BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Teori Graf

Teori graf merupakan pokok bahasan yang sudah lama dikenal dan memiliki banyak terapan dibidang matematika. Teori graf banyak digunakan sebagai alat bantu untuk mengambarkan atau menyatakn suatu permasalahan agar lebih mudah dimengerti dan dipahami. Daya tarik teori graf karena penerapannya yang sangat luas, mulai dari ilmu komputer, kimia, fisika, biologi, teknik kelistrikan, ekonomi, manajemen, pemasaran, hingga pemecahan teka-teki dan permainan asah otak. Contoh penerapan graf yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari antara lain: struktur organisasi, bagan alir pengambilan mata kuliah, peta, rangkaian listrik dan lain-lain. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek dinyatakan sebagai noktah, bulatan, atau titik. Sedangkan hubungannya antara objek dinyatakan dengan garis.

Menurut catatan sejarah teori graf pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan Swiss, Leonhard Euler pada tahun 1736 masalah jembatan Konigsberg (sebelah timur negara bagian Prussia, Jerman) sekarang bernama kota kaliningrad yang terdapat sungai pregal yang mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua buah anak sungai. Ada tujuh buah jembatan yang menghubungkan daratan yang dibelah oleh sungai tersebut. Masalah pertama kali menggunakan graf ketika mencoba membuktikan kemungkinan untuk melewati empat daerah yang terhubung dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Konigsberg, Rusia dalam sekali waktu. Pembuktian Euler tersebut ditulis dalam karya tulisnya yang berjudul *"Solution problematis and geometrian situs pertinensi"*. Masalah jembatan Konigsberg tersebut dapat dinyatakan dengan istilah graf dalam menentukan keempat daerah itu sebagai titik (*vertex*) dan ketujuh jembatan sebagai sisi (*edge*) yang menghubungkan pasangan titik yang sesuai.

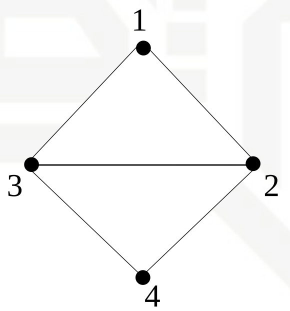
a. Definisi Graf

Secara matematis, graf didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1 (Zubaidah Amir, 2010) Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) ditulis dengan notasi $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik (*vertex* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edge* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang titik.

Definisi diatas menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada, minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu buah titik dinamakan graf trivial.

Titik pada graf dapat diberi nama atau dinomori dengan huruf seperti $a, b, c, d \dots$ atau dengan bilangan asli $1,2,3,4 \dots$. Atau bisa juga gabungan dari keduanya. Misal u dan v adalah titik-titik G. Sedangkan sisi yang menghubungkan titik u dengan titik v dinyatakan dengan pasangan (u, v) adalah sisi dari G atau dinyatakn dengan lambang $e_{1,}e_2, \dots$ Dengan kata lain, jika e adalah sisi yang menghubungkan titik u dan v, maka e dapat ditulis sebagai $e = (u, v)$. Sebagai contoh perhatikan gambar berikut:



Gambar 2.1 Contoh Graf

Pada Gambar 2.1 diatas, himpunan titik V dan himpunan sisi E adalah : $V = \{1,2,3,4\}$ dan $E = \{(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4)\}$.

b. Jenis-Jenis Graf.

Berdasarkan jenis graf bila dilihat berdasarkan ada atau tidaknya gelang atau sisi ganda Maka secara umum dapat dibagi menjadi dua jenis.

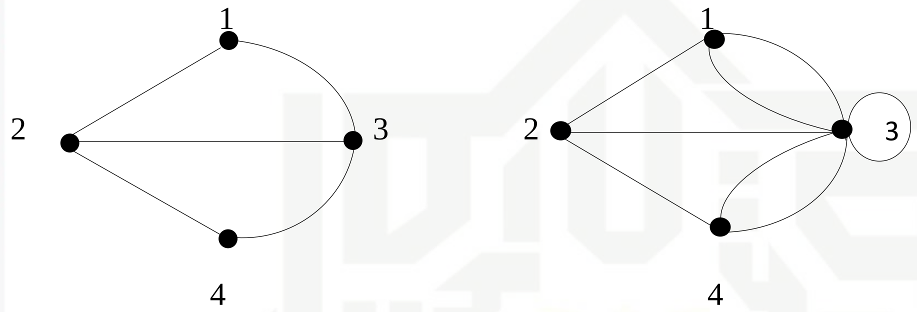
1. Graf sederhana (*simple graph*)

   yaitu graf yang tidak mengandung sisi ganda maupun gelang (*loop*).

