BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

Defenisi 2.1 (Howard Anton, 1987) Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri matriks. Matriks bisa dibentuk dari sistem persamaan linear. Misalkan sistem persamaan linear sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n \\
f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nn}x_n
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Sistem persamaan linear (2.1) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$
\begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots a_{nn}x_n \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{2.2}
$$

Selanjutnya, Persamaan (2.2) dapat dituliskan kembali

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{dengan } a_{ij} \in \mathbb{R}, \; \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{dan } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}.
$$

Persamaan (2.2) dapat ditulis menjadi $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ dengan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ dan diferensial dari matriks $[dx_1 \;\; dx_2 \;\; \dots \;\; dx_n]^T$ dinotasikan dengan $d\boldsymbol{x}$. Selanjutnya, turunan parsial dari $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ terhadap $\boldsymbol{x}$ yang disebut matriks Jacobian adalah :

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A \tag{2.3}$$

Selanjutnya diambil: $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ dan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

maka berlaku:

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial(\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x} + A^T \boldsymbol{x}. \tag{2.4}$$

Jika matriks *A* pada Persamaan (2.4) adalah matriks simetri, maka;

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}) = 2A\boldsymbol{x}. \tag{2.5}$$

Contoh 2.1:

Carilah $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ untuk $f_1 = 2x_1 + 3x_2$ dan $f_2 = 4x_1 + 7x_2$

Penyelsaian:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1 + 3x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(2x_1 + 3x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}(4x_1 + 7x_2) & \frac{\partial}{\partial x_2}(4x_1 + 7x_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = A.$$

Selanjutnya, jika diambil $\boldsymbol{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n]^T$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, maka berlaku hubungan berikut

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial(\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}, \tag{2.6}$$

dan

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}^T A^T\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(\boldsymbol{x}^T A^T\boldsymbol{y})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial(\boldsymbol{x}^T A^T\boldsymbol{y})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = A^T\boldsymbol{y}. \tag{2.7}$$

Contoh 2.2:

Tentukan $\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x}) = A^T\boldsymbol{y}$ dengan $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y}^T = [y_1 \quad y_2]$ dan $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}^T A\boldsymbol{x} &= [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= [y_1 \quad y_2] \begin{bmatrix} 2x_1 & + & 3x_2 \\ 4x_1 & + & 7x_2 \end{bmatrix} \\
&= (\,2x_1 + 3x_2)y_1 + (4x_1 + 7x_2)y_2 \\
\frac{\partial}{\partial x} &= (2x_1y_1 + 3x_2y_1 + 4x_1y_2 + 7x_2y_2) = \begin{bmatrix} 2y_1 & + & 4y_2 \\ 3y_1 & + & 7y_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2y_1 & + & 4y_2 \\ 3y_1 & + & 7y_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\
&= A^T\boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

2.2 Persamaan Diferensial Biasa Nonhomogen Koefisien Konstanta

Bentuk umum persamaan diferensial biasa nonhomogen diberikan sebagai berikut:

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = g(x) \tag{2.8}$$

Selanjutnya dimisalkan $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ adalah penyelesaian untuk persamaan homogen.

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{2.9}$$

dan $y_p(x)$ adalah penyelesaian untuk persamaan nonhomogen. Jika penyelesaian $\frac{dy_{p(x)}}{dx}$ diberikan oleh $\frac{dy^0_{p(x)}}{dx} = Ax^2 + Bx + C$ sehingga $\frac{dy_{p(x)}}{dx} = 2Ax + B$ dan $\frac{dy^2_{p(x)}}{dx} = 2A$. Untuk menentukan nilai A, B dan C subsitusikan nilai-nilai $\frac{dy^0_{p(x)}}{dx}$, $\frac{dy_{p(x)}}{dx}$, dan $\frac{dy^2_{p(x)}}{dx}$ ke dalam Persamaan (2.9) dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{dy^0_{p(x)}}{dx} = \frac{dy^0_{C(x)}}{dx} + \frac{dy^0_{p(x)}}{dx} \tag{2.10}$$

Contoh 2.3

Tentukan penyelesaian umum dari persamaan diferensial biasa nonhomogen berikut:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = x^2$$

Penyelesaian:

