BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab II ini penulis akan menjelaskan beberapa teori yang berkaitan tentang matriks dan jenis-jenis matriks, perkalian matriks, *trace* matriks, serta beberapa definisi dan teorema yang akan dibahas pada bab selanjutnya.

2.1 Matriks dan Jenis-jenis Matriks

Pada sub bab ini menjelaskan tentang pengertian matriks dan jenis-jenis matriks. Adapun pengertian dari suatu matriks dijelaskan sebagai berikut :

Definisi 2.1 (Anton, 2004) Suatu matriks *(matrix)* adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks.

Sebuah matriks dinotasikan dengan huruf besar seperti $A, B, X,$ atau Z dan lain sebagainya. Matriks dengan m baris dan n kolom disebut matriks $m \times n$. Misalkan m dan n adalah bilangan bulat positif, dinyatakan :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Berikut ini terdapat beberapa jenis matriks, diantaranya adalah :

1. Matriks Bujursangkar

   Matriks bujursangkar adalah matriks yang banyak baris dan banyak kolomnya sama. Dengan kata lain matriks tersebut berordo $n \times n$.

2. Matriks Nol

   Matriks nol adalah sebuah matriks yang seluruh elemen penyusunnya merupakan bilangan nol. Matriks nol dilambangkan dengan 0.

3. Matriks Identitas

   Matriks identitas adalah matriks diagonal yang elemen-elemen diagonal utama bernilai satu. Matriks identitas disimbolkan dengan $\boldsymbol{I}$.

4. Matriks Diagonal

   Matriks diagonal adalah matriks bujursangkar yang semua elemen-elemen penyusun selain diagonal utamanya bernilai nol.

5. Matriks Segitiga

   Matriks bujursangkar yang semua entri diatas diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga bawah (*lower triangular*) dan matriks bujursangkar yang semua entri dibawah diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga atas (*upper triangular*).

   a) Matriks segitiga bawah (*lower triangular*)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

   b) Matriks segitiga atas (*upper triangular*)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

6. Matriks Simetris

   Matriks simetris adalah matriks bujur sangkar yang sama dengan transposenya yaitu $A = A^T$ dimana $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua nilai dari i dan j. Bentuk matriks simetris untuk ordo 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

2.2 Perkalian Matriks

Perkalian matriks dilakukan untuk mengetahui *trace* matriks yang akan dihitung dengan cara mengalikan matriks sebanyak pangkat yang diinginkan.

Berikut diberikan beberapa definisi dan teorema yang berhubungan dengan perkalian matriks.

a. Perkalian Matriks dengan Skalar

Definisi 2.2 (Aryani dkk, 2016) Jika A adalah suatu matriks dan c adalah suatu skalar, maka hasil kali (*product*) cA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-masing entri A oleh c.

Jika c adalah suatu bilangan skalar dan $A = a_{ij}$ maka matriks $cA = (ca_{ij})$ yaitu suatu matriks cA yang diperoleh dengan mengalikan semua elemen matriks A dengan c. Mengalikan matriks dengan skalar dapat dituliskan didepan atau dibelakang matriks. Misalnya $[C] = c[A] = [A]c$

Contoh 2.1 Diberikan $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, tentukan hasil dari $2A$!

Penyelesaian :

Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Maka $2A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix}$.

b. Perkalian Matriks dengan Matriks

Definisi 2.3(Aryani dkk, 2016) Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut: untuk mencari entri dalam baris i dan kolom j dari AB, pilihlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikanlah entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil kali yang dihasilkan.

Contoh 2.2 Diberikan $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, tentukan $A \times B$!

Penyelesaian :

Jika $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

maka $A \times B = \begin{bmatrix} 28 & 29 & 32 \\ 31 & 24 & 25 \\ 25 & 34 & 39 \end{bmatrix}$.

Teorema berikut merupakan sifat-sifat yang berhubungan dengan Definisi 2.2.

