BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Deret Taylor

Terdapat berbagai metode untuk menghampiri fungsi yang diberikan dengan suku banyak. Salah satu cara yang paling sering digunakan ialah deret Taylor. Deret Taylor merupakan deret yang berbentuk polinomial. Deret ini dapat mengekspansi fungsi-fungsi eksponensial, trigonometri, dan logaritma yang tidak dapat ditentukan dengan mudah.

Teorema 2.1 (Leithold,1993) Misalkan f adalah suatu fungsi sehingga f dan turunan-turunan ke-n-nya kontinu pada selang tertutup $[a,b]$. Selanjutnya, misalkan $f^{(n+1)}(x)$ ada untuk setiap x pada selang terbuka (a,b), maka terdapat suatu bilangan ξ pada selang terbuka (a,b) sehingga:

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \quad (2.1)$$

Persamaan (2.1) juga berlaku bila $b<a$; dalam kasus ini $[a,b]$ diganti oleh $[b,a]$ dan (a,b) diganti oleh (b,a).

Terdapat beberapa bukti yang dikenal untuk menyelesaikan Teorema (2.1). Bukti berikut ini dibuat menggunakan teorema nilai rata-rata Cauchy.

Bukti: Misalkan F dan G adalah fungsi yang didefinisikan oleh

$$F(x)=f(b)-f(x)-f'(x)(b-x)-\frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2-\cdots$$
$$-\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}-\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n. \quad (2.2)$$

dan

$$G(x)=\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (2.3)$$

Selanjutnya, diferensialkan Persamaan (2.2), diperoleh:

$$F'(x)=-f'(x)+f'(x)-f''(x)(b-x)+\frac{2f''(x)}{2!}(b-x)$$
$$-\frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2+\frac{3f'''(x)(b-x)^2}{3!}-\frac{f^{(iv)}(x)(b-x)^3}{3!}+\cdots$$

$$+\frac{(n-1)f^{(n-1)}(x)(b-x)^{n-2}}{(n-1)!}-\frac{f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$+\frac{nf^{(n)}(x)(b-x)^{n-1}}{n!}-\frac{f^{(n+1)}(x)(b-x)^{n}}{n!}.$$

Gabungkan suku-sukunya dan dilihat bahwa jumlah dari setiap suku–suku genap dan suku-suku ganjil adalah nol, sehingga sisanya hanyalah suku terakhir. Karena itu

$$F'(x)=-\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^{n}. \tag{2.4}$$

Diferensialkan Persamaan (2.3) terhadap x, maka diperoleh

$$G'(x)=-\frac{1}{n!}(b-x)^{n}. \tag{2.5}$$

Fungsi F dan G memenuhi semua syarat Teorema nilai rata-rata Cauchy pada selang tertutup $[a,b]$, yaitu :

(i) F dan G kontinu pada $[a,b]$,

(ii) F dan G mempunyai turunan pada (a,b),

(iii) Untuk setiap x pada (a,b), $G'(x)\neq 0$.

Oleh karena itu, menurut Teorema nilai rata-rata Cauchy ada $\xi\in(a,b)$ sehingga

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)},$$

oleh karena $F(b)=0$ dan $G(b)=0$ maka

$$F(a)=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}G(a). \tag{2.6}$$

untuk suatu ξ pada (a,b).

Misalkan $x=a$ pada (2.3), $x=\xi$ pada (2.4), dan $x=\xi$ pada (2.5) kemudian gantikan pada Persamaan (2.6), diperoleh

$$F(a)=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}G(a)=-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^{n}\left[-\frac{n!}{(b-\xi)^{n}}\right]\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-\xi)^{n+1}. \tag{2.7}$$

Apabila $x = a$ pada Persamaan (2.2), diperoleh

$$F(a) = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \cdots$$
$$- \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} - \frac{f^{n}(a)}{n!}(b-a)^{n}. \tag{2.8}$$

Substitusikan (2.7) ke dalam (2.8), diperoleh

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{n}(a)}{n!}(b-a)^{n} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \quad \blacksquare(2.9)$$

Persamaan (2.9) merupakan hasil yang diinginkan. Teorema ini juga berlaku bila $b < a$ karena kesimpulan Teorema nilai rata-rata Cauchy tidak terpengaruh bilamana a dan b saling bertukar.

Jika pada Persamaan (2.1) b diganti dengan x, maka diperoleh rumus Taylor yang berbentuk

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^{n} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{2.10}$$

dengan ξ di antara a dan x.

Syarat agar (2.10) berlaku ialah f dan n turunan pertamanya harus kontinu pada suatu selang tertutup yang memuat a dan x, dan turunan ke $(n+1)$ dari f ada di setiap titik pada selang terbuka yang berkaitan. Persamaan (2.10) dapat ditulis sebagai

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \tag{2.11}$$

dengan

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^{n}, \tag{2.12}$$

dan

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{2.13}$$

dengan ξ di antara a dan x.