Langkah pertama yang harus dilakukan adalah menentukan terlebih dahulu penyelesaian umum persamaan diferensial biasa homogen.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = 0$$

Kemudian dibentuk persamaan karakteristik untuk persamaan homogennya yaitu:

$$r^2 + 3r - 4 = (r+4)(r-1) = 0$$

maka diperoleh penyelesian:

$$\frac{dy^0_{C(x)}}{dx} = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{x}$$

Selanjutnya untuk penyelesaian $y_p(x)$ diberikan oleh:

$$\frac{dy^0_{p(x)}}{dx} = Ax^2 + Bx + C$$

Sehingga,

$$\frac{dy_{p(x)}}{dx} = 2Ax + B \text{ dan } \frac{dy^2_{p(x)}}{dx} = 2A$$

Untuk menentukan nilai A, B dan C maka disubsitusikan nilai-nilai $\frac{dy^0_{p(x)}}{dx}, \frac{dy_{p(x)}}{dx}$, dan $\frac{dy^2_{p(x)}}{dx}$ ke dalam persamaan $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = x^2$ sehingga diperoleh:

$$2A + 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

dengan menggunakan kesamaan koefisien untuk persamaan diatas maka, diperoleh nilai $A = -\frac{1}{4}$, $B = -\frac{3}{8}$, dan $C = -\frac{13}{32}$, sehingga:

$$\frac{dy^0_{p(x)}}{dx} = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}$$

Jadi, penyelesaian umum untuk persoalan diatas adalah menjumlahkan persamaan $\frac{dy^0_{C(x)}}{dx}$ dengan persamaan $\frac{dy^0_{p(x)}}{dx}$, sehingga diperoleh:

$$\frac{dy^0_{p(x)}}{dx} = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}$$

2.3 Sistem Persamaan Diferensial

Berikut ini akan dibahas solusi sistem persamaan diferensial homogen tanpa kendali yaitu dengan kendali $u = 0$.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} \text{ dengan } x(0) = x_0 \tag{2.11}$$

$$\dot{x} = x$$

$$\frac{dx}{x} = x$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int dt$$

$$lnx = t + c$$

Dengan mengambil $x(0) = x_0$ maka untuk $t = 0$, $x(0) = x_0$, sehingga;

$$lnx - t = c$$

$$lnx_0 - 0 = c$$

$$c = lnx_0$$

Sehingga

$$lnx - c = t$$

$$lnx - lnx_0 = t$$

$$ln\frac{x}{x_0} = t$$

$$\frac{x}{x_0} = e^t$$

$$x = e^t x_0$$

Solusi sistem Persamaan (2.11) dinyatakan dengan $x(t) = e^{t}x_0$ dengan

$e^{t} = Te^{Dt}T^{-1}$.

Selanjutnya D didefinisikan dengan $T^{-1}AT$, lebih jelasnya diberikan contoh berikut:

Contoh 2.4 :

Diberikan persamaan diferensial $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, dengan matriks A adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Tentukan solusi untuk penyelesaian $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ jika $x(0) = 1$.

Penyelesaian:

Dibentuk vektor-vektor eigen sebagai berikut:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Yang bersesuain dengan nilai eigen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ dan $\lambda_3 = 3$.

Selanjutnya dibentuk matriks T sebagai berikut:

$$T = [x_1|x_2|x_3]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Matriks T adalah nonsingular, sehingga matriks T^{-1} ada, yaitu:

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Sehingga matriks A dapat diagonalkan menjadi:

$$D = T^{-1}AT$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Dalam hal ini, matriks A bisa ditulis sebagai $A = TDT^{-1}$. Selanjutnya matriks e^t diberikan oleh:

$$e^t = Te^{Dt}T^{-1}$$

$$e^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^0 & 0 & 0 \\ 0 & e^0 & 0 \\ 0 & 0 & e^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^t x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$e^t x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

2.4 Kestabilan

Sebelum membahas tentang kestabilan, terlebih dahulu dibahas tentang ekuilibrium berdasarkan definisi yang diberikan sebagai berikut:

Definisi 2.2 (Olsder, 1994) Diberikan persamaan diferensial orde satu yaitu $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ dengan nilai awal $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$, sebuah vektor $\overline{\boldsymbol{x}}$ yang memenuhi $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}) = 0$ disebut titik ekuilibrium.

