© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Model Persediaan Tanpa Kekurangan Barang

Persediaan adalah bahan atau barang yang disimpan yang akan digunakan untuk memenuhi tujuan tertentu, misalnya untuk digunakan proses produksi atau perakitan untuk dijual kembali atau suku cadang dari suatu peralatan atau mesin. Persediaan diperlukan untuk dapat melakukan proses produksi, persediaan bahan mentah dalam proses diperlukan untuk menjamin kelancaran proses produksi, sedangkan bahan jadi harus tetap tersedia agar memungkinkan perusahaan memenuhi permintaan yang terjadi.

Model persediaan memiliki banyak model dengan metode penyelesiaan yang sederhana. Hal ini tergantung pada sifat permintaan akan sebuah barang. Sehingga berdasarkan permintaan model persediaan terbagi menjadi dua kelompok yaitu : deterministik dan probabilistik. Model deterministik adalah model persediaan yang permintaannya diketahui dengan pasti.

Salah satu bentuk model persediaan deterministik yaitu model persediaan tanpa kekurangan barang. Model persedian tanpa kekurangan barang ketika persediaan mencapai titik nol, pemesanan baru seketika dilakukan dan langsung diterima seketika itu juga sehingga tidak terjadi kekurangan persediaan. Selanjutnya untuk model persediaan tanpa kekurangan barang dinotasikan t sebagai waktu dengan $t \geq 0$. Didefenisikan $I(t)$ adalah tingkat persediaan pada waktu t. Didefenisikan $D(t, I(t))$ dan $h\ (I(t))$ adalah masing-masing merupakan tingkat permintaan dan tingkat biaya. $K(P(t))$ menunjukkan tingkat biaya yang sesuai dengan tingkat produksi $P(t)$ pada waktu t. Selanjutnya diandaikan $\rho \geq 0$ menjadi tingkat potongan harga. Semua fungsi diasumsikan nonnegatif, kontinu dan terdiferensialkan.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
UIN SUSKA RIAU

Selanjutnya diberikan persamaan fungsi tujuan yaitu :

$$J(P,I) = \int_0^\infty e^{-\rho t}\{h(I(t)) + K(P(t))\}\,dt \qquad (2.1)$$

Kemudian diberikan persamaan differensial dinamik yaitu :

$$\frac{d}{dt}I(t) = P(t) - D(t, I(t)) \qquad (2.2)$$

Model digambarkan sebagai masalah kendali optimal dengan satu state variabel yaitu tingkat persediaan, dan satu variabel kontrol yaitu tingkat produksi. Pada saat permintaan terjadi pada tingkat D dan produksi terjadi pada tingkat kendali P, maka $I(t)$ akan bertambah jika $P(t) \geq D(t, I(t))$ dan $I(t)$ merupakan state persamaan.

2.2 Kestabilan

Sebelum membahas tentang kestabilan, terlebih dahulu dibahas tentang titik ekuilibrium berdasarkan definisi yang diberikan sebagai berikut :

Definisi 2.2.1 (Olsder, 1994) diberikan persamaan diferensial orde 1 yaitu $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dengan nilai awal$(0) = \boldsymbol{x}_0$, sebuah vektor $\bar{\boldsymbol{x}}$ yang memenuhi $\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0$ disebut titik ekuilibrium.

Untuk lebih memahami definisi di atas, maka diberikan beberapa contoh berikut :

Contoh 2.1 :

Tentukan titik ekuilibrium dari persamaan berikut :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = x$$

Penyelesaian :

Diketahui

$$\dot{\boldsymbol{x}} = x$$

maka diperoleh titik ekuilibriumnya :

$$\bar{\boldsymbol{x}} = 0$$

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Definisi titik ekuilibrium di atas diberikan dengan tujuan untuk memudahkan dalam memahami pengertian dari kestabilan, diberikan definisi tentang kestabilan sebagai berikut :

Definisi 2.2.2 (Olsder, 1994) Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil jika $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ sehingga $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$ maka $\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil asimtotik jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ merupakan titik stabil dan $\exists\, \delta > 0$ sehingga $lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \bar{\boldsymbol{x}}\| = 0$ memenuhi $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$. Titik ekuilibirium $\bar{\boldsymbol{x}}$ tak stabil jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ tidak stabil.

Untuk lebih memahami definisi di atas, maka diberikan beberapa contoh berikut :

Contoh 2.2 :

Tentukan kestabilan dari persamaan differensial berikut $\dot{x} = -x$ dengan diberikan titik ekuilibirium $\bar{x} = 0$.

