BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Model Persediaan Barang yang Mengalami Peningkatan

Model ini di dasarkan pada sistem persediaan yang mengalami peningkatan. Di bawah ini di berikan notasi yang akan di gunakan untuk menggambarkan sistem dinamik dari persediaan barang yang mengalami peningkatan :

$I(t)$: fungsi tingkat persediaan,
$P(t)$: fungsi tingkat rata-rata produksi,
$I_0(\mathrm{t})$: tingat persediaan awal,
$\theta(t)$: fungsi tingkat rata-rata penurunan,
$m(t)$: fungsi tingkat rata-rata peningkatan,

Di definisikan fungsi persamaan diferensial untuk model peningkatan barang sebagai berikut :

$$\dot{I}(t) = P(t) + v(t) \cdot I(t), \ t \in [0, \infty) \tag{2.1}$$

dengan $v(t) = m(t) - \theta(t)$. Untuk menjamin bahwa tingkat persediaan meningkat dari waktu 0 hingga tak hingga, maka

$$P(t) + v(t).I(t) > 0, t \in [0, \infty) \tag{2.2}$$

Fungsi tujuan dari model persediaan barang yang mengalami peningkatan sebagai berikut :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left\{h\left[I(t) - \hat{I}\right]^2 + K\left[P(t) - \hat{P}\right]^2\right\} dt \tag{2.3}$$

dengan :

h : biaya penyimpanan,

K : biaya Produksi,

$\hat{I}$: tingkat persediaan tujuan,

$\hat{P}$: tingkat produksi tujuan,

Persamaan (2.1) dan (2.2) merupakan batasan non negatif,

$$P(t) \geq 0, t \in [0, \infty) \tag{2.4}$$

2.2 Kendali Optimal Waktu Kontinu

Pada bagian ini, dibahas mengenai kendali optimal untuk waktu kontinu. Pembahasan dimulai dari masalah umum kendali optimal waktu kontinu, yang dilanjutkan masalah untuk kendali lingkar terbuka untuk waktu tak berhingga

2.2.1 Masalah Umum Kendali Optimal Waktu Kontinu

Pada bagian ini dibahas masalah umum kendali optimal waktu kontinu untuk persamaan diferensial dinamik untuk waktu t.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \tag{2.5}$$

dengan $\boldsymbol{x}(t) \epsilon \mathbb{R}^n$ merupakan vektor *state* internal dan $\boldsymbol{u}(t) \epsilon \mathbb{R}^m$ merupakan vektor kendali input, dan diberikan fungsi tujuan yang meminimalkan fungsi objektif, dengan persamaan sebagai berikut :

$$J(t_0) = \phi\big(\boldsymbol{x}(T_f), T_f\big) + \int_{t_0}^{T_f} L\,(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)\; dt \tag{2.6}$$

dengan t_0 adalah waktu awal dan T_f adalah waktu akhir.

Selanjutnya, untuk mencari solusi masalah kendali optimal waktu kontinu maka didefinisikan persamaan-persamaan berikut yang diperlukan untuk sebuah proses meminimalkan fungsi ojektif.

Persamaan Hamilton: $H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) = L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t).$ (2.7)

Persamaan *state* : $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)(t), \quad t \geq t_0.$ (2.8)

Persamaan *kostate* : $-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial f^T}{\partial x} \boldsymbol{\lambda}(t) + \frac{\partial L(x, \boldsymbol{u}, t)}{\partial x}(t), \; t \leq T_f.$ (2.9)

Kondisi *stasionary* : $0 = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial L(x, \boldsymbol{u}, t)}{\partial \boldsymbol{u}}(t) + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{u}} \boldsymbol{\lambda}(t).$ (2.10)

2.2.2 Kendali Optimal Linier Kuadratik untuk Waktu Kontinu Satu Kendali

Pada bagian ini dibahas masalah kendali lingkar terbuka linier kuadratik, didefinisikan persamaan sistem linier untuk waktu t yaitu :

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \tag{2.11}$$

dengan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B_i \in \mathbb{R}^{n\times m}, \boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ dan kendali $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$,dan meminimalkan fungsi objektif yaitu :

$$J(t_0) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(T_f)S(T_f)\boldsymbol{x}(T_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T_f} (\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u})dt, \tag{2.12}$$

dengan t_0 waktu awal dan T_f waktu akhir.