Persamaan (2.12) disebut polinomial Taylor orde-n untuk f di sekitar a dan $R_n(x)$ disebut suku sisa atau galat pemotong.

Contoh 2.1: Gunakan deret Taylor orde tiga di sekitar $x_0 = 1$ untuk menghampiri $\ln(1,2)$

Penyelesaian:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \cap$$

jika $f(x)$ dipotong hingga orde tiga, maka akan berbentuk

$$f_3(x) = f(a) + \frac{f'(x)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3.$$

Selanjutnya untuk membentuk ekspansi polinomial Taylor, sebelumnya akan dicari turunan-turunan fungsi sebagai berikut:

$f(x) = \ln(x)$, maka $f(1) = 0$,

$f'(x) = x^{-1}$, maka $f'(1) = 1$,

$f''(x) = -x^{-2}$, maka $f(1) = -1$,

$f'''(x) = 2x^{-3}$, maka $f(1) = \frac{1}{2}$,

dan

$$\ln(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{-1}{2!}(x-(-1))^2 + \frac{\frac{1}{2}}{3!}(x-\frac{1}{2})^3,$$

$$= (x-1) + -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{12}(x-\frac{1}{2})^3. \qquad (2.14)$$

$$\ln(1,2) = (1,2-1) + -\frac{1}{2}(1,2+1)^2 + \frac{1}{12}(1,2-0,5)^3,$$

$$= 0,2 + 2,42 + 0,028583,$$

$$= 2,648583.$$

2.2 Orde Hampiran

Cara untuk menunjukkan tingkat ketelitian penghampiran fungsi disebut dengan orde hampiran yang dilambangkan dengan $O(h^n)$.

Definisi 2.1 (Munir, 2013) : Misalkan $f(h)$ dihampiri dengan fungsi $p(h)$. Jika $|f(h)-p(h)| \leq M\,|h^n|$, dengan M adalah konstanta real dan $M > 0$, maka dikatakan bahwa $p(h)$ menghampiri $f(h)$ dengan orde penghampiran $O(h^n)$ sehingga dapat dirumuskan

$$f(h) = p(h) + O(h)^n. \qquad (2.15)$$

dengan $O(h^n)$ dapat juga dinotasikan sebagai orde galat dari penghampiran fungsi. Karena h umumnya cukup kecil, sehingga semakin tinggi nilai n, maka galat akan semakin kecil, yang berarti semakin teliti penghampiran fungsinya. Misalnya metode yang berorde $O(h^2)$ mempunyai hasil yang lebih teliti daripada metode yang berorde $O(h)$.

Pada umumnya deret Taylor digunakan untuk menghampiri suatu fungsi. Misalkan

$$x_{i+1} = x_i + h\,,\; i = 0,\, 1,\, 2,\, ... \qquad (2.16)$$

dan i merupakan titik-titik selebar h, maka hampiran $f(x_{i+1})$ di sekitar x_i adalah

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i+1}-x_i)}{1!}f'(x_i) + \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2!}f''(x_i) + \cdots$$

$$+\frac{(x_{i+1}-x_i)^n}{n!}f^{(n)}(x_i) + R_n(x_{i+1}), \qquad (2.17)$$

dengan mengsubstitusikan Persamaan (2.16) ke Persamaan (2.17), maka diperoleh

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{h}{1!}f'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_i) + R_n(x_{i+1}), \quad (2.18)$$

dengan

$$R_n(x_{i+1}) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t) \; = O(h^{n+1}),\; x_i < t < x_{i+1}. \qquad (2.19)$$

Jadi, dapat dituliskan kembali Persamaan (2.15) dalam bentuk

$$f(x_{i+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_i) + O(h^{n+1}). \tag{2.20}$$

Persamaan (2.20) menyatakan bahwa, jika fungsi $f(x)$ dihampiri dengan deret Taylor derajat n, maka suku sisanya cukup dinyatakan dengan lambing $O(h^{n+1})$.

2.3 Orde Konvergensi

Orde konvergensi adalah suatu tingkat percepatan yang menunjukkan kecepatan suatu metode iterasi dalam menghampiri akar-akar persamaan nonlinear. Untuk mengetahui lebih jelas mengenai orde konvergensi, perhatikan definisi berikut

Definisi 2.3 (Esmaili dan Rezaei, 2012) Misalkan $f(x)$ merupakan sebuah fungsi dengan akar persamaan α dan $\{x_n\}$ adalah sebuah barisan bilangan real untuk $n \geq 0$ yang konvergen menuju α. Kemudian, dinyatakan bahwa orde konvergensi dari barisan $\{x_n\}$ adalah p, jika terdapat sebuah konstanta real $c \neq 0$ sedemikian hingga

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = c. \tag{2.21}$$

Untuk $p = 1, 2, 3, \ldots$ maka barisan $\{x_n\}$ konvergen linear, kuadratik, kubik dan seterusnya.