Contoh 2.5:

Tentukan titik ekuilibrium $\dot{x} = 2x$.

Penyelesaian:

Karena

$$\dot{x} = x$$

Maka diperoleh titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$.

Definisi titik ekuilibirium, digunakan untuk memberikan definisi kestabilan sebagai berikut :

Defenisi 2.3 (Olsder, 1994) Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil jika $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ sehingga $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$ maka $\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0) - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan stabil asimtotik jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ merupakan titik stabil dan $\exists \delta > 0$ sehingga $lim_{t\to\infty}\|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x_0}) - \bar{\boldsymbol{x}}\| = 0$ memenuhi $\|\boldsymbol{x}_0 - \bar{\boldsymbol{x}}\| < \delta$. Titik ekuilibrium $\bar{\boldsymbol{x}}$ dikatakan takstabil jika $\bar{\boldsymbol{x}}$ tidak stabil.

Contoh 2.6

Tentukan kestabilan dari persamaan diferensial berikut $\dot{x} = -x$ dengan diperoleh titik ekuilibirium $x = 0$.

Penyelesaian :

$$\dot{x} = -x$$

$$\frac{dx}{dt} = -x$$

$$\frac{dx}{x} = -dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int -dt$$

$$\ln x = -t + c$$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

Sehingga :

$$\ln x - c = -t$$

$$\ln x - \ln x_0 = -t$$

$$\ln \frac{x}{x_0} = -t$$

$$\frac{x}{x_0} = e^{-t}$$

$$x = x_0 e^{-t}$$

jika $t \to \infty$ maka $x \to 0$ dapat disimpulkan bahwa $\dot{x} = -x$ stabil karena solusinya menuju 0.

Contoh 2.7

Tentukan kestabilan dari persamaan diferensial :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (2.12)$$

Penyelesaian :

Matriks dari Persamaan (4.12) dapat dijabarkan sebagai berikut :

$$\dot{x}_1 = -4x_1 \text{ dan } \dot{x}_2 = -2x_2$$

sehingga dapat dicari solusi untuk masing-masing yaitu :

untuk $\dot{x}_1 = -4x_1$,

$$\frac{dx_1}{dt} = -4x_1$$

$$\int \frac{dx_1}{x_1} = \int -4dt$$

$$\ln x_1 = -4t + c$$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

sehingga :

$$\ln x_1 - c = -4t$$

$$\ln x_1 - \ln x_0 = -4t$$

$$x_1 = x_0(0).e^{-4t}$$

jika untuk $t \to \infty$ maka $x_1 \to 0$ dapat disimpulkan bahwa $\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ stabil karena setiap solusinya menuju 0.

Berikutnya solusi untuk $\dot{x}_2 = -2x_2$,

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2$$

$$\int \frac{dx_2}{x_2} = \int -2dt$$

$$\ln x_2 = -2t + c$$

karena $x(0) = x_0$ maka $c = \ln x_0$

sehingga

$$\ln x_2 - c = -2t$$

$$\ln x_2 - \ln x_0 = -2t$$

$$x_2 = x_0(0).e^{-2t}$$

maka untuk $t \to \infty$ dan $x_2 \to 0$ dapat disimpulkan bahwa $\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ stabil karena solusinya menuju 0. Dari kedua solusi tersebut dapat disimpulkan bahwa $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ stabil asimtotik karena kedua solusi menuju 0.

Selain cara diatas, menentukan kestabilan dapat juga digunakan nilai eigen yang dijelaskan oleh Olsder (1994) yaitu persamaan $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ akan stabil jika mempunyai nilai eigen kecil dari nol dan tidak stabil jika nonnegatif.

Contoh 2.8

Tentukan kestabilan dari persamaan diferensial :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x$$

Penyelesaian :

Maka matriks di atas akan dicari nilai eigen sebagai berikut :

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix}\lambda+4 & 0\\ 0 & \lambda+2\end{bmatrix}=0$$

$$(\lambda+4)(\lambda+2)-0=0$$

maka diperoleh nilai eigennya,

$$\lambda_1=-4 \text{ dan } \lambda_2=-2$$

karena didapat nilai $\lambda_i<0, i=1,2$ maka dapat disimpulkan bahwa persamaan diatas merupakan stabil asimtotik.