Diasumsikan Q dan $S(T_f)$ semi definit positif $(Q \geq 0, S(T_f) \geq 0)$ selanjutnya Q dan $S(T_f)$ memiliki nilai eigen nonnegatif sehingga $\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{x}^T(T_f)S(T_f)\boldsymbol{x}(T_f)$ bernilai nonnegatif untuk setiap $\boldsymbol{x}(t)$. Diasumsikan juga R adalah definit positif $R > 0$ sehingga R memiliki nilai eigen positif sehingga $\boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u} > 0$ untuk setiap $\boldsymbol{u}(t) \neq 0$. Selanjutnya dibahas algoritma untuk menentukan persamaan aljabar Riccati sekaligus vektor kendali yang diperlukan untuk meninimalkan fungsi tujuan. Berdasarkan Persamaan $(2.7) - (2.10)$ diperoleh persamaan-persamaan sebagai berikut :

Persamaan Hamilton: $H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T(A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}).$ (2.13)

Persamaan *state* : $\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}.$ (2.14)

Persamaan *kostate* : $-\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\partial H}{\partial x} = Q\boldsymbol{x} + A^T\boldsymbol{\lambda}.$ (2.15)

kondisi *stasionary* : $0 = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = R\boldsymbol{u} + B^T\boldsymbol{\lambda}.$ (2.16)

Berdasarkan Persamaan (2.16) diperoleh $\boldsymbol{u}(t) = -R^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}(t).$ (2.17)

Selanjutnya Persamaan (2.17) disubstitusikan ke Persamaan (2.14) maka diperoleh yaitu :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} - BR^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}. \tag{2.18}$$

Dengan mengambil Persamaan (2.18) dan Persamaan (2.15) maka dapat dibuat sistem homogen Hamilton yaitu :

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}, \tag{2.19}$$

dengan matriks koefesien disebut matriks Hamiltonian. Diketahui t_0 dan $\boldsymbol{x}(t_0)$, waktu akhir T_f diketahui, state akhir $\boldsymbol{x}(T_f)$ bergantung kepada T_f sehingga $d\boldsymbol{x}(t_f)$ tidak nol, maka kondisi akhir yaitu :

$$\boldsymbol{\lambda}(T_f) = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{x}} \Big|_{T_f} = S(T_f)\boldsymbol{x}(T_f), \tag{2.20}$$

untuk mencari kendali optimal, maka akan diselesaikan masalah dua titik batas.

Diamsumsikan $\boldsymbol{x}(t)$ dan $\boldsymbol{\lambda}(t)$ memenuhi Persamaan (2.20) untuk setiap interval $[t_0, T_f]$ sehingga :

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = S(t)\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \tag{2.21}$$

dengan $S(T_f)$ adalah matriks $n \times n$. Selanjutnya diferensialkan Persamaan (2.21) didapat $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{S}\boldsymbol{x} + S\dot{\boldsymbol{x}}$. Kemudian dari Persamaan (2.18) diperoleh :

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{S}\boldsymbol{x} + S\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{S}\boldsymbol{x} + S(A\boldsymbol{x} - BR^{-1}B^T S\boldsymbol{x}). \tag{2.22}$$

Dari Persamaan (2.15) didapat $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = Q\boldsymbol{x} + A^T\boldsymbol{\lambda} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -Q\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{\lambda}$. Selanjutnya, disubtitusikan Persamaan (2.22) ke $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -Q\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{\lambda}$, diperoleh :

$$-Q\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{\lambda} = \dot{S}\boldsymbol{x} + S(A\boldsymbol{x} - BR^{-1}B^T S\boldsymbol{x})$$

$$-Q\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{\lambda} = \dot{S}\boldsymbol{x} + SA\boldsymbol{x} - SBR^{-1}B^T S\boldsymbol{x}$$

$$-\dot{S}\boldsymbol{x} = SA\boldsymbol{x} - SBR^{-1}B^T S\boldsymbol{x} + Q\boldsymbol{x} + A^T\boldsymbol{\lambda}, \text{ dimana: } \boldsymbol{\lambda} = S\boldsymbol{x}$$

$$-\dot{S}\boldsymbol{x} = SA\boldsymbol{x} - SBR^{-1}B^T S\boldsymbol{x} + Q\boldsymbol{x} + A^T S\boldsymbol{x}$$

$$-\dot{S}\boldsymbol{x} = (A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q)\boldsymbol{x}.$$

$$-\dot{S} = A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q$$

$$\dot{S} = -A^T S - SA + SBR^{-1}B^T S - Q. \tag{2.23}$$

Karena Persamaan (2.23) memenuhi untuk setiap waktu t.