Teorema 2.1 (Larson, 2013) Jika A, B dan C adalah matriks dan c adalah skalar, maka sifat berikut ini benar.

a) $(AB)C = A(BC)$, (hukum asosiatif pada perkalian matriks)

b) $A(B + C) = AB + AC$, (hukum distributif kiri)

c) $(A + B)C = AC + BC$, (hukum distributif kanan)

d) $c(AB) = (cA)B = A(cB)$.

Definisi 2.4 (Anton, 2004) Jika A adalah matriks bujursangkar, maka definisi dari pangkat integer taknegatif dari A adalah

$$A^0 = I, A^n = \underbrace{AA \dots A}_{n \text{ faktor}} \ (n > 0)$$

Selanjutnya, jika A dapat dibalik, maka definisi dari pangkat integer negatif dari A adalah :

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{n \text{ faktor}}$$

Teorema berikut merupakan sifat-sifat yang berhubungan dengan Definisi 2.4.

Teorema 2.2 (Anton, 2004) Jika A adalah matriks bujursangkar dan r dan s adalah integer-integer, maka :

$$A^r A^s = A^{r+s}, \quad (A^r)^s = A^{rs}$$

2.3 Determinan Matriks dan Invers Matriks

a. Determinan Matriks

Definisi 2.5 (Anton, 2004) Suatu hasil kali elementer (*elementary product*) dari suatu matriks A, $n \times n$, adalah hasil kali dari n entri dari A, yang tidak satu pun berasa dari entri yang sama.

Contoh 2.3

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ tentukan determinan dari matriks A !

Penyelesaian :

Jika matriks $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

maka $det(A) = |A| = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = (aei + bgf + cdh) - (ceg + afh + bdi)$.

Selanjutnya akan diberikan pembahasan mengenai ekspansi kofaktor.

b. Ekspansi Kofaktor

Definisi 2.6 (Anton, 2004) Determinan matriks A, $n \times n$, dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasil kali- hasil kali yang diperoleh; dimana untuk setiap $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq n$, maka

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j)

dan

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j)

Contoh 2.4

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ hitunglah $\det(A)$ dengan menggunakan ekspansi kofaktor baris pertama dari A !

Penyelesaian :

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3(-4) - (1)(-11) + 0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

c. Invers Matriks

Definisi 2.7 (Anton, 2004) Jika A adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat dibaik (*invertible*) dan B disebut sebagai invers (*inverse*) dari A.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Contoh 2.5

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ hitunglah invers dari A !

Penyelesaian :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

$$= \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{12}{64} & \frac{4}{64} & \frac{12}{64} \\ \frac{6}{64} & \frac{2}{64} & -\frac{10}{64} \\ -\frac{16}{64} & \frac{16}{64} & \frac{16}{64} \end{bmatrix}.$$

2.4 *Trace* Matriks

Definisi 2.7 (Anton, 2004) Jika A adalah matriks bujursangkar, maka *trace* dari A (*trace of A*), yang dinyatakan sebagai $tr(A)$, didefinisikan sebagai jumlah entri-entri pada diagonal utama A. *Trace* dari A tidak dapat didefinisikan jika A bukan matriks bujursangkar.

Berikut ini contoh matriks dan tracenya :

Contoh 2.6 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, hitunglah nilai *trace* dari matriks A !

Penyelesaian:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

Contoh 2.7 Diberikan matriks $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, hitunglah nilai *trace* dari matriks B !

Penyelesaian:

$$tr(B) = -1+5+7+0=11$$

Teorema berikut menjeaskan sifat-sifat *trace* matriks dari matriks bujursangkar.

Teorema 2.4 (Gentle, 2007) Jika A dan B adalah matriks bujursangkar dengan orde yang sama dan c adalah scalar, maka berlaku:

i. $tr(A) = tr(A^T)$,

ii. $tr(cA) = ctr(A)$,

iii. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$,

iv. $tr(AB) = tr(BA)$.