2.5 Kendali Optimal Waktu Kontinu

Selanjutnya pada bagian ini, akan dibahas tentang kendali optimal waktu kontinu, pertama akan dibahas terlebih dahulu tentang masalah umum kendali optimal waktu kontinu.

Diberikan persamaan fungsi kendali secara umum masalah kendali optimal waktu kontinu sistem dinamis untuk waktu *t* sebagai berikut :

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t), \qquad (2.13)$$

dengan $\boldsymbol{x}(t)\,\epsilon\,\mathbb{R}^n$ adalah vektor *state* internal dan $\boldsymbol{u}(t)\,\epsilon\,\mathbb{R}^m$ adalah vektor kendali input. Fungsi tujuan yang akan dicapai yaitu meminimalkan fungsi objektif yaitu :

$$J(t_0)=\phi\big(\boldsymbol{x}(T_f),T_f\big)+\int_{t_0}^{T_f}\varphi\,(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t)dt, \qquad (2.14)$$

dengan t_0 adalah waktu awal dan T_f adalah waktu akhir.

Selanjutnya, untuk mencari solusi masalah kendali optimal waktu kontinu maka didefinisikan persamaan-persamaan berikut yang diperlukan untuk sebuah proses meminimalkan fungsi ojektif sebagai berikut :

Persamaan *Hamilton* : $H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)=\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)+\boldsymbol{\lambda}^T(t)f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t).$ (2.15)

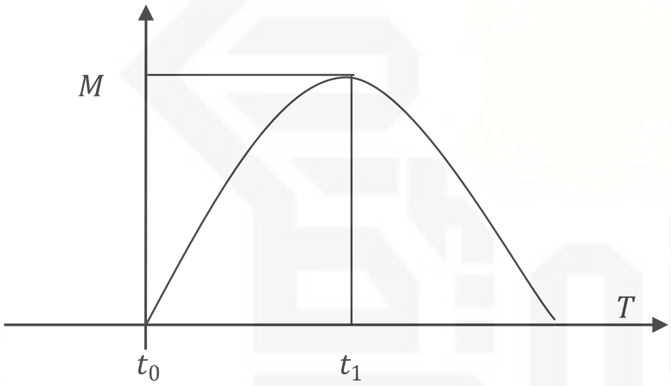
Persamaan *State* : $\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\frac{\partial H}{\partial \lambda}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)(t), \quad t\geq t_0.$ (2.16)

Persamaan *Costate* $\quad : -\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{f}^T}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{\lambda}(t) + \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)}{\partial \boldsymbol{x}}(t),\ t \leq T_f.$ (2.17)

Persamaan *Stasioner* $\quad : \quad 0 = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial \varphi\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t)}{\partial \boldsymbol{u}}(t) + \frac{\partial \boldsymbol{f}^T}{\partial \boldsymbol{u}}\boldsymbol{\lambda}(t).$ (2.18)

2.6 Model Persediaan untuk Kasus Penurunan Barang

Selanjutnya pada bagian ini, akan dibahas tentang model persediaan untuk kasus penurunan barang. Pembentukan model ini didasarkan pada sistem dimana ditinjau persediaan barang pada saat terjadi penurunan barang. Diasumsikan bahwa fase pertama dari 0 hingga t_1 untuk tingkat persedian yang meningkat, kemudian fase kedua yaitu t_1 hingga T untuk tingkat persediaan yang menurun. Berikut ini digambarkan model persediaan.



Gambar 2.1 Model Persediaan Menurun

Tingkat persediaan dari t_0 hingga t_1 merupakan persediaan barang yang bertambah secara bertahap sampai titik dimana seluruh pesanan telah diterima. M melambangkan besarnya pemesanan yang diperlukan untuk mengisi persediaan, yang akan ditentukan oleh pihak perusahaan tersebut. Garis yang menghubungkan M dengan t_1 melambangkan tingkat dimana persediaan berangsur habis. Oleh karena itu dilakukan kembali pemesanan persediaan barang secara bertahap, jika pemesanan ulang ditetapkan terlalu rendah, persediaan bahan akan habis sebelum persediaan pengganti diterima, dan jika persediaan baru sudah datang tetapi persediaan digudang sudah rusak sehingga produksi dapat terganggu atau permintaan pelanggan tidak dapat dipenuhi maka tingkat persediaan dari t_1 hingga T akan mangalami penurunan.

