{2.8}$$

dimana $p\in\Re$ dan ξ bilangan asimtotik galat (*asymptotic error constant).*

Definisi 2.3 *Orde Konvergensi* (Weerakoon, 2000) Misalkan $e_n=x_n-\alpha$ adalah *error* pada iterasi ke- n, maka didefinisikan:

$$e_{n+1}=ce_n^p+O(e_n^{p+1}). \tag{2.9}$$

Merupakan persamaan galat. Jika persamaan galat ada, maka p adalah orde konvergensi dari metode iterasi.

Definisi 2.4 *Computational Order of Convergence* (COC) (Sharma, dkk. 2011). Misalkan bahwa x_n dan x_{n+1} berturut-turut adalah iterasi yang menuju ke akar α, maka COC yang didefinisikan dengan ρ dapat diaproksimasikan sebagai berikut:

$$\rho\approx\frac{\ln\left|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)\right|}{\ln\left|(x_n-\alpha)/(x_{n-1}-\alpha)\right|},\ n=0,1,2,\ \cdots,k\,. \tag{2.10}$$

Definisi 2.5 *Efficiency Index* (Thukral, 2016). Misalkan r adalah jumlah evaluasi fungsi dari metode iterasi. Effesiensi metode iterasi diukur dengan konsep indeks efesiensi dan didefinisikan sebagai:

$$EI=p^{1/r}\,. \tag{2.11}$$

dengan

p adalah orde konvergensi dari metode.

2.3. Metode Newton dan Orde Konvergensinya

Metode Newton merupakan metode paling klasik untuk mentukan akar persamaan suatu fungsi $f(x)$ dengan pendekatan suatu titik. Metode ini paling cepat untuk memperoleh perhitungan nilai sebenarnya (konvergen). Metode Newton diperoleh dari pemotongan deret Taylor orde satu, sebagai berikut

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n)\,. \tag{2.12}$$

Selanjutnya, dengan memisalkan $x = x_{n+1}$ sehingga diperoleh Persamaan (2.12) menjadi

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) f'(x_n)\,.$$

Oleh karena diasumsikan x_{n+1} sangat dekat dengan akar sebenarnya, maka $f(x_{n+1}) \approx 0$ menjadi

$$0 = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) f'(x_n)\,. \tag{2.13}$$

Kurangkan kedua ruas pada Persamaan (2.13) dengan $f(x_n)$, maka diperoleh

$$-f(x_n) = (x_{n+1} - x_n) f'(x_n)\,. \tag{2.14}$$

Selanjutnya, dari Persamaan (2.14), diperoleh x_{n+1} dalam bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ f'(x) \neq 0 \text{ dan } n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2.15}$$

Persamaan (2.15) merupakan metode Newton.

Kemudian, akan dibahas mengenai orde konvegensi metode Newton.

Teorema 2.2 Misalkan $f(x)$ adalah fungsi bernilai real yang mempunyai turunan pertama, kedua, ketiga, dan seterusnya pada interval (a,b). Jika $f(x)$ memiliki akar α pada interval (a,b) dan x_0 adalah nilai tebakan awal yang cukup dekat dengan α, maka metode iterasi pada Persamaan (2.15) memenuhi persamaan *error*

$$e_{n+1} = c_2 e_n^2 + O(e_n^3)\,, \tag{2.16}$$

dengan $e_n = x_n - \alpha$ dan $c_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j = 2, 3, \cdots$.

Persamaan (2.16) merupakan persamaan *error* metode Newton dengan orde konvergensi kuadratik dengan melibatkan dua evaluasi fungsi $f(x_n)$, dan $f'(x_n)$ dan memiliki indeks efesiensi $2^{1/2} = 1{,}414$.

Contoh 2.2: Diketahui fungsi nonlinear $f(x) = x^2 - 2$ dengan $\alpha \approx 1{,}41421356$ dan $x_0 = 1{,}00000000$. Tunjukkan bahwa metode Newton berkonvergensi kuadratik dengan ketelitian $\varepsilon = 10^{-10}$.

