BAB II
LANDASAN TEORI

Bab II ini akan membahas beberapa konsep dasar yang diperlukan sebagai landasan teori untuk menyelesaikan permasalahan yang akan dibahas pada bab selanjutnya. Adapun pembahasan yang akan dibahas antara lain tentang matriks, determinan matriks, metode perhitungan determinan untuk matriks bujur sangkar, sifat-sifat determinan untuk matriks bujur sangkar, dan determinan Radic.

2.1 Matriks

Definisi 2.1 (Ruminta, 2009) Matriks adalah kumpulan bilangan-bilangan yang disusun secara khusus dalam bentuk baris dan kolom sehingga membentuk empat persegi panjang atau bujur sangkar yang ditulis diantara dua tanda kurung, yaitu $(\ )$ atau $[\ ]$. Matriks $m \times n$ (matriks tidak bujur sangkar) dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan:

a_{ij} : elemen atau unsur matriks

i : $1,2,3,\cdots,m$, indeks baris

j : $1,2,3,\cdots,n$, indeks kolom

Matriks di atas juga dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$A_{m\times n} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$

Definisi 2.2 (Howard Anton & Chris Rorres, 2004) Suatu matriks A dengan jumlah baris n dan jumlah kolom n disebut matriks bujur sangkar dan entri $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ merupakan diagonal utama dari matriks A. Matriks $n \times n$ (matriks bujur sangkar) dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dibahas mengenai determinan matriks.

2.2 Determinan Matriks

Definisi 2.3 (Howard Anton & Chris Rorres, 2004) Determinan adalah suatu fungsi khusus yang mengasosiasikan suatu bilangan real dengan suatu matriks bujur sangkar. Determinan dari matriks A dinotasikan dengan $\det(A)$ atau $|A|$.

Selanjutnya akan dibahas mengenai metode perhitungan determinan untuk matriks bujur sangkar. Determinan untuk matriks bujur sangkar dapat dihitung dengan beberapa metode, antara lain metode reduksi baris, metode Sarrus, dan metode ekspansi kofaktor.

2.2.1 Metode Reduksi Baris

Gagasan dari metode ini adalah dengan mereduksi matriks yang diberikan menjadi bentuk segitiga atas melalui operasi baris elementer, menghitung determinan dari matriks segitiga atas, dan menghubungkan determinan tersebut dengan matriks aslinya (Howard Anton & Chris Rorres, 2004).

Berikut diberikan contoh mengenai metode reduksi baris.

Contoh 2.4:

Diketahui matriks bujur sangkar dengan ukuran 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Tentukan $\det(A)$ dengan menggunakan metode reduksi baris!

Penyelesaian:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \leftarrow b_1 \text{ dan } b_2 \text{ dipertukarkan}$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \leftarrow \text{faktor bersama yaitu } 3 \text{ dari } b_2 \text{ dikeluarkan}$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} \leftarrow -2 \text{ kali } b_1 \text{ ditambahkan ke } b_3$$

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} \leftarrow -10 \text{ kali } b_2 \text{ ditambahkan ke } b_3$$

$$= (-3)(-55)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \leftarrow \text{faktor bersama yaitu } -55 \text{ dari } b_3 \text{ dikeluarkan}$$

$$= (-3)(-55)(1)$$

$$= 165$$

jadi, $\det(A) = 165$.

Selanjutnya akan dibahas mengenai metode Sarrus.

2.2.2 Metode Sarrus

Langkah-langkah untuk menghitung determinan matriks bujur sangkar A dengan menggunakan metode Sarrus sebagai berikut (T. Sutojo dkk, 2010):

1. Salin kembali kolom pertama dan kolom kedua kemudian tempatkan di sebelah kanan tanda determinan.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

2. Hitunglah jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal utama dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal utama. Nyatakan jumlah hasil kali tersebut dengan $A(+)$.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$A(+) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

3. Hitunglah jumlah hasil kali elemen-elemen pada diagonal sekunder dan diagonal lain yang sejajar dengan diagonal sekunder. Nyatakan jumlah hasil kali tersebut dengan $A(-)$.

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$A(-) = a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}$$

4. Determinan matriks A adalah selisih antara $A(+)$ dan $A(-)$.

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}$$

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Berikut diberikan contoh mengenai metode Sarrus.