Selanjutnya untuk $T_f \to \infty$ maka Persamaan (2.23) diperoleh

$$0 = A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q. \tag{2.24}$$

Jika Persamaan (2.17) memiliki solusi S, maka di peroleh kendali optimal sebagai berikut :

$$\boldsymbol{u}^{*} = -R^{-1}B^{T}S\boldsymbol{x}. \tag{2.25}$$

2.2.3 Kedali Optimal Linear Kuadratik untuk Waktu Kontinu Satu Kendali untuk Kasus Skalar

Di ketahui Persamaan (2.11) dan Persamaan (2.12) persamaan ini di ubah ke bentuk skalar dengan mensubstitusikan $A = a, B = b, Q = q$ dan $R = r \in R$ maka di dapatkan

$$\dot{x} = ax + bu \tag{2.26}$$

dari Persamaan (2.12) maka di dapatkan

$$J = \frac{1}{2}\int_{0}^{\sim}(x^2 q + u^2 r)\, dt \tag{2.27}$$

dari Persamaan (2.24) maka di peroleh Persamaan Aljabar Riccati

$$\frac{b^2}{r}s^2 - 2as - q = 0 \tag{2.28}$$

dari Persamaan (2.28) maka terdapat 3 kasus yang berbeda yaitu :

1. Kasus $D = 0$

   Maka solusi Persamaan Aljabar Riccati (2.28) sebagai berikut

   $$S_{1,2} = \frac{ar}{b^2}$$

   Sehingga fungsi kendali yang optimal dapat di peroleh.

2. Kasus $D < 0$

   Maka solusi Persamaan Aljabar Riccati (2.28) tidak memiliki solusi.

3. Kasus $D > 0$

   Maka solusi Persamaan Aljabar Riccati (2.28) sebagai berikut

   $$S_1 = \frac{2a+\sqrt{D}}{\frac{2b^2}{r}} \quad \text{dan} \quad S_2 = \frac{2a-\sqrt{D}}{\frac{2b^2}{r}}$$

   Sehingga fungsi kendali yang optimal dapat di peroleh dan berbeda.

2.3 Bentuk Kuadratik

Pada bagian ini dijelaskan bentuk kuadratik yaitu :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} \tag{2.29}$$

dengan entri matriks A adalah $c_{ij} = c_{ji}$ untuk semua i dan j kemudian untuk $\boldsymbol{x}^T = [x_1, x_2, \dots x_n]$ maka persamaan (2.29) dapat diuraikan menjadi :

$$f(x) = c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + \cdots + c_{(n-1)n}x_{n-1}x_1 + c_{nn}x_n^2$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_ix_j = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} \tag{2.30}$$

Persamaan (2.29) disebut bentuk kuadratik dengan n banyak variabel $x_1, x_2, \dots x_n$ dengan $i = j, j = n$ dan $c_{ij} \epsilon \mathbb{R}$. Menurut (**Lewis, 1995**) sifat definit dari persamaan kuadratik (2.29) dapat diperoleh dengan menghitung nilai eigen dari matriks A. Jika A matriks simetri berukuran n x n dan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ merupakan nilai eigen dari matriks A maka bentuk kudratik $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ memenuhi :

1. Definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i > 0$ untuk semua *i*
2. Semi definit positif jika dan hanya jika $\lambda_i \geq 0$ untuk semua *i*
3. Definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i < 0$ untuk semua *i*
4. Semi definit negatif jika dan hanya jika $\lambda_i \leq 0$ untuk semua *i*.

Selanjutnya untuk melengkapi pembahasan pada bagian ini, diberikan contoh sebagai berikut:

Contoh 2.1:

Bentuklah persamaan $\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} -4x_ix_j$ ke bentuk kuadratik dan tentukan sifat definit dari matriks A.

Penyelesaian:

Bentuk kuadratik sebagai berikut

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} -4x_ix_j \\ &= -4x_1x_1 - 4x_1x_2 - 4x_2x_1 - 4x_2x_2 \\ &= -4{x_1}^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_1 - 4{x_2}^2 \\ &= -4{x_1}^2 - 8x_1x_2 - 4{x_2}^2\end{aligned}$$

$$= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk sifat definit di dapatkan sebagai berikut

Dari matriks $A = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$ didapat nilai eigennya:

$$\text{Det } (\lambda I - A) = 0$$

$$\text{Det } \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\lambda^2 + 8\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -8$$

Jadi, dari nilai eigen dapat disimpulkan bahwa bentuk kuadratik diatas memiliki sifat semi definit negatif.

Contoh 2.2:

Bentuklah persamaan $\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \ 4x_i x_j$ ke bentuk kuadratik dan tentukan sifat definit dari matriks A.

Penyelesaian:

Bentuk kuadratik sebagai berikut

$$\boldsymbol{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \ 4x_i x_j$$

$$= 4x_1x_1 + 4x_1x_2 + 4x_2x_1 + 4x_2x_2$$

$$= 4{x_1}^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_1 + 4{x_2}^2$$

$$= 4{x_1}^2 + 8x_1x_2 + 4{x_2}^2$$

$$= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya untuk sifat definit di dapatkan sebagai berikut

Dari matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ didapat nilai eigennya:

$$\text{Det } (\lambda I - A) = 0$$

$$\text{Det } \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\lambda^2 - 8\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 8$$

Jadi, dari nilai eigen dapat disimpulkan bahwa bentuk kuadratik diatas memiliki sifat semi definit positif.