Contoh 2.2 : Tentukan bahwa metode Newton berorde konvergensi dua, dengan bentuk iterasi

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Penyeleseaian:

Diketahui α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$ dan $f'(\alpha) \neq 0$ dengan menggunakan ekspansi deret Taylor diperoleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{2.22}$$

dengan $e_n = x_n - \alpha$ dan $c_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j =$ 2, 3, 4, ... dan turunan pertama dari Persamaan (2.22), maka menghasilkan:

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)). \qquad (2.23)$$

Selanjutnya Persamaan (2.22) dibagi dengan Persamaan(2.23) dengan menggunakan ekspansi deret Taylor $\dfrac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots$ sehingga diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)}{1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)},$$

$$= e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4). \qquad (2.24)$$

Kemudian, Persamaan (2.24) disubstitusikan ke bentuk iterasi metode Newton, diperoleh:

$$x_{n+1} = x_n - e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4).$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ diperoleh

$$e_{n+1} + \alpha = (e_n + \alpha) - e_n - c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4).$$

atau

$$e_{n+1} = c_2e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4). \qquad (2.25)$$

Berdasarkan definisi mengenai orde konvergensi, Persamaan (2.25) diperoleh nilai $p = 2$. Artinya, terbukti bahwa metode Newton memiliki orde konvergensi dua.

Menentukan orde konvergensi juga dapat dilakukan dengan menggunakan *Computational Order of Convergence* yang sering disebut juga dengan *COC*. Berikut ini akan dijelaskan definisi tentang *Computational Order of Convergence (COC).*

Definisi 2.4 (Weerakoon dan Fernando, 2000) Misalkan α adalah akar dari $f(x)$ dan andaikan x_{n-1}, x_n dan x_{n+1} berturut-turut adalah iterasi yang dekat dengan α, maka *Computational Order of Convergence (COC)* yang dilambangkan dengan ρ dapat diaproksimasikan dengan menggunakan rumus:

$$\rho \approx \frac{\ln\left|(x_{n+1}-\alpha)/(x_n-\alpha)\right|}{\ln\left|(x_n-\alpha)/(x_{n-1}-\alpha)\right|}. \tag{2.26}$$

Oleh karena $e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$, maka *Computational Order of Convergence (COC)* dari suatu barisan $\{x_n\}_{n\geq 0}$ adalah:

$$\rho \approx \frac{\ln\left|e_{n+1}/e_n\right|}{\ln\left|e_n/e_{n-1}\right|}. \tag{2.27}$$

Contoh 2.3 : Diberikan fungsi $f(x) = \cos(x) - x$ dengan menggunakan metode Newton, tentukan iterasi untuk menentukan akar tunggal $\alpha = 0{,}73908513322$ serta konvergensi fungsi tersebut dengan nilai awal $x_0 = 1{,}5$ dan toleransi galat 10^{-11}.

Penyelesaian :

$$f(x) = \cos(x) - x,$$

$$f'(x) = -\sin(x) - 1,$$

dengan $x_0 = 1{,}5$.

Selanjutnya, iterasi pertama diperoleh dengan mensupstitusikan x_0 ke metode Newton

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \\ &= 1{,}5 - \frac{-1{,}429262798}{-1{,}997494987} \\ &= 1{,}5 - 0{,}7155276020 \\ x_1 &= 0{,}78447239772, \end{aligned}$$

dengan cara yang sama diperoleh berturut x_2, x_3 dan x_4 sebagai berikut $x_2 =$ 0,73951870983, $x_3 = 0{,}73908517470$, $x_4 = 0{,}73908513321$. Selanjutnya akan ditentukan nilai $\rho_1, \rho_2, \downarrow\downarrow, \rho_n$, sehingga didapat

$$\begin{aligned} \rho_2 &\approx \frac{\ln\left|e_{n+1}/e_n\right|}{\ln\left|e_n/e_{n-1}\right|} \\ &\approx 1{,}64967719405 \end{aligned}$$

dengan cara yang sama diperoleh nilai $\rho_3 = 1{,}98979425082$ dan $\rho_4 =$ 1,99995084494**.** Selanjutnya akan disajikan dalam tabel berikut

Tabel 2.1 Hasil Iterasi dari *COC* Metode Newton dengan Akar Tunggal

n	x_n	$\lvert x_n - \alpha \rvert$	*COC*
1	0,78447239772	4,5387265042	-
2	0,73951870983	4,33576616897	1,64967719405
3	0,73908517470	4,14900356209	1,98979425082
4	0,73908513321	3,80099482726	1,99995084494

Berdasarkan Tabel 2.1 dapat disimpulkan bahwa metode Newton memiliki konvergensi kuadratik dengan $\rho \approx 2$.

2.4 Indeks Efisiensi

Definisi 2.5: (Singh, 2009) Indeks efisiensi didefinisikan dengan:

$$I = p^{1/m} \tag{2.28}$$

dengan p adalah orde konvergensi dari suatu metode iterasi, dan m adalah jumlah dari evaluasi fungsi dari metode. Semakin besar nilai ideks efisiensi maka metode itu semakin efektif dalam menyelesaikan persamaan nonlinear.

