BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Estimasi Parameter

Estimasi merupakan proses yang digunakan untuk menghasilkan suatu nilai tertentu terhadap suatu parameter. Data yang digunakan untuk melakukan estimasi parameter ini merupakan suatu sampel yang pada perkembangannyaakan digunakan oleh suatu estimator untuk menghasilkan suatu nilai parameter. Estimasi parameter pada mulanya akan digunakan untuk menduga suatu populasi dari sampel. Estimasi merupakan suatu tahapan yang terpenting dalam menentukan model peluang yang tepat dari sekumpulan data.

Estimasi parameter dapat dilakukan dengan beberapa metode, diantara metode tersebut adalah Maksimum Likelihood Estimates (MLE) dan Bayesian. Maksimum Likelihood Estimate (MLE) adalah yang paling populer atau yang paling sering digunakan.

Metode Bayesian adalah metode lain yang telah sering digunakan para peneliti dalam mengestimasi parameter suatu distribusi. Metode ini sangat baik digunakan terutama bagi fungsi distibusi yang sangat rumit atau dengan kata lain parameter yang dimiliki oleh fungsi distribusi tersebut lebih dari satu parameter.

2.2 Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial merupakan suatu distribusi yang banyak digunakan dalam statistika untuk memodelkan fenomena tertentu. Pada akhir tahun 1940 peneliti telah memulai untuk menggunakan distribusi Eksponensial dalam menggambarkan pola kehidupan elektronik. Distribusi eksponensial merupakan suatu model yang digunakan untuk melakukan perkiraan atau prediksi dengan hanya membutuhkan perkiraan rata-rata populasi.

Suatu densitas peluang dikatakan distribusi eksponensial dengan parameter $x \sim \exp\,(\theta)$ jika distribusi tersebut mempunyai fungsi kepadatan peluang :

$$f(x) = \theta e^{-x\theta} \tag{2.1}$$

Teori-teori yang mengikuti fungsi kepadatan peluang tersebut diantaranya adalah distribusi fungsi rata-rata fungsi kepadatan peluang dan variansi fungsi kepadatan peluang untuk kerja teori tersebut dapat dijelaskan sebagai berikut:

2.2.1 Distribusi Fungsi Kepadatan Peluang Eksponensial

Untuk membuktikan distribusi fungsi kepadatan peluang eksponensial maka harus dibuktikan Persamaan Eksponensial yaitu :

$$f(x) = \theta e^{-x\theta}, x > 0$$

$$\int_0^\infty \theta e^{-x\theta} dx = 1$$

misalkan:

$$u = -x\theta$$

$$du = -\theta dx$$

$$dx = -\frac{1}{\theta} du$$

$$= \theta \int_0^\infty e^u - \frac{1}{\theta} du$$

$$= -\frac{\theta}{\theta} \int_0^\infty e^u du$$

$$= \left[e^u\right]_0^\infty$$

$$= -e^{\infty\theta} - (-e^{0\theta})$$

$$= -e^{\infty\theta} + e^{0\infty}$$

$$= 0 + 1$$

dari hasil diatas dapat dibuktikan bahwa fungsi kepadatan peluang eksponensial sama dengan satu.

2.2.2 Rata-rata Fungsi Kepadatan Peluang Eksponensial

Untuk menentukan rata-rata fungsi kepadatan peluang ekponensial pandang kembali Persamaan (2.1) yaitu :

$$f(x) = \theta e^{-x\theta}$$

Dengan cara mengintegralkan fungsi $f(x)$dengan dikalikan x maka didapat :

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} x\theta e^{-x\theta} dx$$

$$= \theta \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x\theta} dx$$

Misalkan :

$$u = x$$

$$du = dx$$

$$dv = e^{-x\theta} dx$$

$$v = -\frac{1}{\theta} e^{-x\infty} dx$$

$$= \theta\left[(x. -\frac{1}{\theta} e^{-x\theta})_0^\infty + (\int_0^\infty \frac{1}{\theta} e^{-x\infty} dx) \right]$$

$$= -\left[e^{-x\infty}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x\theta} dx$$

$$= 0 + \int_0^\infty e^{-x\theta} dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x\theta} dx$$

$$= -\frac{1}{\theta} e^{-x\theta} \Big]_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{\theta} e^{-\infty\theta} + \frac{1}{\theta} e^{-0\theta}$$

$$= \frac{1}{\theta} .1$$

$$= \frac{1}{\theta}$$

Dari hasil diatas diperoleh fungsi kepadatan peluang eksponensial yaitu $E(x) = \frac{1}{\theta}$.

