BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

Definisi 2.1 (Howard Anton, 1987): Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Di bentuk sistem Persamaan linier sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n \\
f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n \\
\vdots \qquad\qquad & \qquad\qquad \vdots \\
f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n,
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

dari sistem Persamaan di atas dibentuk matriks yaitu :

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Selanjutnya Persamaan (2.2) dinotasikan :

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{dengan } a_{ij} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{dan } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix},
$$

diperoleh sistem Persamaan liniernya adalah $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ dengan $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ dan diferensial dari matriks $[dx_1 \;\; dx_2 \;\; \dots \;\; dx_n]^T$ dinotasikan dengan $d\boldsymbol{x}$.

Selanjutnya, diferensial parsial dari $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ terhadap $\boldsymbol{x}$ yang disebut matriks Jacobian adalah :

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Dengan menggunakan sifat dari Persamaan di atas maka diperoleh sebagai berikut :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{Ax}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}. \tag{2.4}$$

Contoh 2.1:

Carilah $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ untuk $f_1 = 2x_1 + 3x_2$ dan $f_2 = 4x_1 + 7x_2$

Penyelesaian:

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{x_1}} & \frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{x_2}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{x_1}} & \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{x_2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1 + 3x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(2x_1 + 3x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(4x_1 + 7x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(4x_1 + 7x_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad = \boldsymbol{A}$$

Selanjutnya, Jika diambil $\boldsymbol{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]^T$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, maka berlaku hubungan sebagai berikut :

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \boldsymbol{y}, \tag{2.5}$$

Contoh 2.2:

Tentukan $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$ dengan $\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}} = [y_1 \quad y_2]$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{x}) = [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(y_1 x_1 + y_2 x_2) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y}. \tag{2.6}$$

Contoh 2.3:

Tentukan $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y}$ dengan $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} 2x_1 & + & 3x_2 \\ 4x_1 & + & 7x_2 \end{bmatrix}$$

$$= (2x_1 + 3x_2)y_1 + (4x_1 + 7x_2)y_2$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\ (2x_1 y_1 + 3x_2 y_1 + 4x_1 y_2 + 7x_2 y_2) = \begin{bmatrix} 2y_1 & + & 4y_2 \\ 3y_1 & + & 7y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{y}$$

Jika matriks simetri, maka :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x^T A x}) = 2\boldsymbol{Ax} \tag{2.7}$$

Contoh 2.4:

Tentukan $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x^T A x}) = 2\boldsymbol{Ax}$ dengan $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x^T A x}) = [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= [x_1 \quad x_2] \begin{bmatrix} 2x_1 & + & 5x_2 \\ 5x_1 & + & 3x_2 \end{bmatrix}$$

$$= x_1(2x_1 + 5x_2) + x_2(5x_1 + 3x_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(2{x_1}^2 + 5x_1x_2 + 5x_1x_2 + 3{x_3}^2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial_{x_1}} & (2{x_1}^2 + 5x_1x_2 + 5x_1x_2 + 3{x_2}^2) \\ \frac{\partial}{\partial_{x_2}} & (2{x_1}^2 + 5x_1x_2 + 5x_1x_2 + 3{x_2}^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial_{x_1}} & (2{x_1}^2 + 10x_1x_2 + 3{x_2}^2) \\ \frac{\partial}{\partial_{x_2}} & (2{x_1}^2 + 10x_1x_2 + 3{x_2}^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4x_1 & + & 10x_2 \\ 10x_1 & + & 6x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 2x_1 & + & 5x_2 \\ 5x_1 & + & 3x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2Ax$$

2.2 Persamaan Differensial Biasa Orde Dua

Persamaan differensial orde dua merupakan persamaan differensial biasa yang turunan tertingginya berorde dua. Secara umum persamaan biasa orde dua dapat di tulis dalam bentuk :

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y = g(x) \tag{2.8}$$

Dengan fungsi-fungsi $p(x), q(x)$ dan $r(x)$ adalah koefisien dari persamaan differensial tersebut. Jika $g(x) = 0$, maka persamaan disebut persamaan differensial biasa orde dua homogen. Selanjutnya, jika $g(x) \neq 0$, maka persamaan disebut persamaan differensial biasa orde dua nonhomogen.