Penyelesaian:

$$f(x) = x^2 - 2,$$

$$f'(x) = 2x.$$

Subtitusika $x_0 = 1{,}00000000$ ke Persamaan (2.15), sehingga diperoleh

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

$$x_1 = 1{,}0000000 - \frac{(-1{,}00000000)}{2{,}00000000},$$

$$x_1 \approx 1{,}50000000 .$$

Oleh karena itu, dengan menggunakan cara yang sama, secara berturut-turut diperoleh $x_2 \approx 1{,}41666667$, $x_3 \approx 1{,}41421569$, $x_4 \approx 1{,}41421356$, dan $x_5 \approx 1{,}41421356$. Selanjutnya dengan menggunakan lima iterasi awal yaitu x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 dan x_5 akan ditentukan orde konvergensi dengan menggunakan Persamaan (2.10), sehingga didapatkan

$$\rho_1 \approx \frac{\ln|(x_2-\alpha)/(x_1-\alpha)|}{\ln|(x_1-\alpha)/(x_0-\alpha)|},$$

$$\rho_1 \approx \frac{\ln|(1{,}41666667 - 1{,}41421356)/(1{,}50000000 - 1{,}41421356)|}{\ln|(1{,}50000000 - 1{,}41421356)/(1{,}00000000 - 1{,}41421356)|},$$

$$\rho_1 \approx 2{,}25751652 .$$

Oleh karena itu, dengan menggunakan cara yang sama, secara beturut-turut diperoleh $\rho_2 \approx 1{,}98391945$, $\rho_3 \approx 1.99975445$, $\rho_4 \approx 1.99999989$. Selanjutnya hasil COC dapat dilihat pada Tabel 2.1 sebagai berikut:

Tabel 2.1 Hasil COC Metode Newton

n	x_n	$\lvert x_{n+1} - x_n \rvert$	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	COC
1	1,50000000	5,00000000e–01	8,57864376e–02	-
2	1,41666667	8,33333333e–02	2,45310429e–03	2,25751652e+00
3	1,41421569	2,45098039e–03	2,12390141e–06	1,98391945e+00
4	1,41421356	2,12389982e–06	1,59486182e–12	1,99975445e+00
5	1,41421356	1,59486182e–12	8,99292832e–25	1,99999989e+00

Berdasarkan tabel 2.1 dapat dilihat bahwa nilai COC dari metode Newton adalah dua atau *kuadratik*.

2.4. Metode Chebyshev-Halley dan Orde Konvergensinya

Pandang persamaan metode Chebyshev-Halley sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{1}{2}\frac{L_f(x_n)}{1-\beta L_f(x_n)}\right)\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right), \tag{2.17}$$

dengan $L_f(x_n) = \dfrac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}$.

Metode Chebyshev-Halley memiliki tiga evaluasi fungsi, yaitu $f(x_n), f'(x_n)$ dan $f''(x_n)$. Metode Chebyshev-Halley ini merupakan bentuk umum dari metode Chebyshev, Super Halley, dan Halley dengan masing masing $\beta \in [0,1]$ dan memiliki orde konvergensi *kubik*.

Kemudian, akan dibahas mengenai persamaan *error* dari metode Chebyshev-Halley yang menunjukkan orde konvergensinya.

Teorema 2.3 Misalkan $f(x)$ adalah fungsi bernilai real yang mempunyai turunan pertama, kedua, ketiga, dan seterusnya pada interval (a,b). Jika $f(x)$ memiliki akar α pada interval (a,b) dan x_0 adalah nilai tebakan awal yang cukup dekat dengan α, maka metode iterasi pada Persamaan (2.17) memenuhi persamaan *error*:

$$e_{n+1} = (-c_3 + 2c_2^2 - 2\beta c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.18}$$

dengan $e_n = x_n - \alpha$ dan $c_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j = 2, 3, \cdots$.

Pada Persamaan (2.18) merupakan persamaan galat metode Chebyshev-Halley yang menunjukkan bahwa metode Chebyshev-Halley memiliki orde konvergensi tiga atau *kubik* dengan melibatkan tiga evaluasi fungsi $f(x_n)$, $f'(x_n)$ dan $f''(x_n)$ dan memiliki indeks efesiensi $3^{1/3} \approx 1{,}442$, metode ini lebih baik dari metode Newton.