2.2.3 Variansi Fungsi Kepadatan Peluang Eksponensial

Untuk mencari nilai variansi peneliti menggunakan rumus sebagai rumus sebgai berikut:

$$v(x) = \left[E(x^2)\right] - \left[E(x)\right]^2$$

$$E(x^2) = \int_0^\infty x^2 f(x)dx$$

$$\left[E(x)\right]^2 = \left(\frac{1}{\theta}\right)^2$$

Maka dapat diselesaikan nilai variansi untuk fungsi kepadatan eksponensial sebagai berikut:

$$v(x) = \left[E(x^2)\right] - \left[E(x)\right]^2$$

$$v(x) = \left(\int_{\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx\right) - \frac{1}{\theta^2}$$

$$v(x) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \theta e^{-x\theta} dx\right) - \frac{1}{\theta^2}$$

$$v(x) = \left(\theta \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x\theta} dx\right) - \frac{1}{\theta^2}$$

misalkan:

$$u = x^2$$

$$du = 2xdx$$

$$dv = e^{-x\theta}dx$$

$$v = -\frac{1}{\theta} e^{-x\theta} dx$$

$$=\theta\left[\left(x^2\frac{1}{\theta}e^{-x\theta}\right)_0^\infty+\left(\int_0^\infty\frac{1}{\theta}e^{-x\theta}2xdx\right)\right]-\frac{1}{\theta^2}$$

$$=\theta\left[0+\left(\frac{2}{\theta}\right)\int_0^\infty\frac{1}{\theta}e^{-x\theta}xdx\right]-\frac{1}{\theta}$$

$$=\theta\left[\left(\frac{2}{\theta}\int_0^\infty e^{-x\theta}xdx\right)\right]-\frac{1}{\theta^2}$$

$$=2\left[\left(\int_0^\infty e^{-x\theta}xdx\right)\right]-\frac{1}{\theta^2}$$

Misalkan :

$u=x$

$du=dx$

$dv=e^{-x\theta}$

$v=-\frac{1}{\theta}e^{-x\theta}dx$

$$=2\left[\left(x.-\frac{1}{\theta}e^{-x\theta}\right)_0^\infty+\left(\int_0^\infty\frac{1}{\theta}e^{-x\theta}dx\right)\right]-\frac{1}{\theta^2}$$

$$=2\left[0+\left(\frac{1}{\theta}\int_0^\infty e^{-x\theta}dx\right)\right]-\frac{1}{\theta^2}$$

$$=2\left[\left(\frac{1}{\theta}\int_0^\infty e^{-x\theta}dx\right)\right]-\frac{1}{\theta^2}$$

$$=\frac{2}{\theta}\left[\int_0^\infty e^{-x\theta}dx\right]-\frac{1}{\theta^2}$$

$$=\frac{2}{\theta}\left[-\frac{1}{\theta}e^{-x\theta}\right]_0^\infty-\frac{1}{\theta^2}$$

$$=\frac{2}{\theta}\left(-\frac{1}{\theta}e^{-\infty\theta}+\frac{1}{\theta}e^{-0\theta}\right)-\frac{1}{\theta^2}$$

$$=\frac{2}{\theta}\left(0+\frac{1}{\theta}.1\right)-\frac{1}{\theta^2}$$

$$= \frac{2}{\theta}\left(\frac{1}{\theta}\right) - \frac{1}{\theta^2}$$

$$= \left(\frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\theta^2}$$

dari hasil diatas diperoleh nilai variansi untuk fungsi kepadatan eksponensial yaitu: $v(x) = \frac{1}{\theta^2}$.