Contoh 2.4 : Metode Newton yang memiliki indeks efisiensi $2^{1/2} = \sqrt{2} \approx 1{,}414$, artinya metode Newton memiliki orde konvergensi kuadratik dan memiliki dua evaluasi fungsi, yaitu $f(x_n)$ dan $f'(x_n)$.

2.5 Metode Newton dan Konvergensinya

Metode Newton adalah metode yang paling terkenal dan paling sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinier. Metode ini paling disukai karena memiliki algoritma yang sederhana. Metode Newton diperoleh dari ekspansi deret Taylor, yaitu berdasarkan Persamaan (2.1) sebagai berikut

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \cdots$$

Selanjutnya uraikan $f(x_{n+1})$ di sekitar x_n ke dalam deret Taylor, diperoleh:

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n)}{1!} f'(x_n) + \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2!} f''(x_n) + \cdots$$

Metode Newton diturunkan dari deret Taylor orde satu, diperoleh

$$f(x_{n+1}) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \tag{2.29}$$

dengan x_{n+1} adalah akar pendekatan fungsi $f(x_{n+1})$, maka $f(x_{n+1}) \approx 0$, sehingga Persamaan (2.29) menjadi:

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0$$

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

atau

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.30}$$

Persamaan (2.30) merupakan metode Newton dengan orde konvergensi kuadratik dan memiliki dua evaluasi fungsi.

Teorema 2.2 : Misalkan $f(x)$ adalah fungsi bernilai real yang mempunyai turunan pertama, kedua, ketiga dan seterusnya pada interval (a,b). Jika $f(x)$ memiliki akar α pada interval (a,b) dan x_0 adalah nilai tebakan awal yang cukup dekat dengan α, maka metode iterasi pada Persamaan (2.30) memenuhi persamaan galat:

$$e_{n+1} = c_2 e_n^2 + O(e_n^3) \tag{2.31}$$

dengan $e_n = x_n - \alpha$ dan $c_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j = 2, 3, 4, \ldots$

Bukti : Misalkan α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$. Asumsikan $f'(\alpha) \neq 0$ dan $x_n = \alpha + e_n$. Selanjutnya dengan menggunakan ekspansi deret Taylor untuk mengaproksimasikan fungsi f di sekitar α, diperoleh

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x_n - \alpha) + f''(\alpha)\frac{(x_n - \alpha)^2}{2!} + f'''(\alpha)\frac{(x_n - \alpha)^3}{3!} + \cdots$$

Oleh karena $f(\alpha) = 0$ dan $x_n = \alpha + e_n$, maka:

$$f(x_n) = f'(\alpha)e_n + \frac{1}{2!}f''(\alpha)e_n^{\,2} + \frac{1}{2!}f'''(\alpha)e_n^{\,3} + O(e_n^{\,4})\,. \tag{2.32}$$

Dengan melakukan manipulasi aljabar pada Persamaan (2.32) maka diperoleh

$$f(x_n) = f'(\alpha)\left(e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n^{\,2} + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n^{\,3} + \frac{O(e_n^{\,4})}{f'(\alpha)}\right), \tag{2.33}$$

dengan $c_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ atau

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{2.34}$$

Selanjutnya dengan melakukan langkah yang sama, ekspansi deret Taylor untuk fungsi $f'(x)$ disekitar α menghasilkan

$$\begin{aligned} f'(x_n) &= f'(\alpha) + f''(\alpha)(x_n - \alpha) + f'''(\alpha)\frac{(x_n-\alpha)^2}{2!} + \cdots \\ &= f'(\alpha) + f''(\alpha)e_n + \frac{f'''(\alpha)}{2!}e_n^{\,2} + O(e_n^{\,3}) \\ &= f'(\alpha)\left(1 + \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}e_n + \frac{f'''(\alpha)}{2!\,f'(\alpha)}e_n^{\,2} + \frac{O(e_n^{\,3})}{f'(\alpha)}\right) \\ &= f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)). \end{aligned} \tag{2.35}$$

Jika Persamaan (2.34) dibagi dengan Persamaan (2.35), maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= \frac{e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)}{1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)}, \\ &= \frac{e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)}{1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)}\,. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Misalkan $t = 2c_2e_n + 3c_3e_n^{\,2} + O(e_n^{\,3})$ dengan menggunakan ekspansi deret Taylor:

$\dfrac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots$ diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &= (e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)) \times (1 - (2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)) + \\ &\qquad (2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3))^2 - (2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3))^3 + \cdots) \\ &= (e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)) \times (1 - 2c_2e_n + (4c_2^2 - 3c_3)e_n^2 + \cdots) \end{aligned}$$

$$= e_n - c_2 e_n^2 + (2c_2^2 - 2c_3)e_n^3 + O(e_n^4)\,. \tag{2.37}$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \alpha$ dan $x_n = e_n + \alpha$, substitusi Persamaan (2.37) ke Persamaan (2.30) menghasilkan

$$e_{n+1} + \alpha = e_n + \alpha - (e_n - c_2 e_n^2 + O(e_n^3)) \tag{2.38}$$

sehingga diperoleh:

$$e_{n+1} = c_2 e_n^2 + O(e_n^3)\,. \quad \blacksquare \tag{2.39}$$

Persamaan(2.39) merupakan persamaan galat dari metode Newton yang menunujukkan bahwa metode tersebut memiliki orde konvergensi kuadratik.