Berdasarkan batasan masalah yang telah diberikan maka yang dibahas pada penelitian ini hanya untuk kasus penurunan barang. Oleh karna itu kurva pada Gambar 2.1 yang ditunjukkan untuk selang waktu $[t_1, T]$.

Berdasarkan artikel yang dibahas Pardi Affandi (2015) maka didefinisikan persamaan diferensial dinamik untuk kasus penurunan barang yaitu:

$$\dot{I} = P(t) - D(t) + v(t)I(t) \quad t \in [t_1, T] \tag{2.19}$$

Dan fungsi lagrangenya adalah:

$$L = \varphi(x, u, t) + (\lambda - \mu)g \tag{2.20}$$

Untuk menjamin tingkat persediaan menurun dari t_1 hingga T maka untuk lebih lanjut berlaku:

$$D(t) - P(t) + v(t)I(t) > 0 \quad t \in [t_1, T] \tag{2.21}$$

dengan

$I(t)$: Tingkat fungsi persediaan

$P(t)$: Nilai produksi rata-rata fungsi

$D(t)$: Nilai fungsi permintaan

I_0 : Tingkat nilai awal persediaan

$m(t)$: Rata-rata fungsi kenaikan

$\theta(t)$: Rata-rata fungsi kemerosotan

$v(t)$: Selisih dan rata-rata fungsi kenaikan dan penurunan

Untuk selanjutnya fungsi tujuan yang akan diminimumkan yaitu:

$$J = \int_0^T \left(\frac{h}{2}\left(I - \hat{I}\right)^2 + \frac{k}{2}\left(P - \hat{P}\right)dt\right) \tag{2.22}$$

dengan

$\hat{P}$: Tingkat produksi tujuan

$\hat{I}$: Tingkat persediaan tujuan

h : Koefisien biaya penyimpanan

k : Koefisien biaya produksi

λ : Konstanta nonnegatif biaya diskon

Selanjutnya untuk mencari solusi optimal untuk masalah persediaan penurunan barang maka dibentuk persamaan Hamilton seperti pada Persamaan (2.19). Kemudian dicari Persamaan state, Persamaan kostate, dan Persamaan stasioner seperti pada Persamaan (2.20) sampai Persamaan (2.22).

2.6.1 Kendali Optimal pada Masalah Persediaan dengan Penurunan Barang

Definisikan fungsi dinamik persediaan dengan penurunan barang sebagai berikut:

$$\dot{I}(t) = P(t) - D(t) + v(t)I(t) \qquad t \in [t_1, T] \qquad (2.23)$$

dengan $v(t) = m(t) - \theta(t)$. Kemudian, untuk menjamin bahwa tingkat persediaan barang menurun dari waktu t_1 hingga T maka lebih lanjut dipenuhi

$$D(t) - P(t) + v(t)I(t) > 0 \qquad t \in [t_1, T] \qquad (2.24)$$

selanjutnya, di minimumkan fungsi tujuan persediaan barang yang mengalami penurunan sebagai berikut :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T \left(h\left[I(t) - \hat{I}\right]^2 + K\left[P(t) - \hat{P}\right]^2 \right) dt \qquad (2.25)$$

Persamaan (2.22) hingga Persamaan (2.24) merupakan batasan nonnegatif,

$$P(t) \geq 0 \qquad t \in [t_1, T] \qquad (2.26)$$

Kemudian, pada pembahasan selanjutnya digunakan notasi $\dot{I}(t) = \dot{I}$, $I(t) = I$, $P(t) = P$ dan $v(t) = v$. Berdasarkan Persamaan (2.23) dan Persamaan (2.25) Persamaan Hamilton didefinisikan sebagai berikut :

$$H = -\frac{1}{2}\left[h\left(I - \hat{I}\right)^2 + K\left(P - \hat{P}\right)^2\right] + \lambda g \qquad (2.27)$$

dengan

$$g = D - P - vI \qquad t \in [t_1, T] \qquad (2.28)$$

dan Persamaan Lagrange didefinisikan sebagai berikut :

$$L = -\frac{1}{2}\left[h\left(I - \hat{I}\right)^2 + K\left(P - \hat{P}\right)^2\right] + (\lambda - \mu)g \qquad (2.29)$$