2. Graf tak sederhana (*Ansimple graph*)

   Graf yang mengandung sisi ganda atau gelang (*loop*) dinamakan graf tak sederhana (*unsimple graph)* .

   Berikut contoh graf sederhana dan tak sederhana



(a) (b)

Gambar 2.2 (a) Graf Sederhana, (b) Graf Tak Sederhana

Jenis berdasarkan kondisi sisinya graf dapat dibedakan menjadi :

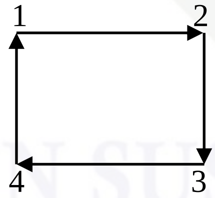
1. Graf berarah (*Directed graph*)

   yaitu graf yang setiap sisi-sisinya mempunyai orientasi arah.

2. Graf tidak berarah (*Undirected graph*).

   Graf yang sisi-sisinya tidak mempunyai orientasi arah.

   Berikut merupakan contoh graf berarah.



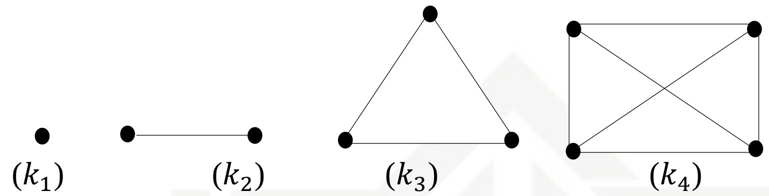
(a)

Gambar 2.3 (a) Graf Berarah

Jenis- jenis Graf yang sering digunakan, diantaranya adalah sebagai berikut:

1. Graf lengkap (*complete graph*)

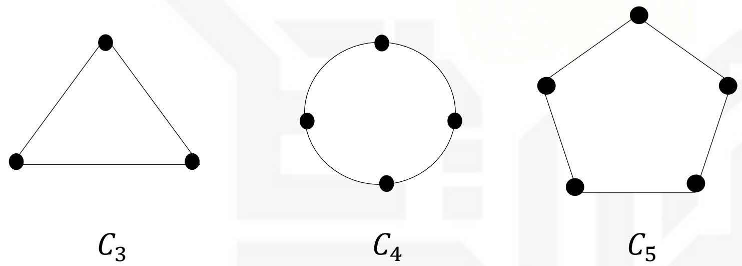
   Graf lengkap dengan n titik dinotasikan k_n yaitu sebuah graf jika setiap titiknya terhubung dengan titik lainnya. Sehingga titik pada k_n berderajat $n-1$. Berikut contoh graf lengkap:



Gambar 2.4 Graf Lengkap K_n, untuk $1 \leq n \leq 4$

2. Graf lingkaran (*Cycle Graph*)

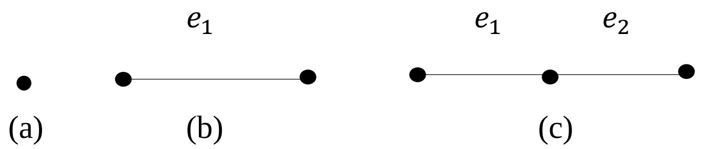
   Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n titik dilambangkan dengan C_n. Jika titik pada C_n adalah$v_1, v_2, \ldots, v_n$maka sisi-sisinya adalah $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n)$, dan (v_n, v_1). Berikut adalah contoh graf lingkaran :



Gambar 2.5 Graf lingkaran C_n, untuk $3 \leq n \leq 5$

3. Graf lintasan (*path graph*)

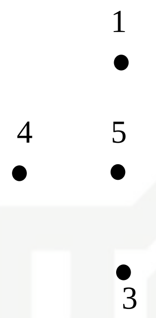
   Graf lintasan merupakan suatu graf yang terdiri dari titik-titik terhubung dan hanya dilewati oleh satu sisi saja. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan p_n, yaitu graf yang terdiri dari lintasan tunggal. p_n memiliki $n-1$ sisi. Berikut beberapa contoh graf lintasan yaitu:



Gambar 2.6 (a) Graf P_1,(b) Graf P_2 ,(c) Graf P_3

4. Graf Kosong (*Empty graf*)

Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong disebut dengan graf kosong yang ditulis dengan N_n, yang dalam hal ini n adalah jumlah titik. Contoh graf kosong sebagai berikut :



Gambar 2.7 Contoh Graf Kosong

Didalam mempelajari teori graf ada beberapa terminologi yang berkaitan dengan graf . Berikut akan dijelaskan terminologi yang didefinisikan diatas antara lain :

1. Bertetangga (*Adjacent*)

   Dua buah titik pada graf tak berarah G dikatakan bertetangga bila keduanya berhubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, u bertetangga dengan v jika (u, v) adalah sebuah sisi pada graf G.