2.2.1 Persamaan Differensial Biasa Homogen Koefisien Konstanta

Diberikan persamaan differensial biasa homogen orde dua sebagai berikut:

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\frac{dy}{dx} + r(x)y = 0 \tag{2.9}$$

dengan $p(x), q(x)$ dan $r(x)$ adalah konstanta dan $p(x) \neq 0$. Selanjutnya dengan menggantikan $p(x) = a$, $q(x) = b$, dan $r(x) = c$ maka Persamaan (2.9) dapat ditulis kembali dalam bentuk,

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{2.10}$$

Persamaan (2.10) dapat diselesaikan dengan memisalkan $y = e^{rx}$, sehingga akan diperoleh

$$\begin{aligned} a\frac{d^2(e^{rx})}{dx^2} + b\frac{d(e^{rx})}{dx} + c(e^{rx}) &= 0 \\ ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} &= 0 \\ e^{rx}(ar^2 + br + c) &= 0 \end{aligned}$$

Oleh karena, $e^{rx} = 0$ maka $y(x) = e^{rx}$ merupakan penyelesaian Persamaan (2.10) jika dan hanya jika r memenuhi Persamaan karakteristik,

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2.11}$$

Penyelesaian dari Persamaan karakteristik (2.11) adalah

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \quad \text{dan} \quad r_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

Penyelesain dari persamaan linier orde dua dengan persamaan karakteristik pada Persamaan (2.11) bergantung pada nilai deskriminan ($D = b^2 - 4ac$).

Adapun bentuk-bentuk penyelesain berdasarkan nilai deskriminan adalah sebagai berikut :

1. Akar-akar Real dan Berbeda ($b^2 - 4ac > 0$)

Jika akar-akar r_1 dan r_2 pada Persamaan karakteristik $ar^2 + br + c$ adalah real dan berbeda, maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.10) adalah $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$.

2. Akar-akar Berulang ($b^2 - 4ac = 0$)

Jika akar-akar r_1 dan r_2 pada Persamaan karakteristik $ar^2 + br + c$ adalah sama $r_1 = r_2$ maka penyelesain umum dari Persamaan (2.10) adalah $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + x c_2 e^{r_2 x}$.

3. Akar-akar imajiner

Jika akar-akar r_1 dan r_2 pada Persamaan karakteristik $ar^2 + br + c$ adalah bilangan kompleks ($r_1 = \alpha + i\beta \; dan \; r_2 = \alpha - i\beta$), maka penyelesaian umum dari Persamaan (2.10) adalah $y(x) = e^{ax}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sembarang.

Contoh 2.5 :

Selesaikan persamaan diferensial $\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} + 21y = 0$

Penyelesaian :

Berdasarkan soal persamaan karakteristiknya adalah

$$r^2 - 10r + 21 = 0$$

Diskiriminan untuk persamaan diatas adalah 1. Oleh karena itu $D > 0$, maka penyelesaian Persamaan diferensial tersebut adalah akar real dan berbeda yaitu $r_1 = 7$ dan $r_2 = 3$, sehingga diperoleh $y(x) = c_1 e^{7x} + c_2 e^{3x}$.

2.2.2 Persamaan Diferensial Biasa Nonhomogen Koefisien Konstanta

Lihatlah Persamaan diferensial biasa nonhomogen berikut :

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = g(x) \qquad (2.12)$$

Jika dimisalkan $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ adalah penyelesaian untuk Persamaan homogen

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0$$

dan $y_p(x)$ adalah penyelesaian untuk Persamaan nonhomogen. Maka penyelesaian umum untuk nonhomogen (2.12) dapat ditulis dalam bentuk

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) \qquad (2.13)$$

Contoh 2.6 :

Tentukan penyelesaian umum dari Persamaan $\frac{d^2y}{dx} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x^2$

Penyelesaian :

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah menentukan terlebih dahulu penyelesaian umum Persamaan homogen $\frac{d^2y}{dx} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$.

Persamaan karakteristik untuk Persamaan homogen diatas adalah

$$r^2 - 5r + 6 = (r-3)(r-2) = 0$$

maka diperoleh penyelesaian $y_c(x) = c_1e^{3x} + c_2e^{2x}$.