2.3 Distribusi Gamma

Menurut Hogg dan Tanis distribusi gamma merupakan salah satu dari keluarga distribusi eksponensial. Peubah acak θ dikatakan berdistribusi gamma dan parameter β dan α jika dan hanya jika fungsi kepadatan densitasnya berbentuk :

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \tag{2.2}$$

Fungsi densitas kepadatan peluang tersebut dapat digunakan dalam suatu penelitian. Teori-teori yang mengikuti fungsi kepadatan peluang tersebut diantaranya distribusi fungsi, rata-rata fungsi kepadatan peluang dan varians fungsi kepadatan peluang. Untuk kerja teori dapat dijelaskan sebagai berikut;

2.3.1 Distribusi Fungsi Kepadatan Peluang Gamma

Untuk membuktikan distribusi fungsi kepadatan peluang gamma maka harus dibuktikan Persamaan Gamma yaitu :

$$f(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1} e^{-\frac{\theta}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} d\theta, 0 < \theta < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta) d\theta = 1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta^{\alpha-1} e^{-\frac{\theta}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta^{\alpha-1} e^{-\frac{\theta}{\beta}}}{\beta^{\alpha}} d\theta$$

misalkan:

$$x = \frac{\theta}{\beta}$$

$$\theta = x\beta$$

$$d\theta = \beta dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x\beta)^{\alpha-1} e^{-\frac{\theta}{\beta}}}{\beta^{\alpha}} \beta dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} \beta^{\alpha-1} e^{-x}}{\beta^{\alpha-1}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha)$$

$$= 1$$

dari hasil di atas dapat dibuktikan fungsi kepadatan peluang Gamma sama dengan satu (1).

2.3.2 Rata-rata Fungsi Kepadatan Peluang Gamma

Dicari rata-rata fungsi kepadatan peluang gamma dengan fungsi sebagai berikut:

$$E(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta f(\theta) d\theta$$

$$E(\theta) = \int_{0}^{\infty} \theta . \frac{\theta^{\alpha-1} e^{-\frac{\theta}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} d\theta$$

$$E(\theta)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\int_{0}^{\infty}\theta^{\alpha}e^{-\frac{\theta}{\beta}}d\theta$$

$$E(\theta)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\cdot\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}$$

$$E(\theta)=\frac{\alpha\Gamma(\alpha)\cdot\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}$$

$E(\theta)=\alpha\beta$

Dari hasil diatas diperoleh rata-rata fungsi kepadatan gamma yaitu :

$E(\theta)=\alpha\beta$

2.3.3 Variansi Fungsi Kepadatan Peluang Gamma

Untuk mencari nilai variasi fungsi kepadatan peluang gamma peneliti menggunakan rumus sebagai berikut:

$V(\theta) = [E(\theta^2)] - [E(\theta)]^2$

Dan

$$[E(\theta^2)] = \int_0^\infty \theta^2 f(\theta)d\theta$$

$[E(\theta)]^2 = (\alpha\beta)^2$

Maka dapat diselesaikan nilai variansi fungsi kepadatan peluang gamma adalah

$V(\theta) = [E(\theta^2)] - [E(\theta)]^2$

$$V(\theta)=\left(\int_{0}^{\infty}\theta^{2} f(\theta)d\theta\right)-(\alpha\beta)^{2}$$

$$V(\theta)=\left(\int_{0}^{\infty}\theta^{2}\cdot\frac{\theta^{\alpha-1}e^{-\frac{\theta}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}d\theta\right)-(\alpha\beta)^{2}$$

$$V(\theta)=\left(\int_{0}^{\infty}\frac{\theta^{\alpha+1}e^{-\frac{\theta}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}d\theta\right)-(\alpha\beta)^{2}$$

$$V(\theta)=\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{\infty}\frac{\theta^{\alpha+1}e^{-\frac{\theta}{\beta}}}{\beta^{\alpha}}d\theta\right)-(\alpha\beta)^2$$

$$V(\theta)=\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha+2)\beta^{\alpha+2}}{\beta^{\alpha}}\right)$$

$$V(\theta)=\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\alpha+1.\Gamma(\alpha+1).\beta^2\right)$$

$$V(\theta)=\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\cdot\alpha+1\cdot\alpha\Gamma(\alpha)\cdot\beta^2\right)$$

$$V(\theta)=(\alpha+1)\cdot\alpha\beta^2$$

$$V(\theta)=(\alpha^2+\alpha)\beta^2$$

$$V(\theta)=[E(\theta^2)]-[E(\theta)]^2$$

$$V(\theta)=(\alpha^2+\alpha)\cdot\beta^2-(\alpha\beta)^2$$

$$V(\theta)=\alpha^2\beta^2\alpha\beta^2-(\alpha\beta)^2$$

$$V(\theta)=\alpha\beta^2$$

Dari hasil diatas diperoleh variansi fungsi kepadatan peluang gamma yaitu:
$V(\theta) = \alpha\beta^2$.