Contoh 2.5:

Diketahui matriks bujur sangkar dengan ukuran 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Tentukan $\det(A)$ dengan menggunakan metode Sarrus!

Penyelesaian:

$$\det(A) = \left| \begin{array}{ccc|cc} -3 & 4 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right.$$

$$= [(-3)\cdot 1\cdot(-1)+4\cdot 3\cdot 1+2\cdot 2\cdot 0]-[1\cdot 1\cdot 2+0\cdot 3\cdot(-3)+(-1)\cdot 2\cdot 4]$$

$$= (3+12+0)-(2+0-8)$$

$$= 15-(-6)$$

$$= 21$$

jadi, $\det(A)=21$.

Selanjutnya akan dibahas mengenai metode ekspansi kofaktor.

2.2.3 Metode Ekspansi Kofaktor

Sebelum menentukan determinan dengan ekspansi kofaktor, terlebih dahulu harus memahami istilah minor dan kofaktor, dengan ketentuan sebagai berikut (Qurrotul Aini & Meinarini Catur Utami, 2013):

Bila A matriks bujur sangkar, minor entri $a_{ij} = M_{ij}$ (determinan submatriks yang tersisa setelah baris ke-i kolom ke-j dihilangkan dari A). Sedangkan kofaktor entri a_{ij} adalah $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Cara yang digunakan untuk mempermudah mengetahui tanda $+/-$ dari minor adalah dengan menjumlahkan indeks entri yang ingin ditentukan, yaitu jika jumlah indeks genap maka bertanda $+$ dan jika jumlah indeks ganjil maka bertanda $-$. Jadi, untuk menentukan $\det(A)$ dapat ditulis sebagai C dan M dan menentukan determinan dapat ditentukan dari baris atau kolom manapun.

$$\det(A) = a_{11}M_{11}+a_{12}(-M_{12})+a_{13}M_{13}+a_{14}(-M_{14})$$

$$= a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13}+a_{14}C_{14}$$

$$= a_{21}C_{21}+a_{22}C_{22}+a_{23}C_{23}+a_{24}C_{24}\,\text{dst}$$

Ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j adalah sebagai berikut:

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j}+a_{2j}C_{2j}+\cdots+a_{nj}C_{nj}$$

Ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i adalah sebagai berikut:

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

Berikut diberikan contoh mengenai metode ekspansi kofaktor.

Contoh 2.6:

Diketahui matriks bujur sangkar dengan ukuran 4×4 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan $\det(A)$ dengan menggunakan metode ekspansi kofaktor sepanjang kolom ketiga dari matriks A!

Penyelesaian:

karena entri a_{13} dan a_{23} adalah 0, maka hitung C_{33} dan C_{43} saja.

$$\begin{aligned} C_{33} &= (-1)^{3+3} M_{33} \\ &= M_{33} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 10 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 5\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 5(16) - (-2)(24) + 2(0) \\ &= 80 - (-48) + 0 \\ &= 128 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} C_{43} &= (-1)^{4+3} M_{43} \\ &= -M_{43} \\ &= -\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= -\left(5\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right)$$
$$= -\left(5(-6) - (-2)(-9) + 0(0)\right)$$
$$= -(-30 - 18 + 0)$$
$$= 48$$

sehingga:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} + a_{43}C_{43} \\ &= a_{13}M_{13} + a_{23}(-M_{23}) + a_{33}M_{33} + a_{43}(-M_{43}) \\ &= 0 + 0 + (-3)(128) + 3(48) \\ &= -240 \end{aligned}$$

jadi, $\det(A) = -240$.

Selanjutnya akan dibahas mengenai sifat-sifat determinan untuk matriks bujur sangkar.

2.3 Sifat-Sifat Determinan untuk Matriks Bujur Sangkar

Sifat-sifat determinan untuk matriks bujur sangkar A diantaranya diberikan dalam empat teorema berikut.

Teorema 2.7 (Howard Anton & Chris Rorres, 2004) Misalkan A adalah suatu matriks bujur sangkar.