Bukti: Diberikan matriks A dan B adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

maka

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}. \tag{2.2}$$

dan

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

maka

$$tr(B) = b_{11} + b_{22} + b_{33} + \cdots + b_{nn}. \tag{2.3}$$

i. Akan ditunjukkan bahwa $tr(A) = tr(A^T)$. *Transpose* dari matriks A yaitu:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{n2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

sehingga diperoleh $tr(A^T) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$. (2.4)

Berdasarkan Persamaan (2.2) dan Persamaan (2.4) maka terbukti $tr(A) = tr(A^T)$.

ii. Akan ditunjukkan bahwa $tr(cA) = c\ tr(A)$, untuk c adalah sebarang sekalar. Diberikan :

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} & \dots & ca_{2n} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} & \dots & ca_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & ca_{n3} & \dots & ca_{nn} \end{bmatrix},$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} tr(cA) &= ca_{11} + ca_{22} + ca_{33} + \cdots + ca_{nn}, \\ &= c(a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}), \\ &= c\ tr(A). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Oleh karena itu terbukti $tr(A) = c\ tr(A)$.

iii. Akan ditunjukkan bahwa $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$ berdasarkan matriks A dan B, diperoleh:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n1} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{23} + b_{33} & \dots & a_{3n} + b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & a_{n3} + b_{n3} & \dots & a_{nn} + b_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\begin{aligned} tr(A + B) &= (a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) + (a_{33} + b_{33}) + \cdots + (a_{nn} + b_{nn}) \\ &= a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22} + a_{33} + b_{33} + \cdots + a_{nn} + b_{nn} \\ &= (a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}) + (b_{11} + b_{22} + b_{33} + \cdots + b_{nn}) \\ &= tr(A) + tr(B) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Berdasarkan Persamaan (2.2), Persamaan (2.3) dan Persamaan (2.6) maka terbukti bahwa

$tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.

iv. Akan ditunjukkan bahwa $tr(AB) = tr(BA)$. Dari matriks A dan B maka diperoleh:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + a_{12}a_{12} + \cdots + a_{1n}b_{n2} & \dots & \dots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & \dots & \dots & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \cdots + a_{2n}b_{nn} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + \cdots + a_{3n}b_{n1} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + \cdots + a_{3n}b_{n2} & \dots & \dots & a_{31}b_{1n} + a_{32}b_{2n} + \cdots + a_{3n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \cdots + a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \cdots + a_{nn}b_{n2} & \dots & \dots & a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{n2} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$tr(AB) = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2}) + \cdots + (a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{n2} + \cdots + a_{nn}b_{nn}) \quad (2.7)$$

Selanjutnya untuk

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + \cdots + b_{1n}a_{n2} & \dots & \dots & b_{11}a_{1n} + b_{12}a_{2n} + \cdots + b_{1n}a_{nn} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + \cdots + b_{2n}a_{n1} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2} & \dots & \dots & b_{21}a_{1n} + b_{22}a_{2n} + \cdots + b_{2n}a_{nn} \\ b_{31}a_{11} + b_{32}a_{21} + \cdots + b_{3n}a_{n1} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2} & \dots & \dots & b_{31}a_{1n} + b_{32}a_{2n} + \cdots + b_{3n}a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}a_{11} + b_{n2}a_{21} + \cdots + b_{nn}a_{n1} & b_{n1}a_{12} + b_{n2}a_{22} + \cdots + b_{nn}a_{n2} & \dots & \dots & b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga

$$tr(BA) = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1}) + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2}) + \cdots + (b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn}) \quad (2.8)$$

$$= b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1} + b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2} + b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn}$$

$$= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} + a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2} + \cdots + a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{n2} + \cdots + a_{nn}b_{nn}$$

$$= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2}) + \cdots + (a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{n2} + \cdots + a_{nn}b_{nn})$$

Berdasarkan Persamaan (2.7) dan Persamaan (2.8) maka terbukti bahwa $tr(AB) = tr(BA)$. ∎

Berikut diberikan contoh untuk *trace* matriks berpangkat dengan aturan perpangkatan matriks.