Penyelesaian :

Sehingga dapat dicari solusinya sebagai berikut :

$$\dot{x} = -x$$

$$\frac{dx}{dt} = -x$$

$$\frac{dx}{x} = -dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int -dt$$

$$\ln x = -t + c$$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

Sehingga :

$$\ln x - c = -t$$

$$\ln x - \ln x_0 = -t$$

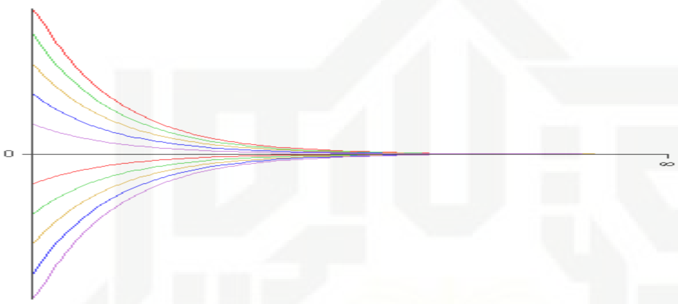
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
UIN SUSKA RIAU

$$\ln\frac{x}{x_0} = -t$$

$$\frac{x}{x_0} = e^{-t}$$

$$x = x_0 e^{-t}$$

Jika $t \to \infty$ maka $x \to 0$ dapat disimpulkan bahwa $\dot{x} = -x$ stabil karena solusinya menuju 0, sehingga terlihat pada gambar sebagai berikut :



Gambar 2.1 Grafik fungsi $f(t) = e^{-t}$

Contoh 2.3 :

Tentukan kestabilan dari persamaan differensial :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Matriks di atas dapat dijabarkan sebagai berikut :

$\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}} = -4x_1$ dan $\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{2}} = -2x_2$

sehingga dapat dicari solusi untuk masing-masing yaitu :

untuk $\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}} = -4x_1$,

$$\frac{dx_1}{dt} = -4x_1$$

$$\int \frac{dx_1}{x_1} = \int -4dt$$

$$\ln x_1 = -4t + c$$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

sehingga :

$$\ln x_1 - c \quad = -4t$$

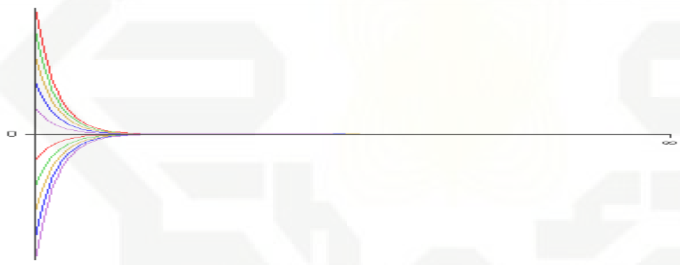
$$\ln x_1 - \ln x_0 = -4t$$

$$\ln \frac{x_1}{x_0} \quad = -4t$$

$$\frac{x_1}{x_0} = e^{-4t}$$

$$x_1 \quad = x_0 . e^{-4t}$$

maka untuk $t \to \infty$ dan $x_1 \to 0$ dapat disimpulkan bahwa $\dot{x}_1$ stabil karena solusinya menuju 0, sehingga terlihat pada gambar sebagai berikut :



Gambar 2.2 Grafik fungsi $\boldsymbol{f(t) = e^{-4t}}$

Berikutnya solusi untuk $\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{2}} = -2x_2$,

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2$$

$$\int \frac{dx_2}{x_2} = \int -2dt$$

$$\ln x_2 = -2t + c$$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

sehingga

$$\ln x_2 - c = -2t$$

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$\ln x_2 - \ln x_0 = -2t$$

$$\ln \frac{x_2}{x_0} = -2t$$

$$\frac{x_2}{x_0} = e^{-2t}$$

$$x_2 = x_0 . e^{-2t}$$

jika $t \to \infty$ maka $x_2 \to 0$ dapat disimpulkan bahwa $\dot{x}_2$ stabil karena solusinya menuju 0. Dari kedua solusi tersebut dapat disimpulkan bahwa $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ stabil karena kedua solusi menuju 0, maka terlihat pada gambar sebagai berikut :

Gambar 2.3 Grafik fungsi $f(t) = e^{-2t}$

2.3 Kendali Optimal Waktu Kontinu

Pada bagian ini, dibahas mengenai kendali optimal untuk waktu kontinu. Pembahasan dimulai dari masalah umum kendali optimal waktu kontinu, yang dilanjutkan masalah untuk kendali lingkar terbuka untuk waktu tak berhingga.