Selanjutnya untuk penyelesaian $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$

Sehingga ,

$$y_p'(x) = 2Ax + B \text{ dan } y_p''(x) = 2A$$

Untuk menentukan nilai A, B dan C maka substitusikan nilai $y_p(x), y_p'(x)$ dan $y_p''(x)$ ke dalam Persamaan $\frac{d^2y}{dx} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = x^2$ sehingga diperoleh $2A - 5(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx + C) = x^2$

Dengan menggunakan kesamaan koefisien untuk Persamaan diatas, maka diperoleh nilai $A = \frac{1}{6}, B = \frac{5}{18}$ dan $C = \frac{31}{108}$

Sehingga , $y_p(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{31}{108}$

Jadi, penyelesaian umum untuk persoalan diatas adalah menjumlahkan Persamaan $y_c(x)$ dengan Persamaan $y_p(x)$, sehingga diperoleh

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{5}{18}x + \frac{31}{108}$$

2.3 Sistem Persamaan Differensial

Berikut ini akan dibahas solusi sistem persamaan differensial homogen tanpa kendali (yaitu dengan kendali $u = 0$)

$$\dot{\boldsymbol{x}}\,(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) \quad \text{dengan } x(0) = x_0 \qquad (2.14)$$

Solusi sistem Persamaan (2.15) dinyatakan dengan $\boldsymbol{x}(t) = e^{At}x_0$ dengan $e^{At} = Te^{Dt}T^{-1}$. Selanjutnya D didefinisikan dengan $T^{-1}AT$. Lebih jelasnya diberikan contoh sebagai berikut :

Contoh 2.7 :

Diberikan Persamaan differensial $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ dengan matriks A adalah

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Tentukan solusi untuk $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x},\ x(0) = 1$

Penyelesaian:

Vektor karakteristik dari matriks A adalah :

$$\boldsymbol{x_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vektor bersesuain dengan nilai karakteristik $\lambda_1 = 5$ $\lambda_2 = 5$ dan $\lambda_3 = 1$. Selanjutnya di bentuk matriks T sebagai berikut :

$$T = [\boldsymbol{x_1}|\boldsymbol{x_2}|\boldsymbol{x_3}]$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks T adalah nonsingular, sehingga matriks T^{-1} ada, yaitu

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks A dapat diagonalkan menjadi

$$D = T^{-1}AT$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dalam hal ini, matriks A bisa ditulis sebagai $A = TDT^{-1}$. Selanjutnya matriks e^{At} diberikan oleh

$$e^{At} = Te^{Dt}T^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2\, e^t + 1/2\, e^{2t} & 1/2\, e^t - 1/2\, e^{2t} & 0 \\ 1/2\, e^t + 1/2\, e^{2t} & 1/2\, e^t + 1/2\, e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

2.4 Kestabilan

Sebelum membahas tentang kestabilan, terlebih dahulu dibahas tentang ekuilibrium berdasarkan definisi yang diberikan sebagai berikut :

Definisi 2.6(Olsder, 1994) diberikan Persamaan diferensial orde 1 yaitu $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dengan nilai awal$(0) = \boldsymbol{x}_0$, sebuah vektor $\overline{\boldsymbol{x}}$ yang memenuhi $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0$ disebut titik ekuilibrium.

Contoh 2.8 :

Tentukan titik ekuilibrium dari Persamaan berikut :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = x$$

Penyelesaian :

karena

$$\dot{\boldsymbol{x}} = x$$

maka diperoleh titik ekuilibriumnya :

$$\bar{\boldsymbol{x}} = 0$$

Definisi titik ekuilibrium di atas diberikan dengan tujuan untuk memudahkan dalam memahami pengertian dari kestabilan, diberikan definisi tentang kestabilan sebagai berikut :

Definisi 2.2(Olsder, 1994) Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil jika $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ sehingga $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$ maka $\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil asimtotik jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ merupakan titik stabil dan $\exists\, \delta > 0$ sehingga $lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \bar{\boldsymbol{x}}\| = 0$ memenuhi $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$. Titik ekuilibirium $\bar{\boldsymbol{x}}$ tak stabil jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ tidak stabil.

Untuk lebih memahami teorema di atas, maka diberikan beberapa contoh berikut :

Contoh 2.9 :

Tentukan kestabilan dari Persamaan differensial berikut $\dot{x} = -x$ dengan diperoleh titik ekuilibirium $x = 0$.