Contoh 2.8 Tentukan $tr(A^4)$ dan $tr(A^6)$ dari matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Untuk mendapatkan *trace* matriks tersebut, dilakukan perpangkatan matriks sebanyak 4 kali dan 6 kali.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 9 & 21 \\ 21 & 12 & 30 \\ 22 & 12 & 28 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 15 & 9 & 21 \\ 21 & 12 & 30 \\ 22 & 12 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 117 & 66 & 156 \\ 162 & 93 & 219 \\ 160 & 90 & 214 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \times A = \begin{bmatrix} 117 & 66 & 156 \\ 162 & 93 & 219 \\ 160 & 90 & 214 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 876 & 495 & 1173 \\ 1227 & 693 & 1641 \\ 1198 & 678 & 1606 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = A^4 \times A = \begin{bmatrix} 876 & 495 & 1173 \\ 1227 & 693 & 1641 \\ 1198 & 678 & 1606 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6573 & 3717 & 8805 \\ 9201 & 5202 & 12324 \\ 8998 & 5088 & 12052 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = A^5 \times A = \begin{bmatrix} 6573 & 3717 & 8805 \\ 9201 & 5202 & 12324 \\ 8998 & 5088 & 12052 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49341 & 27900 & 66090 \\ 69060 & 39051 & 92505 \\ 67540 & 38190 & 90466 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh :

$tr(A^4) = 876 + 693 + 1606 = 3175$

$tr(A^6) = 49341 + 39051 + 90466 = 178858$

Berdasarkan contoh di atas diketahui bahwa menentukan trace matriks berpangkat sangatlah rumit. Sebab matriks harus dipangkatkan terlebih dahulu sesuai yang diinginkan. Namun banyak penelitian membuat *trace* matriks berpangkat dengan menentukan bentuk umum perpangkatan matriksnya.

Berikut akan diberikan pembahasan mengenai *trace* matriks 3×3 berpangkat bilangan bulat positif dan langkah-langkah pembentukan persamaan perpangkatan matriks dan *trace* matriks berpangkat.

2.5 *Trace* Matriks 3 × 3 Berpangkat Bilangan Bulat Positif

Pada tahun 2017, pembahasan mengenai *trace* suatu matriks telah dibahas oleh Titik Fatonah dalam makalahnya yang berjudul "*Trace* matriks yang berbentuk khusus 2×2 berpangkat bilangan bulat positif". Makalah tersebut membahas mengenai bentuk umum *trace* dari matriks 2×2 berpangkat bilangan positif dengan entri-entri matriksnya bilangan real.

Berikut diberikan langkah-langkah pembentukan persamaannya :

1. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

2. Menentukan $\det(A)$, yaitu :

$$\det(A) = 0 - ab = -ab \tag{2.9}$$

3. Menentukan persamaan umum A^{-n} untuk n ganjil dan n genap.

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

$$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

$$A^3 = A^2.A^1 = \begin{bmatrix} 0 & a^2 b \\ ab^2 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

$$A^4 = A^3.A^1 = \begin{bmatrix} a^2b^2 & 0 \\ 0 & a^2b^2 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

$$A^5 = A^4.A^1 = \begin{bmatrix} 0 & a^3b^2 \\ a^2b^3 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

$$A^6 = A^5.A^1 = \begin{bmatrix} a^3b^3 & 0 \\ 0 & a^3b^3 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

$$A^7 = A^6.A^1 = \begin{bmatrix} 0 & a^4b^3 \\ a^3b^4 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

$$A^8 = A^7.A^1 = \begin{bmatrix} a^4b^4 & 0 \\ 0 & a^4b^4 \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

$$A^9 = A^8.A^1 = \begin{bmatrix} 0 & a^5b^4 \\ a^4b^5 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

$$A^{10} = A^9.A^1 = \begin{bmatrix} a^5b^5 & 0 \\ 0 & a^5b^5 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

$$A^{11} = A^{10}.A^1 = \begin{bmatrix} 0 & a^6b^5 \\ a^5b^6 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

$$A^{12} = A^{11}.A^1 = \begin{bmatrix} a^6b^6 & 0 \\ 0 & a^6b^6 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Dengan melihat kembali Persamaan (2.10) sampai dengan Persamaan (2.21), maka diduga bentuk umum A^{-n} adalah :