2.6 Metode Halley dan Orde Konvergensi

Metode Halley berasal dari deret Taylor orde dua, sebagai berikut

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2, \tag{2.40}$$

oleh karena x_{n+1} adalah akar pendekatan fungsi $f(x_{n+1})$ maka $f(x_{n+1}) \approx 0$, sehingga

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2 = 0. \tag{2.41}$$

Diketahui bahwa $x_{n+1} - x_n = h$, maka

$$f(x_n) + f'(x_n)h + \frac{f''(x_n)}{2!}h^2 = 0. \tag{2.42}$$

Dapat juga dirubah bentuk menjadi,

$$h = \frac{-2f(x_n)}{2f'(x_n) + f''(x_n)h}. \tag{2.43}$$

dari teori Newton diperoleh

$$x_{n+1} - x_n = \frac{-f(x_n)}{f(x_n)}, \tag{2.44}$$

$$h = \frac{-f(x_n)}{f(x_n)}. \tag{2.45}$$

Substitusikan Persamaan (2.45) ke (2.43), maka menghasilkan

$$h = \frac{-2f(x_n)f'(x_n)}{2f'^2(x_n) - f''(x_n)f(x_n)}, \tag{2.46}$$

Oleh karena $x_{n+1} = x_n + h$, maka

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2f'^2(x_n) - f''(x_n)f(x_n)}. \tag{2.47}$$

Teorema 2.3 Misalkan $\alpha \in I$ adalah akar sederhana dari fungsi terdifferensialkan $f : I \rightarrow R$ untuk interval buka I. Jika x_0 cukup dekat ke α, maka metode Halley memiliki orde konvergensi tiga.

Bukti: Misalkan α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$. Asumsikan $f'(\alpha) \neq 0$ dan $x_n = \alpha + e_n$, dengan menggunakan deret Taylor untuk mengaproksimasikan fungsi f di sekitar x_n, maka diperoleh :

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2e_n^2 + c_3e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{2.48}$$

selanjutnya, turunan pertama dan kedua dari $f(x)$ diperoleh:

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + O(e_n^3)), \tag{2.49}$$

$$f''(x_n) = f'(\alpha)(2c_2 + 6c_3e_n + O(e_n^2)). \tag{2.50}$$

Substitusikan Persamaan (2.48), (2.49) dan (2.50) ke Persamaan (2.40), dengan menggunakan ekspansi deret Taylor $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots$ dan $x_n = \alpha + e_n$, maka diperoleh

$$x_{n+1} = \alpha + (-c_3 + c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.51}$$

Oleh karena $e_{n+1} = x_{n+1} - a$ maka diperoleh

$$e_{n+1} = (-c_3 + c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4) \quad \blacksquare \tag{2.52}$$

2.7 Metode Chun-Kim dan Orde Konvergensi

Metode Chun & Kim berasal dari kelengkungan pada lingkaran, definisikan $y_n = f(x_n)$, $y'_n = f'(x_n)$, $y''_n = f''(x_n)$ dan memiliki garis singgung di ujung (x_n, y_n) pada kurva $y = f(x_n)$ maka diperoleh

$$\left(x - x_n + \frac{y'_n\left[1 + y'^2_n\right]}{y''_n}\right)^2 + \left(y - y_n - \frac{1 + y'^2_n}{y''_n}\right)^2 = \frac{\left(1 + y'^2_n\right)^3}{y''^2_n}, \qquad (2.53)$$

pada titik potong ujung $(x_{n+1}, 0)$ dari Persamaan (2.53) pada sumbu-x, diperoleh

$$\left(x_{n+1} - x_n\right)^2 + 2\frac{y'_n(1 + y'^2_n)}{y''_n}\left(x_{n+1} - x_n\right) + y_n^2 + 2y_n\frac{1 + y'^2_n}{y''_n} = 0. \qquad (2.54)$$

Persamaan (2.54) dapat juga ditulis dengan bentuk berikut

$$x_{n+1} = x_n - \frac{y_n^2 + 2y_n \dfrac{1 + y'^2_n}{y''_n}}{x_{n+1} - x_n + 2\dfrac{y'_n(1 + y'^2_n)}{y''_n}}. \qquad (2.55)$$