2. Bersisian (*Incident*)

   Untuk sebarang sisi $e = (u, v)$, sisi e dikatakan bersisian dengan titik u dan titik v.

3. Titik Terpencil (*Isolated vertex*)

   Titik terpencil ialah titik yang tidak mempunyai sisi yang bersisian dengannya.

4. Derajat (*Degree*)

   Derajat suatu titik pada graf tak berarah adalah jumlah sisi yang bersisian dengan titik tersebut.

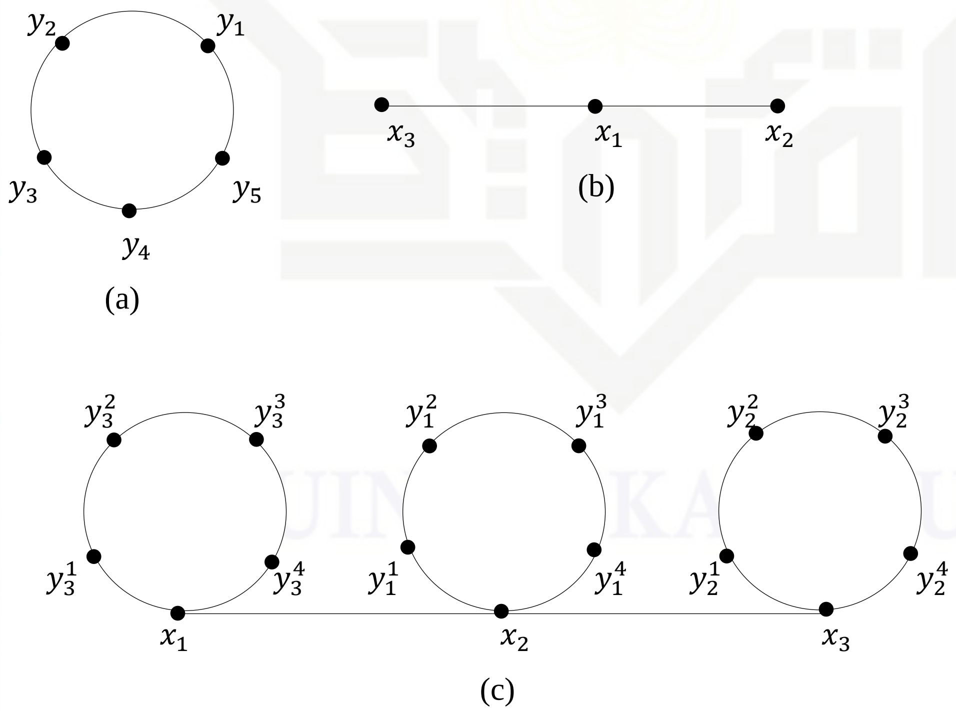
2.2 Hasil Kali *Comb*

Dalam pembahasan teori graf, operasi antara dua graf merupakan salah satu cara untuk memperoleh bentuk graf-graf baru. Terdapat berbagai jenis operasi pada graf yang masih dikenal diantaranya operasi *join* (+), gabungan (∪), kartesian (×), korona (⊙), dan *comb* (⊳). Salah satunya yang akan di bahas dalam pembahasan ini adalah operasi hasil kali *comb*. Berikut ini akan dijelaskan definisi graf hasil kali *comb*.

Definisi 2.2 (Mega Kristina, dkk, 2014)

Diberikan graf hasil kali *comb* G dan H dinotasikan dengan $G \rhd H$, yaitu sebuah graf yang diperoleh dengan melakukan satu penggandaan pada G dan menggandakan H sebanyak jumlah titik pada G. Kemudian diberikan x sebagai titik cangkok, lalu mencangkokkan penggandaan H ke-i pada titik x di graf H ke titik ke-i gari graf G.

Berikut ini salah satu contoh graf hasil kali comb graf $P_3 \rhd C_5$



Gambar 2.8 (a) Graf C_5 ; (b) Graf P_3; (c) Graf $P_3 \rhd C_5$

2.3 Pelabelan Graf

Pelabelan graf adalah pemetaan yang memasangkan unsur-unsur graf yaitu titik dan sisi, dengan bilangan bulat positif. Jika domainnya adalah himpunan titik maka disebut pelabeln titik(*vertex labeling*), jika domainnya adalah himpunan sisi maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), jika domainnya adalah himpunan titik dan himpunan sisi, maka disebut pelabelan total (*total labeling*). Jumlah antara label titik dan sisi-sisinya yang bersisian (*incident*) dengan titik disebut bobot titik dan jumlah antara label sisi dan titik-titik yang bersisian (*incident*) dengan sisi disebut bobot sisi.