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} & , n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} & , n \text{ genap} \end{cases} \tag{2.22}$$

4. Membuktikan bentuk umum A^n menggunakan induksi matematika.

Bentuk umum A^n pada Persamaan (2.22) dinyatakan dalam Teorema 2.5 sebagai berikut:

Teorema 2.5 : Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$, $\forall \quad a, b \in \mathbb{R}$, maka

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} & , n \text{ ganjil} \\ \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} & , n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti: Pembuktian menggunakan induksi matematika untuk n ganjil sebagai berikut:

$$p(n): A^n = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

1. Untuk $n = 1$ maka

$$p(1): A^1 = \begin{bmatrix} 0 & a^1 b^0 \\ a^0 b^1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \text{ benar}$$

2. Asumsikan untuk $n = k$, $p(k)$ benar, yaitu :

$$p(k): A^k = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}} \\ a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Maka akan dibuktikan untuk $n = k + 2$, $p(k + 2)$ juga benar.

$$A^{k+2} = (A^k A^2)$$

$$= (A^k . A . A)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}} \\ a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}} \\ a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & ab \left(a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k-1}{2}} \right) \\ ab \left(a^{\frac{k-1}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{k+3}{2}} b^{\frac{k+1}{2}} \\ a^{\frac{k+1}{2}} b^{\frac{k+3}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Oleh karena langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti

$A^n = \begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}} b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}} b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$ untuk n ganjil

Selanjutnya akan dibuktikan untuk n genap menggunakan induksi matematika yaitu :

$$p(n): A^n = \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$$

1. Untuk $n = 2$ maka

$$p(2): A^2 = \begin{bmatrix} a^1 b^1 & 0 \\ 0 & a^1 b^1 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix}$, benar

2. Asumsikan untuk $n = k$, $p(k)$ benar, yaitu :

$$p(k): A^k = \begin{bmatrix} a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} \end{bmatrix}$$

Maka akan dibuktikan untuk $n = k + 2$, $p(k + 2)$ juga benar.

$$\begin{aligned} A^{k+2} &= (A^k A^2) \\ &= (A^k . A . A) \\ &= \left(\begin{bmatrix} a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{bmatrix} a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} ab \left(a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} \right) & 0 \\ 0 & ab \left(a^{\frac{k}{2}} b^{\frac{k}{2}} \right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^{\frac{k+2}{2}} b^{\frac{k+2}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{k+2}{2}} b^{\frac{k+2}{2}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Oleh karena langkah (1) dan (2) sudah diperlihatkan benar, maka terbukti

$A^n = \begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}$ untuk n genap

Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 2.5 terbukti benar. ■

5. Menentukan bentuk umum $tr(A^n)$ dengan n ganjil dan n genap.

Teorema 2.6 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, \forall \quad a, b \in \mathbb{R}$, maka

$$tr(A^n) = \begin{cases} 0 & \text{, untuk } n \text{ ganjil} \\ 2(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}} & \text{, untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti :

Akan dibuktikan $tr(A^n) = 0$ untuk n ganjil sebagai berikut:

Berdasarkan Teorema 2.5 maka dapat dibentuk $tr(A^n)$ untuk n bilangan ganjil yaitu:

$$\begin{aligned} tr(A^n) &= tr\begin{bmatrix} 0 & a^{\frac{n+1}{2}}b^{\frac{n-1}{2}} \\ a^{\frac{n-1}{2}}b^{\frac{n+1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \\ &= 0 + 0 = 0\,. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Maka terbukti $tr(A^n) = 0$ untuk n ganjil.