Penyelesaian :

$$\dot{x} = -x$$

$$\frac{dx}{dt} = -x$$

$$\frac{dx}{x} = -dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int -dt$$

$\ln x = -t + c$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

Sehingga :

$$\ln x - c = -t$$

$$\ln x - \ln x_0 = -t$$

$$\ln \frac{x}{x_0} = -t$$

$$\frac{x}{x_0} = e^{-t}$$

$$x = x_0 e^{-t}$$

Jika $t \to \infty$ maka $x \to 0$ dapat disimpulkan bahwa $\dot{x} = -x$ stabil karena setiap solusinya menuju 0.

Contoh 2.10 :

Tentukan kestabilan dari Persamaan differensial :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Matriks di atas dapat dijabarkan sebagai berikut :

$\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}} = -4x_1$ dan $\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{2}} = -2x_2$

sehingga dapat dicari solusi untuk masing-masing yaitu :

untuk $\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}} = -4x_1$,

$$\frac{dx_1}{dt} = -4x_1$$

$$\int \frac{dx_1}{x_1} = \int -4dt$$

$$\ln x_1 = -4t + c$$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

sehingga :

$$\ln x_1 - c = -4t$$

$$\ln x_1 - \ln x_0 = -4t$$

$$x_1 = x_0 e^{-4t}$$

maka untuk $t \to \infty$ dan $x_1 \to 0$ dapat disimpulkan bahwa $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ stabil karena setiap solusinya menuju 0.

Berikutnya solusi untuk $\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{2}} = -2x_2$,

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2$$

$$\int \frac{dx_2}{x_2} = \int -2dt$$

$$\ln x_2 = -2t + c$$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

sehingga

$$\ln x_2 - c = -2t$$

$$\ln x_2 - \ln x_0 = -2t$$

$$x_2 = x_0 e^{-2t}$$

jika $t \to \infty$ maka $x_2 \to 0$ dapat disimpulkan bahwa $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ stabil karena setiap solusinya menuju 0. Dari kedua solusi tersebut dapat disimpulkan bahwa $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ stabil asimtotik karena kedua solusi menuju 0.

Selain cara di atas, menentukan kestabilan dapat juga digunakan nilai eigen yang dijelaskan oleh Olsder (1994) yaitu persamaan $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ akan stabil jika mempunyai nilai eigen kecil dari nol dan tidak stabil jika non negatif.

Contoh 2.11 :

Tentukan kestabilan dari Persamaan differensial :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Maka matriks di atas akan dicari nilai eigen sebagai berikut :

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda + 4 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda + 4)(\lambda + 2) - 0 = 0$$

maka diperoleh nilai eigennya,

$$\lambda_1 = -4 \text{ dan } \lambda_2 = -2$$

karena didapat nilai $\lambda_i < 0, i = 1, 2$ maka dapat disimpulkan bahwa Persamaan di atas merupakan stabil asimtotik.

2.5 Kendali Optimal Waktu Kontinu

Selanjutnya pada bagian ini, akan dibahas tentang kendali optimal waktu kontinu.

Diberikan persamaan fungsi kendali secara umum masalah kendali optimal waktu kontinu sistem dinamis untuk waktu *t* sebagai berikut :

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)$$

dengan$\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ merupakan vektor *state* internal dan $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ merupakan vektor kendali input, dan diberikan fungsi tujuan yang meminimalkan fungsi objektif, dengan Persamaan sebagai berikut :

$$J(t_0) = \phi\big(\boldsymbol{x}(T_f), T_f\big) + \int_{t_0}^{T_f} L\,(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), t)\,dt, \qquad (2.15)$$

dengan t_0 adalah waktu awal dan T_f adalah waktu akhir.