Bobot dari elemen graf adalah jumlah dari semua label yang berhubungan dengan elemen graf tersebut (Wallis, 2000). Bobot dari titik v dengan pelabelan λ adalah $wt(v) = \lambda(v) + \sum_{uv \in E} \lambda(uv)$. Sedangkan bobot dari sisi uv adalah $wt(uv) = \lambda(u) + \lambda(uv) + \lambda(v)$.

Salah satu pembahasan dalam teori graf, pelabelan graf banyak mendapat perhatian terutama pada pelabelan total tak teratur yang diperkenalkan oleh Martin Baca, dkk pada Tahun 2001. Pelabelan total tak teratur dibagi menjadi tiga yaitu, pelabelan total tak teratur titik, pelabelan total tak teratur sisi dan pelabelan total tak teratur total. Berdasarkan uraian diatas berikut ini akan dijelaskan jenis-jenis pelabelan graf.

a. Pelabelan Total Tak Teratur Titik

Misalkan $G = (V, E)$, Pelabelan-k total didefinisikan sebagai pemetaan

$$\lambda: V \cup E \to \{1,2,\dots,k\}.$$

Baca, dkk. mendefinisikan bahwa, pelabelan-k total tak teratur titik dari graf G jika untuk setiap titik x dan y yang berbeda maka $wt(x) \neq wt(y)$. $wt(x)$ merupakan bobot titik x yang dinyatakan sebagai :

$$wt(x) = \lambda(x) + \sum_{ux \epsilon E} \lambda(ux)$$

Nilai total ketakteraturan titik graf G dinotasikan dengan $tvs(G)$ adalah nilai-k minimum atau label terbasar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur titik. Baca dkk bahwa menunjukkan batas bawah dan batas atas nilai dari nilai total ketakteraturan titik untuk sebarang graf.

Teorema 2.1 (Riyanti, 2015)

Untuk $m \geq 3$ dan $tvs\ (P_m \rhd\ C_5) = \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$.

Bukti :

Untuk pembuktian Teorema 2.1 diatas, perhatikan bahwa derajat titik terkecil dari graf $P_m \rhd\ C_5$ adalah 2 dan titik yang berderajat dua pada $P_m \rhd\ C_5$ adalah $4m$. Agar mendapatkan pelabelan yang optimal, maka bobot setiap titik yang berderajat 2 diberi label dimulai $3,4,5, \dots 2m+2$. Sementara bobot titik graf $P_m \rhd\ C_5$ yang berderajat 2 adalah jumlah dari 3 buah bilangan bulat positif yang disebut label, yaitu 1 label untuk titik itu sendiri dan 2 label yang saling terhubung dengan titik tersebut. Oleh sebab itu kita peroleh label terbesar minimum yang digunakan yaitu $\left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$ dan tidak akan lebih kecil dari $\left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$. Jadi kita dapatkan $tvs(P_m \rhd\ C_5) \geq \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$.

Selanjutnya,akan ditunjukkan untuk $tvs\ (P_m \rhd\ C_5) \leq \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$. Untuk rumus pelabelan titik dan pelabelan sisi didapat dengan melihat pola pelabelan yang telah diperoleh pada $P_m \rhd\ C_5$ dengan $m = \{3,5,7 \dots ,11\}$ dimana untuk $m \geq 3$ dan $m \geq 5$ pelabelannya tidak menggunakan formula. Formula atau rumus yang digunakan untuk $m \geq 7$. Sebelum merumuskan pelabelan titik terlebih dahulu didefinisikan $r_i = \left\lceil \frac{4i+2}{3} \right\rceil$. untuk $1 \leq i \leq m$.

- Untuk $m \geq 7$ maka pelabelan titiknya adalah :

$$\lambda(x_i\ ) = \begin{cases} 4m - 2r_m & ; \text{jika } i = 1 \\ 4m + i - 2r_i - 2r_m + 4 & ; \text{jika } 2 \leq i \leq \dfrac{m-1}{2} \\ \dfrac{9m+9}{2} - 3r_m & ; \text{jika } i = m \\ 4m + i - 2r_m - 2r_i + 6 & ; \text{jika } \dfrac{m+1}{2} \leq i \leq m-2 \\ \dfrac{9m+5}{2} - 2r_{m-1} - r_m & ; \text{jika } i = m-1, \end{cases}$$