2.4 Fungsi *Like-Lihood*

Sebelum menentukan estimasi maksimum *like-lihood* dari distribusi eksponensial, yang harus ditentukan terlebih dahulu adalah fungsi *like-lihood* dari distribusi eksponensial.

Misal $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah sampel yang diambil dari variabel acak yang saling bebas yaitu $f(\ x_1x_2, \dots., x_n\ ; \theta\ )$ pada titik $x_1, x_2, \dots, x_n$ maka fungsi kepadatan peluang bersamanya adalah

$$f(x_1x_2, \dots., x_n|\ \theta\ ) = f(x_1;\theta)\ f(x_2;\theta) \dots\ f(x_n;\theta)$$

karena $f(x,\theta) = \ \theta e^{-x\theta}$ maka;

$$L(\theta|\underline{x}) = f(x_1;\theta)\ \times\ f(x_2;\theta)\ \times \dots \times\ f(x_n;\theta)$$

$$L(\theta|\underline{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

$$L(\theta|\underline{x}) = \theta\, e^{-x_1\theta} \times \theta\, e^{-x_2\theta} \times \ldots \times \theta\, e^{-x_n\theta}$$

$$L(\theta|\underline{x}) = \theta^n e^{-\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Karena $L(\theta|\underline{x}) = f(\,x_1 x_2, \ldots., x_n\,; \theta\,)$ maka fungsi like-lihood dari distribusi eksponensial adalah:

$$L(\theta|\underline{x}) = \theta^n e^{-\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i \tag{2.3}$$

2.5 Metode Bayesian

Dalam pendekatan klasik, parameter θ adalah besaran tetap yang tidak diketahui. Sampel random $x_{1,\ldots,}x_n$ diambil dari populasi berindeks θ. Dalam pendekatan Bayesian parameter θ dipandang sebagai variabel yang menggambarkan informasi awal tentang parameter sebelum pengamatan dilakukan dan dinyatakan dalam suatu distribusi yang disebut dengan distribusi prior. Sedangkan penentuan parameter dsitribusi prior dalam penelitian ini telah ditetapkan menggunakan distribusi gamma, selanjutnya diperoleh informasi posterior (distribusi posterior) yang merupakan gabungan dari dari dua sumber informasi mengenai parameter statistik yaitu *like-lihood* dari distribusi sampel dan informasi awal (distribusi prior). Hasil yang dinyatakan dalam distribusi posterior yang kemudian menjadi dasar dalam metode bayesian.

Penjelasan dan tentang distribusi prior dan distribusi posterior adalah sebagai berikut:

2.5.1 Distribusi Prior

Dalam analisis bayesian, ketika suatu populasi mengikuti distribusi tertentu dengan suatu parameter θ, maka dimungkinkan bahwa parameter θ mengikuti suatu distribusi peluang tertentu yang dikenal sebagai distribusi prior.

Dalam kasus ini, distribusi gamma ditetapkan sebagai distribusi prior sekawan untuk distribusi eksponensial dengan parameter θ dimana $0 < \theta < \infty$. Distribusi eksponensial adalah salah satu kasus khusus dari distribusi gamma. Fungsi gamma didefinisikan sebagai berikut:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \theta^{\alpha-1} e^{-\theta} d\theta$$

Permasalahan selanjutnya yang muncul adalah penentuan parameter α danβ untuk distibusi gamma (α, β) yang digunakan sebagai distribusi prior. Penentuan parameter α dan β untuk distribusi gamma (α, β) ini dapat diselesaikan dengan mencocokan anatar mean dan varian distibusi gamma dengan mean dan varian distribusi eksponensial.

Mean dan varian distribusi eksponensial masing-masing diberikan oleh:

$E(x) = \frac{1}{\theta}$ dan $V(x) = \frac{1}{\theta^2}$

Mean dan varian distribusi gamma masing-masing diberikan oleh:

$E(x) = \alpha\beta$ dan $V(x) = \alpha\beta^2$

Jika diketahui nilai $\overline{x}$ maka dengan mencocokan antara mean dan varian distribusi gamma dengan mean dan varian distirbusi eksponensial diperoleh nilai $\alpha = 1$ dan $\beta = \frac{1}{\overline{x}}$.