2.3.1 Masalah Umum Kendali Optimal Waktu Kontinu

Pada bagian ini dibahas masalah umum kendali optimal waktu kontinu untuk persamaan diferensial dinamik untuk waktu t.

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t) \tag{2.3}$$

dengan $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ merupakan vektor *state* internal dan $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ merupakan vektor kendali input, dan diberikan fungsi tujuan yang meminimalkan fungsi objektif, dengan persamaan sebagai berikut :

$$J(t_0) = \phi\big(\boldsymbol{x}(T_f), T_f\big) + \int_{t_0}^{T_f} L\,(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)\; dt \tag{2.4}$$

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

dengan t_0 adalah waktu awal dan T_f adalah waktu akhir.

Selanjutnya, untuk mencari solusi masalah kendali optimal waktu kontinu maka didefinisikan persamaan-persamaan berikut yang diperlukan untuk sebuah proses meminimalkan fungsi ojektif.

Persamaan Hamilton: $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) = L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)$ (2.5)

Persamaan *state* : $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)(t), \quad t \geq t_0$ (2.6)

Persamaan *kostate* : $-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial f^T}{\partial x}\boldsymbol{\lambda}(t) + \frac{\partial L(x,u,t)}{\partial x}(t),\ t \leq T_f$ (2.7)

Kondisi *stasionary* : $0 = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial L(x,u,t)}{\partial \boldsymbol{u}}(t) + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{u}}\boldsymbol{\lambda}(t)$ (2.8)

2.3.2 Kendali Optimal Linier Kuadratik Untuk Kontinu Satu Kendali

Pada bagian ini dibahas masalah kendali optimal linier kuadratik untuk kontinu satu kendali, didefinisikan persamaan sistem linier untuk waktu t yaitu :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u} \tag{2.9}$$

dengan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ dan kendali $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, dan meminimalkan fungsi objektif yaitu :

$$J(t_0) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T(T_f)S(T_f)\boldsymbol{x}(T_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T_f} (\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u})dt \tag{2.10}$$

dengan t_0 waktu awal dan T_f waktu akhir.

Diasumsikan Q dan $S(T_f)$ semi definit positif $(Q \geq 0, S(T_f) \geq 0)$ selanjutnya Q dan $S(T_f)$ memiliki nilai eigen nonnegatif sehingga $\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{x}^T(T_f)S(T_f)\boldsymbol{x}(T_f)$ bernilai nonnegatif untuk setiap $\boldsymbol{x}(t)$. Diasumsikan juga R adalah definit positif $R > 0$ sehingga R memiliki nilai eigen positif sehingga $\boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u} > 0$untuk setiap $\boldsymbol{u}(t) \neq 0$. Selanjutnya dibahas algoritma untuk menentukan persamaan aljabar Riccati sekaligus fungsi kendali yang diperlukan untuk meninimalkan fungsi tujuan. Berdasarkan Persamaan $(2.5) - (2.8)$ diperoleh persamaan-persamaan sebagai berikut :

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Persamaan Hamilton: $H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}^T Q\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T R\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T(A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u})$ (2.11)

Persamaan *state* : $\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$ (2.12)

Persamaan *kostate* : $-\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{\partial H}{\partial x} = Q\boldsymbol{x} + A^T\boldsymbol{\lambda}$ (2.13)

Persamaan *stasionary*: $0 = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = R\boldsymbol{u} + B^T\boldsymbol{\lambda}$ (2.14)

Berdasarkan Persamaan (2.14) diperoleh $\boldsymbol{u} = -R^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}$ (2.15)

Selanjutnya Persamaan (2.15) disubtitusikan ke Persamaan (2.12) maka diperoleh yaitu :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} - BR^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}. \tag{2.16}$$

Dengan mengambil Persamaan (2.16) dan Persamaan (2.13) maka dapat dibuat sistem homogen Hamilton yaitu :

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A & -BR^{-1}B^T\\ -Q & -A^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{\lambda}\end{bmatrix} \tag{2.17}$$

dengan matriks koefesien disebut matriks Hamiltonian. Diketahui t_0 dan $\boldsymbol{x}(t_0)$, waktu akhir T_f diketahui, state akhir $\boldsymbol{x}(T_f)$ bergantung kepada T_f sehingga $d\boldsymbol{x}(t_f)$ tidak nol, maka kondisi akhir yaitu :

$$\boldsymbol{\lambda}(T_f) = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{x}} \Big|_{T_f} = S(T_f)\boldsymbol{x}(T_f) \tag{2.18}$$

untuk mencari kendali optimal, maka akan diselesaikan masalah dua titik batas.