Gantikan x_{n+1} pada kanan Persamaan (2.55) dengan metode Newton, didapatkan metode iterasi baru

$$x_{n+1} = x_n - \frac{y_n^2 + 2y_n \dfrac{1 + y'^2_n}{y''_n}}{x^*_{n+1} - x_n + 2\dfrac{y'_n(1 + y'^2_n)}{y''_n}}, \qquad (2.56)$$

dengan $x^*_{n+1} = x_n - \dfrac{y_n}{y'_n}$, atau lebih simpel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{y'_n y''_n y_n^2 + 2y'_n y_n(1 + y'^2_n)}{2y'^2_n(1 + y'^2_n) - y_n y''_n}, \qquad (2.57)$$

dapat juga ditulis dengan bentuk

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)f(x_n)\left[f''(x_n)f(x_n) + 2 + 2f'^2(x_n)\right]}{2f'^2(x_n)\left[1 + f'^2(x_n)\right] - f(x_n)f''(x_n)}. \qquad (2.58)$$

Persamaan (2.58) akan ditaksir dengan penaksiran turunan kedua. Penaksiran tersebut menggunakan

$$f''(x_n) \approx \frac{f'(z_n) - f'(x_n)}{z_n - x_n}. \qquad (2.59)$$

dengan $z_n = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, untuk mendapatkan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\left[2 + 3f'^2(x_n) - f'(x_n)f(z_n)\right]}{f(x_n) - 2f'^3(x_n) + f'(z_n)}. \tag{2.60}$$

Metode baru yang lainya didapatkan dengan memanipulasi Persamaan (2.56) dengan jalan yang berbeda. Dengan menggantikan istilah pertama dari Persamaan (2.56), $(x_{n+1} - x_n)^2$, dengan $\left(\frac{y_n}{y'_n}\right)^2$ dari iterasi Newton, hasil dari metode ini adalah

$$x_{n+1} = \frac{y_n^2 y''_n + 2y_n y'^2_n}{2y'^3_n}. \tag{2.61}$$

atau sama artinya dengan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^2(x_n)f''(x_n) + 2f(x_n)f'^2(x_n)}{2f'^3(x_n)}. \tag{2.62}$$

Teorema 2.4 : Misalkan $\alpha \in I$ adalah akar sederhana dari fungsi terdifferensialkan $f : I \to R$ untuk interval buka I. Jika x_0 cukup dekat ke α, maka metode Chun- Kim memiliki orde kekonvergensi tiga.

Bukti: Misalkan α adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\alpha) = 0$. Asusmsikan $f'(\alpha) \neq 0$ dan $x_n = \alpha + e_n$, dengan menggunakan deret Taylor untuk mengaproksimasikan fungsi f di sekitar x_n, maka diperoleh :

$$f(x_n) = f'(\alpha)(e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + O(e_n^4)). \tag{2.63}$$

Selanjutnya, turunan pertama dan kedua dari $f(x)$ diperoleh:

$$f'(x_n) = f'(\alpha)(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + O(e_n^3)), \tag{2.64}$$

$$f''(x_n) = f'(\alpha)(2c_2 + 6c_3 e_n + O(e_n^2)). \tag{2.65}$$

Subtitusikan Persamaan (2.63), (2.64) dan(2.65) ke Persamaan (2.62), dengan menggunakan ekspansi deret Taylor: $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots$ dan $x_n = \alpha + e_n$, maka diperoleh:

$$x_{n+1} = \alpha + (-c_3 + c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{2.66}$$

Oleh karena $e_{n+1} = x_{n+1} - a$ maka:

$$e_{n+1} = (-c_3 + c_2^2)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad \blacksquare(2.67)$$

2.8 Rata-Rata Harmonik

Rata-rata Harmonik H pada bilangan real positif $x_{1,} x_{2,} ..., x_n$ di definisikan dengan:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_n}}. \qquad (2.68)$$

Persamaan (2.63) juga dapat ditulis ke dalam bentuk:

$$H = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{-1}}{n} \right)^{-1}. \qquad (2.69)$$

Selanjutnya diberikan dua variabel a dan b merupakan anggota bilangan real positif, sehingga diperoleh:

$$H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}},$$

$$= \frac{2}{\frac{a+b}{ab}}. \qquad (2.70)$$

Persamaan (2.70) juga dapat ditulis ke dalam bentuk:

$$H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}. \qquad (2.71)$$

2.9 Aproksimasi Turunan Kedua

Pada sub bab ini akan dijelaskan aproksimasi atau taksiran turunan kedua. Berikut ini akan dipaparkan dua buah cara taksiran yang berbeda pada turunan kedua:

a. Aproksimasi menggunakan persamaan kuadratik, oleh Chun (2007)