Selanjutnya akan dibuktikan $tr(A^n) = 2(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}}$, untuk n genap sebagai berikut:

Berdasarkan Teorema 2.5 maka dapat diduga bentuk umum $tr(A^n)$ untuk n bilangan genap yaitu:

$$\begin{aligned} tr(A^n) &= tr\begin{bmatrix} a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} \end{bmatrix} \\ &= a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} + a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} \\ &= 2a^{\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}} \\ &= 2(ab)^{\frac{n}{2}} \\ &= 2(-(-ab))^{\frac{n}{2}}\,. \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh:

$$tr(A^n) = 2(-\det(A))^{\frac{n}{2}}$$

$$= 2(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}} . \qquad (2.24)$$

Maka terbukti $tr(A^n) = 2(-1)^{\frac{n}{2}}(\det(A))^{\frac{n}{2}}$, untuk n genap. Berdasarkan pembuktian tersebut, maka Teorema 2.6 terbukti. ■

Berikut diberikan contoh yang berkaitan dengan Teorema 2.6 sebagai berikut:

Contoh 2.8 Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$. Hitunglah $tr(A^5)$ dan $tr(A^8)$ dengan menggunakan Teorema 2.6 !

Penyelesaian :

$$\det(A) = 0 - (5)(4) = -20$$

dan

$$tr(A) = 0 + 0 = 0$$

Sehingga menurut Teorema 2.5 diperoleh:

$$tr(A^5) = \begin{bmatrix} a^3b^3 & 0 \\ 0 & a^3b^3 \end{bmatrix} = 0.$$

Untuk $tr(A^8)$ menurut Teorema 2.5 diperoleh:

$$tr(A^8) = 2(-1)^{\frac{8}{2}}(\det(A))^{\frac{8}{2}} ,$$

$$= 2(-20)^4,$$

$$= 320.000.$$

2.6 Induksi Matematika

Prinsip induksi sederhana berbunyi sebagai berikut : Misalkan $p(n)$ adalah menyatakan suatu pernyataan bilangan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa pernyataan $p(n)$ tersebut benar untuk semua bilangan positif n, maka untuk membuktikan pernyataan ini digunakan aturan sebagai berikut:

1. Akan ditunjukkan $p(1)$ benar, dan
2. Jika $p(n)$ benar, maka $p(n + 1)$juga benar untuk $n \geq 1$.

Sehingga $p(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

Langkah 1 dinamakan basis induksi, sedangkan langkah 2 dinamakan langkah induksi. Langkah induksi berisi asumsi (andaian) yang menyatakan bahwa $p(n)$ benar. Dan akan dibuktikan untuk $p(n + 1)$ juga benar, asumsi tersebut dinamakan hipotesis induksi. Bila sudah ditunjukkan kedua langkah tersebut benar maka sudah dibuktikan bahwa $p(n)$ benar untuk semua bilangan n.

Contoh 2.9 buktikan bahwa $2+4+6+...+2n=n(n+1)$, untuk setiap n bilangan asli !

Penyelesaian :

Misalkan $p(n)$ adalah proporsi yang menyatakan bahwa untuk setiap $n \in N$ dengan $p(n)$: $2+4+6+...+2n=n(n+1)$.

1. *Basis induksi* : akan ditunjukkan P(1) benar

   $2=1(1+1)$

   Jadi, $p(1)$ benar
2. *Langkah induksi* : Misalkan $p(n)$ benar, yaitu mengasumsikan bahwa $2+4+6+...+2n=n(n+1)$ adalah benar (hipotesis induksi), maka akan ditunjukkan bahwa $p(n+1)$ juga benar,yaitu:

   $2+4+6+...+2(n+1)=(n+1)(n+1+1)$

   Hal ini dapat kita tunjukkan sebagai berikut :

   $$\begin{aligned} 2+4+6+\cdots+2(n+1) &= n(n+1)+2(n+1) \\ &= n^2+n+2n+2 \\ &= n^2+3n+2 \\ &= (n+1)(n+2) \\ &= (n+1)(n+1+1) \end{aligned}$$

   karena langkah basis dan langkah induksi keduanya telah diperlihatkan benar,maka terbukti $2+4+6+...+2n=n(n+1)$, untuk setiap n bilangan asli.