Diamsumsikan $\boldsymbol{x}(t)$ dan $\boldsymbol{\lambda}(t)$ memenuhi Persamaan (2.18) untuk setiap interval $[t_0, T_f]$ sehingga :

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = S(t)\boldsymbol{x}(t) \tag{2.19}$$

dengan $S(T_f)$ adalah matriks $n \times n$. Selanjutnya diferensialkan Persamaan (2.19) didapat $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{S}\boldsymbol{x} + S\dot{\boldsymbol{x}}$. Kemudian dari Persamaan (2.16) diperoleh:

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{S}\boldsymbol{x} + S\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{S}\boldsymbol{x} + S(A\boldsymbol{x} - BR^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda}) \tag{2.20}$$

Dari Persamaan (2.13) didapat $-\dot{\boldsymbol{\lambda}} = Q\boldsymbol{x} + A^T\boldsymbol{\lambda} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -Q\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{\lambda}$. Selanjutnya, disubtitusikan Persamaan (2.20) ke $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -Q\boldsymbol{x} - A^T\boldsymbol{\lambda}$, diperoleh :

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$-Q\mathbf{x} - A^T\boldsymbol{\lambda} = \dot{S}\boldsymbol{x} + S(A\boldsymbol{x} - BR^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda})$$

$$-\dot{S}\mathbf{x} = SA\mathbf{x} - SBR^{-1}B^T\boldsymbol{\lambda} + Q\mathbf{x} + A^T\boldsymbol{\lambda}, \text{ dimana: } \boldsymbol{\lambda} = S\mathbf{x}$$

$$\dot{S} = -A^TS - SA + SBR^{-1}B^TS - Q \qquad (2.21)$$

Karena Persamaan (2.21) memenuhi untuk setiap waktu *t*.

Selanjutnya untuk $T_f \rightarrow \infty$ maka Persamaan (2.21) diperoleh sebagai berikut :

$$0 = A^TS + SA - SBR^{-1}B^TS + Q \qquad (2.22)$$

Jika Persamaan (2.15) memiliki solusi S. Maka diperoleh kendali optimal sebagai berikut :

$$\boldsymbol{u}^* = -R^{-1}B^TS\boldsymbol{x} \qquad (2.23)$$

2.3.3 Kendali Optimal Linier Kuadratik untuk Kontinu Satu Kendali untuk Kasus Skalar

Pada bagian ini membahas masalah kendali optimal linier kuadratik untuk kontinu satu kendali untuk kasus scalar, dari Persamaan (2.9) dan (2.10) persamaan ini dirubah kebentuk scalar dengan mensubsitusikan $A = a,\ B = b$ dan dengan $Q = q, R = r$, sehingga diperoleh :

$$\dot{x} = ax + bu \qquad (2.24)$$

Dari Persamaan (2.10) dibentuk menjadi :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\boldsymbol{x}^2\, q + \boldsymbol{u}^2 r)dt \qquad (2.25)$$

Maka diperoleh persamaan aljabar Riccati sebagai berikut :

$$0 = as + sa - \frac{s^2b^2}{r} + q$$

$$-\frac{b^2}{r}\, s^2 + 2as + q = 0 \qquad (2.26)$$

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Dari persamaan (2.26) maka terdapat tiga kasus sebagai berikut :

1. Kasus D = 0

   Makasolusi persamaan diferensial Riccati (2.26) sebagai berikut

$$S_{1,2} = \frac{ar}{b^2}$$

   Sehingga fungsi kendali yang optimal dapat diperoleh.

2. Kasus D < 0

   Maka persamaan diferensial Riccati (2.26) tidak memiliki solusi.

3. Kasus D > 0

   Maka solusi dari persamaan diferensial sebagai berikut :

$$S_1 = \frac{2a+\sqrt{D}}{\frac{2b^2}{r}} \quad \text{dan} \quad S_2 = \frac{2a-\sqrt{D}}{\frac{2b^2}{r}}$$

   Akibatnya masalah optimal memiliki solusi tapi berbeda.