Misalkan kita pertimbangkan aproksimasi persamaan $f(x_n) = 0$ disekitar titik $(x_n, f(x_n))$ dengan persamaan kuadratik di x dan y sehingga

$$x^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0\,, \tag{2.72}$$

dengan

$$y(x_n) = f(x_n) \quad , y'(x_n) = f'(x_n) \quad , \; y(w_n) = f(w_n)\,, \tag{2.73}$$

dan

$$w_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{2.74}$$

Selanjutnya akan dicari turunan dari persamaan kuadratik di atas hingga turunan keduanya diperoleh

$$2x + 2ayy' + b + cy' = 0 \tag{2.75}$$

$$2 + 2ay'^2 + 2ayy'' + cy'' = 0 \tag{2.76}$$

Berdasarkan Persamaan (2.76), akan dibentuk y'' sebagai berikut

$$2 + 2ay'^2 + 2ayy'' + cy'' = 0$$

$$y''(2ay + c) = -2 - 2ay'^2$$

$$y'' = -\frac{2 + 2ay'^2}{2ay + c}. \tag{2.77}$$

Berdasarkan Persamaan (2.72), Persamaan (2.73) dan (2.75) dibentuk menjadi

$$x_n^2 + af(x_n)^2 + bx_n + cf(x_n) + d = 0$$

$$2x_n + 2af(x_n)f'(x_n) + b + cf'(x_n) = 0$$

$$w_n^2 + af(w_n)^2 + bw_n + cf(w_n) + d = 0.$$

Selanjutnya dibentuk menjadi

$$af(x_n)^2 + bx_n + cf(x_n) + d = -x_n^2 \tag{2.78}$$

$$2af(x_n)f'(x_n) + b + cf'(x_n) = -2x_n \tag{2.79}$$

$$af(w_n)^2 + bw_n + cf(w_n) + d = -w_n^2. \tag{2.80}$$

Persamaan (2.78)-(2.80) akan dibentuk kedalam sebuah matrik, yaitu

$$\left[\begin{array}{cccc|c} f(x_n)^2 & x_n & f(x_n) & 1 & -x_n^2 \\ 2f(x_n)f'(x_n) & 1 & f'(x_n) & 0 & -2x_n \\ f(w_n)^2 & w_n & f(w_n) & 1 & -w_n^2 \end{array}\right].$$

Selanjutnya, akan dilakukan operasi baris elementer (OBE) untuk mencari nilai dari c pada Persamaan (2.77), pertama dengan melakukan $b_1 - b_3$ di baris pertama pada matrik di atas diperoleh

$$\left[\begin{array}{cccc|c} f(x_n)^2 - f(w_n)^2 & x_n - w_n & f(x_n) - f(w_n) & 0 & -x_n^2 + w_n^2 \\ 2f(x_n)f'(x_n) & 1 & f'(x_n) & 0 & -2x_n \\ f(w_n)^2 & w_n & f(w_n) & 1 & -w_n^2 \end{array}\right].$$

Selanjutnya dengan melakukan $b_1 - (x_n - w_n)b_2$ pada baris pertama diperoleh

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \begin{matrix}[f(x_n)^2 - f(w_n)^2 \\ -(x_n - w_n)2f(x_n)f'(x_n)]\end{matrix} & 0 & \begin{matrix}[f(x_n) - f(w_n) \\ -(x_n - w_n)f'(x_n)]\end{matrix} & 0 & \begin{matrix}[-x_n^2 + w_n^2 \\ +(x_n - w_n)2x_n]\end{matrix} \\ 2f(x_n)f'(x_n) & 1 & f'(x_n) & 0 & -2x_n \\ f(w_n)^2 & w_n & f(w_n) & 1 & -w_n^2 \end{array}\right]$$

dari matrik di atas diperoleh

$$\begin{aligned} &[(f(x_n)^2 - f(w_n)^2 - (x_n - w_n)2f(x_n)f'(x_n))a + (f(x_n) - f(w_n) - (x_n - w_n) \\ &f'(x_n))c - (x_n - w_n)f'(x_n))c] = -x_n^2 + w_n^2 + (x_n - w_n)2x_n \end{aligned} \tag{2.82}$$

Oleh karena $w_n = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ diperoleh

$$\begin{aligned} &[(f(x_n)^2 - f(w_n)^2 - (x_n - (x_n - f(x_n)/f'(x_n)))2f(x_n)f'(x_n))a + (f(x_n) \\ &\qquad - f(w_n) - (x_n - (x_n - f(x_n)/f'(x_n)))f'(x_n))c] \\ &= -x_n^2 + (x_n - f(x_n)/f'(x_n))^2 + (x_n - (x_n - f(x_n)/f'(x_n)))2x_n \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} &[(f(x_n)^2 - f(w_n)^2 - f(x_n)/f'(x_n))2f(x_n)f'(x_n))a + (f(x_n) \\ &\qquad - f(w_n) - f(x_n)/f'(x_n))f'(x_n))c] = f(x_n)^2/f'(x_n)^2 \end{aligned} \tag{2.83}$$

maka berdasarkan Persamaan (2.83) didapat nilai c adalah

$$c = -\frac{f(x_n)^2 + af'(x_n)^2(f(w_n)^2 + f(x_n)^2)}{f(w_n)f'(x_n)^2}. \tag{2.84}$$