2.4 Kestabilan

Sebelum membahas tentang kestabilan, terlebih dahulu dibahas tentang ekuilibrium berdasarkan definisi yang diberikan sebagai berikut :

Definisi 2.4.2 (Olsder, 1994) diberikan persamaan diferensial orde 1 yaitu $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dengan nilai awal$(0) = \boldsymbol{x}_0$, sebuah vektor $\overline{\boldsymbol{x}}$ yang memenuhi $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0$ disebut titik ekuilibrium.

Dari definisi di atas maka diberi contoh sebagai berikut:

Contoh 2.3 :

Tentukan titik ekuilibrium dari persamaan berikut :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = x$$

Penyelesaian :

Diketahui

$$\dot{\boldsymbol{x}} = x$$

maka diperoleh titik ekuilibriumnya :

$$\overline{\boldsymbol{x}} = 0$$

Definisi titik ekuilibrium di atas diberikan dengan tujuan untuk memudahkan dalam memahami pengertian dari kestabilan, diberikan definisi tentang kestabilan sebagai berikut :

Definisi 2.4.3(Olsder, 1994) Titik ekuilibrium $\overline{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil jika $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ sehingga $\|\boldsymbol{x}_0 - \overline{\boldsymbol{x}}\| < \delta$ maka $\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \overline{\boldsymbol{x}}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$. Titik ekuilibrium $\overline{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil asimtotik jika $\overline{\boldsymbol{x}}$ merupakan titik stabil dan $\exists\, \delta > 0$ sehingga $lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \overline{\boldsymbol{x}}\| = 0$ memenuhi $\|\boldsymbol{x}_0 - \overline{\boldsymbol{x}}\| < \delta$. Titik ekuilibirium $\overline{\boldsymbol{x}}$ tak stabil jika $\overline{\boldsymbol{x}}$ tidak stabil.

Untuk lebih memahami definisi di atas, maka diberikan beberapa contoh berikut :

Contoh 2.4 :

Tentukan kestabilan dari persamaan differensial berikut $\dot{x} = -x$ dengan diperoleh titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$

Penyelesaian :

Sebelum di analisa kestabilan, maka diberi solusi sebagai berikut

$$\dot{x} = -x$$

$$\frac{dx}{dt} = -x$$

$$\frac{dx}{x} = -dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int -dt$$

$$\ln x = -t + c$$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

Sehingga :

$$\ln x - c = -t$$

$$\ln x - \ln x_0 = -t$$

$$\ln \frac{x}{x_0} = -t$$

$$\frac{x}{x_0} = e^{-t}$$

$$x = x_0 e^{-t}$$

Sehingga $t \to \infty$ maka $x \to 0$ dapat disimpulkan bahwa $\dot{x} = -x$ stabil karena solusinya menuju 0.

Contoh 2.5 :

Tentukan kestabilan dari persamaan differensial :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Matriks di atas dapat dijabarkan sebagai berikut :

$\dot{x}_1 = -4x_1$ dan $\dot{x}_2 = -2x_2$

sehingga dapat dicari solusi untuk masing-masing yaitu :

untuk $\dot{x}_1 = -4x_1$,

$$\frac{dx_1}{dt} = -4x_1$$

$$\int \frac{dx_1}{x_1} = \int -4dt$$

$$\ln x_1 = -4t + c$$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

diperoleh :

$$\ln x_1 - c = -4t$$

$$\ln x_1 - \ln x_0 = -4t$$

$$x_1 = x_0 e^{-4t}$$

Jadi, untuk $t \to \infty$ maka $x_1 \to 0$ dapat disimpulkan bahwa $\boldsymbol{x_1}$ stabil karena solusinya menuju 0.

Berikutnya solusi untuk $\dot{x}_2 = -2x_2$,

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2$$

$$\int \frac{dx_2}{x_2} = \int -2dt$$

$$\ln x_2 = -2t + c$$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

diperoleh

$$\ln x_2 - c = -2t$$

$$\ln x_2 - \ln x_0 = -2t$$

$$x_2 = x_0 e^{-2t}$$

jika $t \to \infty$ maka $x_2 \to 0$ dapat disimpulkan bahwa x_2 stabil karena solusinya menuju 0. Dari kedua solusi tersebut dapat disimpulkan bahwa $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ stabil karena kedua solusi menuju 0.