Kemudian, untuk menentukan solusi dari masalah umum kendali optimal waktu kontinu diperlukan persamaan-persamaan yang berfungsi untuk meminimalkan fungsi objektif, adapun Persamaan itu adalah sebagai berikut:

Persamaan Hamilton: $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) = L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t).$ (2.16)

Persamaan *state* : $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)(t), \quad t \geq t_0.$ (2.17)

Persamaan *kostate* : $-\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial f^T}{\partial x}\boldsymbol{\lambda}(t) + \frac{\partial L(x,\boldsymbol{u},t)}{\partial x}(t),\ t \leq T_f.$ (2.18)

Kondisi *stasionary* : $0 = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial L(x,\boldsymbol{u},t)}{\partial \boldsymbol{u}}(t) + \frac{\partial f^T}{\partial \boldsymbol{u}}\boldsymbol{\lambda}(t).$ (2.19)

2.6 Model Persediaan Tanpa Kekurangan Barang

Persediaan adalah bahan atau barang yang disimpan yang akan digunakan untuk memenuhi tujuan tertentu, misalnya untuk digunakan proses produksi atau perakitan untuk dijual kembali atau suku cadang dari suatu peralatan atau mesin. Persediaan diperlukan untuk dapat melakukan proses produksi, persediaan bahan mentah dalam proses diperlukan untuk menjamin kelancaran proses produksi, sedangkan bahan jadi harus tetap tersedia agar memungkinkan perusahaan memenuhi permintaan yang terjadi.

Model persediaan memiliki banyak model dengan metode penyelesaian yang sederhana. Hal ini tergantung pada sifat permintaan akan sebuah barang. Sehingga berdasarkan permintaan model persediaan terbagi menjadi dua kelompok yaitu deterministik dan probabilistik. Model deterministik adalah model persediaan dimana permintaan diketahui dengan pasti, ada jenisnya yang statis dan ada juga yang dinamis. Sedangkan model probabilistik adalah model persediaan dimana permintaan tidak diketahui dengan pasti, ada jenisnya yang stasioner yaitu fungsi kepadatan probabilitas permintaan tetap dan ada juga yang tidak stasioner yaitu fungsi kepadatan probabilitasnya berubah-ubah.

Persedian tanpa kekurangan barang itu ketika persediaan mencapai titik nol, pemesanan baru seketika dilakukan dan langsung diterima seketika itu juga sehingga tidak terjadi kekurangan persediaan. Sebuah perusahaan yang memproduksi sebuah produk. Diasumsikan bahwa keputusan di masa yang akan datang dihadapkan terbatas, dengan panjang perencanaan sebesar T. Keterbatasan rencana di masa yang akan dating adalah sangat penting dan harus tepat karena banyak perusahaan yang peduli dengan jangka menengah kegiatan pasar.

Selanjutnya dinotasikan t sebagai waktu untuk $t \geq 0$, misalkan $I(t)$ adalah tingkat persediaan pada waktu t. Dimisalkan $D(t, I(t))$ dan $h\ (I(t))$ adalah masing-masing merupakan tingkat permintaan dan tingkat biaya. $K(P(t))$ menunjukkan tingkat biaya yang sesuai dengan tingkat produksi $P(t)$ pada waktu t. Selanjutnya diandaikan $\rho \geq 0$ menjadi tingkat potongan harga. Semua fungsi diasumsikan nonnegatif, kontinu dan terdiferensialkan. Karena $t > 0$, masalah kontrol optimal untuk kasus persediaan sebagai berikut :

Diberikan Persamaan fungsi tujuan yang diminimalkan dengan syarat $P(t) \geq D\big(t, I(t)\big)$ yaitu :

$$J(P,I) = \int_0^T e^{-\rho t}\{h(I(t)) + K(P(t))\}dt \tag{2.20}$$

Kemudian didapat Persamaan differensial dinamik satu kendali

$$\frac{d}{dt}I(t) = P(t) - D(t, I(t)), \qquad I(0) = I_0,\ I(T) = I_T \tag{2.21}$$

Model digambarkan sebagai masalah kontrol optimal dengan satu state variabel yaitu tingkat persediaan, dan satu variabel kontrol yaitu tingkat manufaktur. Pada saat permintaan terjadi pada tingkat D dan produksi terjadi pada tingkat kendali P, maka $I(t)$ bertambah jika berkembang sesuai dengan dinamika berbentuk state persamaan. Kendala $P(t) \geq D(t, I(t))$ dengan persamaan state diperoleh $I(t) \geq I_0$ dan tingkat I senantiasa tidak kekurangan. Oleh karena itu, kekurangan tingkat I tidak diperbolehkan.