2.5.2 Distribusi Posterior

Dalam estimasi Bayes, setelah informasi sampel diambil dan prior telah ditentukan. maka distribusi posteriornya dicari dengan mengalikan priornya dengan informasi sampel yang diperoleh dari likelihoodnya, di mana prior ini independen:

$$f(\theta; x_i) = \frac{f(\theta)\, f(x_i;\theta)}{\int_0^\infty f(\theta)\, f(x_i;\theta) d\theta} \tag{2.4}$$

Fungsi kepadatan $f(\theta; x_i)$ menunjukan distribusi posterior, $f(\theta)$ menunjukan distribusi prior dan fungsi $f(x_i; \theta)$ menunjukan fungsi likelihood.

2.6 Estimasi Bayesian Melalui Pendekatan *Loss Function*

Dalam statistik maupun teori keputusan, fungsi kerugian yang dikenal sebagai *lossfunction* adalah fungsi yang memetakan sebuah peristiwa ke suatu bilangan real. Padaumumnya, *loss function* ini digunakan dalam estimasi parameter karena dapat dikatakanbahwa peluang suatu penaksiran titik untuk tepat sekali sangat kecil, sehingga karena ketidakakurasian sebuah estimasi dalam menaksir tersebut digunakanlah *loss function.*

Estimasi parameter yang digunakan dalam kasus ini menggunakan *symmetric loss function* ialah *squared error loss function (SELF)* dan *general error loss function(GELF).*

2.6.1 Estimasi Bayesian Melalui Pendekatan Squared Error Loss Function(SELF)

Estimasi parameter yang digunakan dalam kasus ini menggunakan *symmetric loss function* yang dikenal sebagai SELF atau *squared error loss function*, dimana *loss function* untuk SELF diberikan sebagai berikut:

$$L(\theta,\delta) = (\delta-\theta)^2$$

untuk $0 < \theta < \infty$. Dimana δ merupakan estimator bayesian untuk pendekatan SELF.

Estimator bayesian dari θ pada distirbusi eksponensial dengan menggunakan pendekatan *squared error loss function* diperoleh dengan meminimumkam ekspetasi *loos function* yang diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{d}{d\delta} = (E[L(\theta,\delta)]) = 0$$

sehingga estomator bayesian untuk θ dengan pendekatan SELF adalah:

$$\theta_s = E(\theta) \tag{2.5}$$

2.6.2 Estimasi Bayesian Distribusi Eksponensial Melalui Pendekatan *General Error Loss Function* (GELF)

Estimasi parameter yang digunakan dalam kasus ini menggunakan *symmetric loss function* yang dikenal sebagai GELF atau *general error loss function*, dimana *loss function* untuk GELF diberikan sebagai berikut:

$$L(\theta,\delta) = \left(\frac{y}{\theta}\right)^{\alpha_1} - \alpha_1\, ln\left(\frac{y}{\theta}\right) - 1\text{ , untuk } \alpha_1 \neq 0$$

dimana y merupakan estimator bayesian untuk θ dengan pendekatan GELF.

Estimator bayesian dari θ pada distirbusi eksponensial dengan menggunakan pendekatan *general error loss function* diperoleh dengan meminimumkam ekspetasi *loos function* yang diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{d}{dy} = (E[L(\theta, y)]) = 0$$

sehingga estimator bayesian untuk θ dengan pendekatan (GELF) adalah:

$$\theta_G = E[(\theta^{-\alpha_1}]^{\frac{1}{\alpha_1}} \tag{2.6}$$

2.7 Uji Kelayakan AIC (*Akaike Information Criterion)*

Pemodelan statistik yang melakukan perbandingan terhadap beberapa model, biasanya diikuti dengan uji kebaikan model. Hal ini dilakukan untuk memastikan salah satu model yang baik. Beberapa uji kebaikan seperti uji *Kolmogorov Smirnov*, MSE (*Mean Square Error*) dan nilai AIC (*Akaike Information Criterion)* telah digunakan untuk perbandingan ini. Pada penelitian ini, akan digunakan nilai AIC (*Akaike Information Criterion)* untuk mendapatkan metode yang terbaik dalam mengestimasi parameter distribusi eksponensial.

Nilai AIC bargantung kepada nilai log fungsi likelihood sutau fungsi kepadatan peluang. Nilai AIC yang terkecil dapat dijadikan sebagai pedoman untuk menentukan metode yang terbaik dalam mengetsimasi parameter. Nilai AIC dapat ditentukan dengan rumus :

$$AIC = -2L + 2P$$

dengan L menunjukan log likelihood dan P jumlah parameter.