Syarat kondisi optimal pada persediaan barang yang menggalami penurunan di berikan sebagai berikut :

$$H_p = 0 \qquad (2.30)$$

$$L_I = -\dot{\lambda} \qquad (2.31)$$

$$L_P = 0 \tag{2.32}$$

$$\mu \geq 0 , \mu \geq 0 \tag{2.33}$$

Persamaan (2.30) akan di uraikan sebagai berikut :

$$H = -\tfrac{1}{2}\left[h\left(I - \hat{I}\right)^2 + K\left(P - \hat{P}\right)^2\right] + \lambda g$$

$$H = -\tfrac{1}{2}\left[h\left(I - \hat{I}\right)^2 + K\left(P - \hat{P}\right)^2\right] + \lambda(D - P - vI)$$

$$H = -\tfrac{1}{2}\left[h\left(I - \hat{I}\right)^2 + K\left(P - \hat{P}\right)^2\right] + \lambda D - \lambda P - \lambda vI$$

$$H = -\frac{1}{2}\left[h\left(I - \hat{I}\right)^2 - \frac{1}{2}K\left(P - \hat{P}\right)^2\right] + \lambda D - \lambda P - \lambda vI$$

Sehingga $H_p = 0$ sebagai berikut:

$$0 = -\tfrac{K}{2}.2\left(P - \hat{P}\right) - \lambda$$

$$0 = -K\left(P - \hat{P}\right) - \lambda$$

$$K\left(P - \hat{P}\right) = -\lambda$$

$$\left(P - \hat{P}\right) = -\tfrac{\lambda}{K}$$

$$P = \hat{P} - \tfrac{\lambda}{K} \tag{2.34}$$

Persamaan (2.31) akan di uraikan sebagai berikut :

$$L = -\tfrac{1}{2}\left[h\left(I - \hat{I}\right)^2 + K\left(P - \hat{P}\right)^2\right] + (\lambda - \mu)g$$

$$L = -\tfrac{1}{2}\left[h\left(I - \hat{I}\right)^2 + K\left(P - \hat{P}\right)^2\right] + (\lambda - \mu)(D - P - vI)$$

$$L = -\tfrac{1}{2}h\left(I - \hat{I}\right)^2 - \tfrac{1}{2}K\left(P - \hat{P}\right)^2 + \lambda D - \lambda P - \lambda vI - \mu D + \mu P + \mu vI$$

Sehingga $L_I = -\dot{\lambda}$ sebagai berikut:

$$-\dot{\lambda} = -\tfrac{h}{2}.2\left(I - \hat{I}\right) + \lambda v + \mu v$$

$$-\dot{\lambda} = -h\left(I - \hat{I}\right) + (\lambda + \mu)v$$

$$\dot{\lambda} = h\left(I - \hat{I}\right) - (\lambda + \mu)v \tag{2.35}$$

Persamaan (2.32) akan di uraikan sebagai berikut :

$$L = -\tfrac{1}{2}\left[h\left(I - \hat{I}\right)^2 + K\left(P - \hat{P}\right)^2\right] + (\lambda - \mu)g = 0$$

$$L = -\tfrac{1}{2}\left[h\left(I - \hat{I}\right)^2 + K\left(P - \hat{P}\right)^2\right] + (\lambda - \mu)(D - P - vI)$$

$$L = -\tfrac{1}{2}h\left(I - \hat{I}\right)^2 + K\left(P - \hat{P}\right)^2 + \lambda D - \lambda P - \lambda vI - \mu D + \mu P + \mu vI$$

$$L = -\frac{1}{2}h\left(I-\hat{I}\right)^2 - \frac{1}{2}K\left(P-\hat{P}\right)^2 + P(\lambda+\mu) - I(\lambda v + \mu v)$$

Sehingga $L_P = 0$ sebagai berikut:

$$0 = -\frac{K}{2}.2\left(P-\hat{P}\right) + (\lambda+\mu)$$

$$0 = -K\left(P-\hat{P}\right) + (\lambda+\mu)$$

$$0 = K\left(P-\hat{P}\right) - (\lambda+\mu) \qquad (2.36)$$