1. Jika A memiliki satu baris atau satu kolom bilangan nol, maka $\det(A) = 0$.
2. $\det(A) = \det(A^t)$.

Bukti:

1. Karena setiap hasil kali elementer bertanda dari A memiliki satu faktor dari tiap baris dan satu faktor dari tiap kolom, maka setiap hasil kali elementer bertanda akan memiliki satu faktor dari satu baris nol atau satu faktor dari satu kolom nol. Pada kasus-kasus seperti ini, setiap hasil kali elementer bertanda adalah nol, dan $\det(A)$ yang merupakan jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda adalah nol. ■

2. Karena suatu hasil kali elementer memiliki satu faktor dari tiap baris dan tiap kolom, maka jelaslah bahwa A dan A^t memiliki himpunan hasil kali elementer yang tepat sama. Sehingga $\det(A) = \det(A^t)$. ■

Contoh 2.8:

1. Diketahui matriks bujur sangkar dengan ukuran 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\det(A) = \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 8 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 1 & 7 & 5 \end{array} \right.$$

$$= (0+0+0)-(0+0+0)$$

$$= 0-0$$

$$= 0$$

jadi, $\det(A) = 0$.

2. Diketahui sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ dan } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\det(A) = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 3 \end{array} \right.$$

$$= (20+42+0)-(16+21+0)$$

$$= 62-37$$

$$= 25$$

dan

$$\det(A^t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{matrix}$$

$$= (20+0+42)-(16+21+0)$$

$$= 62-37$$

$$= 25$$

jadi, $\det(A) = \det(A^t) = 25$.

Teorema berikut menunjukkan bagaimana operasi baris elementer terhadap suatu matriks mempengaruhi nilai determinannya.

Teorema 2.9 (Howard Anton & Chris Rorres, 2004) Misalkan A adalah suatu matriks $n \times n$.

1. Jika B adalah matriks yang diperoleh ketika satu baris atau satu kolom dari A dikalikan dengan suatu skalar k, maka $\det(B) = k\det(A)$.
2. Jika B adalah matriks yang diperoleh ketika dua baris atau dua kolom dari A dipertukarkan, maka $\det(B) = -\det(A)$.

Contoh 2.10:

1. Diketahui sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 9 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 9 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 9 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 2 \\ 9 & 1 \\ 1 & 4 \end{matrix}$$

$$= (24+10+144)-(4+60+144)$$

$$= 178-208$$

$$= -30$$

dan

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 9 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix}\begin{matrix} 6 & 4 \\ 9 & 1 \\ 1 & 4 \end{matrix}$$

$$= (48+20+288)-(8+120+288)$$

$$= 356-416$$

$$= -60$$

jadi, $\det(B) = 2\det(A) = 2(-30) = -60$.

2 Diketahui sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \\ 7 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 1 \\ 8 & 4 \\ 7 & 6 \end{matrix}$$

$$= (24+35+288)-(168+90+16)$$

$$= 347-274$$

$$= 73$$

dan

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \\ 7 & 6 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 8 & 4 \\ 3 & 1 \\ 7 & 6 \end{matrix}$$

$$= (16+168+90)-(35+288+24)$$

$$= 274-347$$

$$= -73$$

jadi, $\det(B) = -\det(A) = -73$.

Teorema berikut menunjukkan bagaimana determinan dari suatu matriks yang dapat dibalik.

Teorema 2.11 (Howard Anton & Chris Rorres, 2004) Suatu matriks bujur sangkar A dapat dibalik, jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

Bukti:

Jika A dapat dibalik, maka $I = AA^{-1}$, sehingga

$$1 = \det(I) = \det(A)\det(A^{-1})$$

jadi, $\det(A) \neq 0$. ■

Contoh 2.12:

Diketahui matriks bujur sangkar dengan ukuran 3×3 sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\det(A) = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 8 & 1 & 0 \end{array} \right.$$

$$= (40 + 6 + 0) - (15 + 0 + 32)$$

$$= 46 - 47$$

$$= -1$$

$\det(A) = -1 \neq 0$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa matriks A dapat dibalik.

$$\left[I \mid A^{-1} \right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - b_1 \end{array}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ b_3 + 2b_2 \end{array}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ -b_3 \end{array}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} b_1 - 3b_3 \\ b_2 + 3b_3 \\ \\ \end{array}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} b_1 - 2b_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right]$$

sehingga:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

jadi, matriks A dapat dibalik, jika dan hanya $\det(A) \neq 0$.