Pandang kembali Persamaan (2.77), lalu substitusikan Persamaan (2.84) diperoleh

$$\begin{aligned} y''(x_n) \approx f''(x_n) &= -\frac{2+2af'(x_n)^2}{2af(x_n)+c} \\ &= -\frac{2+2af'(x_n)^2}{2af(x_n) + -\dfrac{f(x_n)^2 + af'(x_n)^2(f(w_n)^2 + f(x_n)^2)}{f(w_n)f'(x_n)^2}} \\ &= \frac{2(1+af'(x_n)^2)f(w_n)f'(x_n)^2}{f(x_n)^2 + af'(x_n)^2(f(w_n)^2 - 2f(w_n)f(x_n) + f(x_n)^2)} \end{aligned}$$

$$f''(x_n) = \frac{2(1+af'(x_n)^2)f(w_n)f'(x_n)^2}{f(x_n)^2 + af'(x_n)^2(f(w_n) - f(x_n))^2}. \tag{2.85}$$

b. Aproksimasi menggunakan persamaan Hiperbola, oleh Z. Xiaojian (2008)

Salah satu persamaan yang ada pada titik $(x_n, f(x_n))$ adalah persamaan hiperbola yang memiliki bentuk:

$$axy + y + bx + c = 0. \tag{2.86}$$

Secara berturut-turut turunan pertama dan kedua dari Persamaan (2.86) adalah:

$$ay + axy' + y' + b = 0, \tag{2.87}$$

$$2ay' + axy'' + y'' = 0. \tag{2.88}$$

Apabila diberikan kondisi $y(x_n) = f(x_n)$, $y'(x_n) = f'(x_n)$, dan $y'(w_n) = f'(w_n)$ diperoleh:

$$ax_n y(x_n) + y(x_n) + bx_n + c = 0, \tag{2.89}$$

$$ay(x_n) + ax_n y'(x_n) + y'(x_n) + b = 0, \tag{2.90}$$

$$aw_n y(w_n) + y(w_n) + bw_n + c = 0. \tag{2.91}$$

Berdasarkan Persamaan (2.89), (2.90), dan (2.91) diperoleh suatu sistem persamaan linear sebagai berikut:

$$(x_n y(x_n))a + (x_n)b + c = -y(x_n),$$

$$(y(x_n) + x_n y'(x_n))a + b = -y'(x_n),$$

$$(w_n y(w_n))a + (w_n)b + c = -y(w_n).$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut, dapat dilakukan menggunakan operasi baris elementer yaitu:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x_n y(x_n) & x_n & 1 & -y(x_n) \\ y(x_n) + x_n y'(x_n) & 1 & 0 & -y'(x_n) \\ w_n y(w_n) & w_n & 1 & -y(w_n) \end{array}\right] B_1 - B_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} x_n y(x_n) - w_n y(w_n) & x_n - w_n & 0 & -y(x_n) + y(w_n) \\ y(x_n) + x_n y'(x_n) & 1 & 0 & -y'(x_n) \\ w_n y(w_n) & w_n & 1 & -y(w_n) \end{array}\right] B_1 - (x_n - w_n)B_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \begin{array}{c} x_n y(x_n) - w_n y(w_n) \\ -(x_n - w_n)(y(x_n) + x_n y'(x_n)) \end{array} & 0 & 0 & \begin{array}{c} -y(x_n) + y(w_n) \\ -(x_n - w_n)(-y'(x_n)) \end{array} \\ y(x_n) + x_n y'(x_n) & 1 & 0 & -y'(x_n) \\ w_n y(w_n) & w_n & 1 & -y(w_n) \end{array}\right]$$

Sehingga diperoleh:

$$[x_n y(x_n) - w_n y(w_n) - (x_n - w_n)(y(x_n) + y'(x_n))]a = -y(x_n) + y(w_n) - (x_n - w_n)(-y'(x_n)).$$

Oleh karena $w_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ diperoleh:

$$-[x_n y(w_n) y'(x_n) - y(x_n) y(w_n) + y(x_n)^2]a = y'(x_n) y(w_n),$$

$$a = -\frac{y'(x_n) y(w_n)}{x_n y(w_n) y'(x_n) - y(x_n) y(w_n) + y(x_n)^2}. \tag{2.92}$$

Berdasarkan Persamaan (2.88) sehingga diperoleh:

$$y''(x_n) = -\frac{2ay'(x_n)}{ax_n + 1},$$

$$= \frac{\dfrac{2y'(x_n)^2 y(w_n)}{x_n y(w_n) y'(x_n) - y(x_n) y(w_n) + y(x_n)^2}}{\dfrac{x_n y'(x_n) y(w_n)}{x_n y(w_n) y'(x_n) - y(x_n) y(w_n) + y(x_n)^2} + 1},$$

$$= \frac{2y'(x_n)^2 y(w_n)}{y(x_n)^2 - y(x_n) y(w_n)}. \tag{2.93}$$

Oleh karena $f''(x_n) = y''(x_n)$, sehingga Persamaan (2.93) dapat ditulis menjadi:

$$f''(x_n) = \frac{2f'(x_n)^2 f(w_n)}{f(x_n)^2 - f(x_n) f(w_n)}. \tag{2.94}$$