Teorema berikut mengatakan bahwa determinan merupakan fungsi perkalian.

Teorema 2.13 (Howard Anton & Chris Rorres, 2004) Jika A dan B adalah matriks-matriks bujur sangkar dengan ukuran yang sama, maka:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Bukti:

Akan dibagi bukti menjadi dua kasus yang bergantung pada A dapat dibalik atau tidak. Jika matriks A tidak dapat dibalik, maka matriks AB juga tidak dapat dibalik. Jadi, dari Teorema 2.11 diperoleh $\det(AB) = 0$ dan $\det(A) = 0$, sehingga $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Sekarang asumsikan A dapat dibalik. Matriks A dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari matriks-matriks elementer, misalnya

$$A = E_1 E_2 \cdots E_r$$

sehingga

$$AB = E_1 E_2 \cdots E_r B$$

oleh karena itu,

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_r)\det(B)\\ &= \det(E_1E_2\cdots E_r)\det(B)\\ &= \det(A)\det(B) \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Contoh 2.14:

Diketahui sebagai berikut:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} \text{ dan } B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 7 & 1 & 2\\ 5 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

maka:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \left|\begin{array}{ccc|cc}2 & 1 & 0 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\end{array}\right.\\ &= (16+0+0)-(0+0+6)\\ &= 16-6\\ &= 10\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\det(B) &= \left|\begin{array}{ccc|cc}1 & -1 & 3 & 1 & -1\\ 7 & 1 & 2 & 7 & 1\\ 5 & 0 & 1 & 5 & 0\end{array}\right.\\ &= (1-10+0)-(15+0-7)\\ &= -9-8\\ &= -17\end{aligned}$$

sehingga:

$$\begin{aligned}\det(A)\det(B) &= 10(-17)\\ &= -170\end{aligned}$$

jika A dan B dikalikan:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -1 & 8 \\ 31 & 1 & 17 \\ 10 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\det(AB) = \left| \begin{array}{ccc|cc} 9 & -1 & 8 & 9 & -1 \\ 31 & 1 & 17 & 31 & 1 \\ 10 & 0 & 2 & 10 & 0 \end{array} \right.$$

$$= (18 - 170 + 0) - (80 + 0 - 62)$$

$$= -152 - 18$$

$$= -170$$

jadi, $\det(AB) = \det(A)\det(B) = -170$.

Selanjutnya akan dibahas mengenai determinan Radic.

2.4 Determinan Radic

Definisi 2.15 (Ali Amiri, Mahmood Fathy & Morteza Bayat, 2010) Jika $A = (a_{i,j})$ adalah matriks $m \times n$ dengan $m < n$, maka determinan dari matriks A sebagai berikut:

$$\det(A) = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_m \le n} (-1)^{r+s} \det \begin{bmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ij_1} & a_{ij_2} & \cdots & a_{ij_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{mj_1} & a_{mj_2} & \cdots & a_{mj_m} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

dengan $j_1, j_2, \cdots, j_m \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $r = 1 + 2 + \cdots + m$, dan $s = j_1 + j_2 + \cdots + j_m$. Jika $m > n$, maka $\det(A) = 0$.

Berikut diberikan contoh mengenai determinan Radic.

Contoh 2.16:

Diketahui matriks tidak bujur sangkar dengan ukuran 3×4 sebagai berikut:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (-1)^{(1+2+3)+(1+2+3)}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+4)}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} + \\
&\quad (-1)^{(1+2+3)+(1+3+4)}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(2+3+4)}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \left(\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{matrix}\right) - \left(\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{matrix}\right) + \left(\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix}\right) - \\
&\quad \left(\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{matrix}\right) \\
&= \left((6+0+8)-(8+0+4)\right) - \left((0+8+0)-(0+12+0)\right) + \\
&\quad \left((0+4+0)-(0+3+0)\right) - \left((0+8+0)-(0+4+0)\right) \\
&= (14-12)-(8-12)+(4-3)-(8-4) \\
&= 2-(-4)+1-4 \\
&= 3
\end{aligned}$$

jadi, $\det(A)=3$.