$$\lambda(y_i^k) = \begin{cases} 1 & ;\ \text{jika } i = 1 \text{ dan } k = 1 \\ r_i & ;\ \text{jika } i = 1 \text{ dan } 2 \leq k \leq 4 \\ r_i - 1 & ;\ \text{jika } 3 \leq i \leq m \text{ dan } i (mod\ 3) = 0 \text{ dan } 1 \leq k \leq 4 \\ r_i - 2 & ;\ \text{jika } 2 \leq i \leq m \text{ dan } i (mod\ 3) = 2 \text{ dan } 1 \leq k \leq 4 \\ r_i & ;\ \text{jika } 4 \leq i \leq m \text{ dan } i (mod\ 3) = 1 \text{ dan } 1 \leq k \leq 4 \end{cases}$$

Untuk pelabelan sisinya graf $P_m \rhd C_5$ dengan m bilangan ganjil adalah :

$$\lambda(x_i y_i{}^k) = \begin{cases} i & ;\ \text{jika } i = 1 \text{ dan } k = 1 \\ r_i - 2 & ;\ \text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } k = 1 \\ r_i & ;\ \text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } k = 4 \end{cases}$$

$$\lambda(y_i{}^k y_i{}^{k+1}) = \begin{cases} r_i - 1 & ;\text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } 1 \leq k \leq 3 \\ r_i & ;\text{jika } 1 \leq i \leq m \text{ dan } 3 \leq k \leq 4 \end{cases}$$

$$\lambda(x_i x_{i+1}) = r_m \quad ;\text{jika } 1 \leq i \leq \frac{m-3}{2} \text{ atau } \frac{m+1}{2} \leq i \leq m-2$$

$$\lambda\left(x_1 x_{\frac{m+1}{2}}\right) = r_m$$

$$\lambda\left(x_{\frac{m-1}{2}} x_m\right) = r_m$$

Berdasarkan rumus pelabelan titik dan pelabelan sisi diatas, dapat dibuktikan bahwa bobot untuk setiap titik pada graf $P_m \rhd C_5$ memiliki bobot yang berbeda. Bobot setiap titik dapat diuraikan menjadi beberapa kelompok berdasarkan pada pelabelan titik dan pelabelan sisinya, sehingga diperoleh bobot titik $wt(x_i)$ dan $wt(y_i^k)$ sebagai berikut:

- Untuk $m \geq 7$

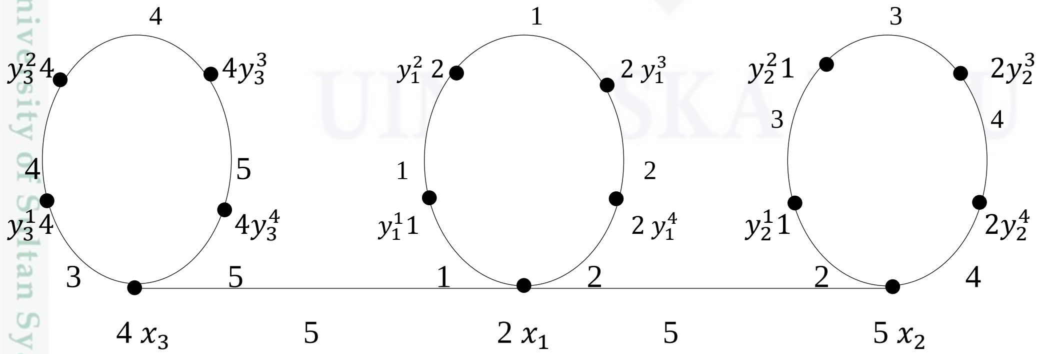
- $$wt(x_i) = \begin{cases} 4m + 3 & ;\text{untuk } i = 1 \\ 4m + i + 2 & ;\text{untuk } 2 \leq i \leq \frac{m-3}{2} \\ \frac{9m+3}{2} & ;\text{untuk } i = \frac{m-1}{2} \\ \frac{9m+9}{2} & ;\text{untuk } i = \frac{m+1}{2} \\ 4m + i + 4 & ;\text{untuk } \frac{m+3}{2} \leq i \leq m-2 \\ \frac{9m}{2} + 3 & ;\text{untuk } i = m-1 \\ \frac{9m}{2} + 2 & ;\text{untuk } i = m \end{cases}$$

$$
- \quad wt(yi^k) = \begin{cases} 3 & ;\text{ jika } i = 1 \text{ dan } k = 1 \\ 4i & ;\text{jika } 1 \le i \le m \text{ dan } i(mod\ 3) = 1 \text{dan } k = 2 \\ 4i+1 & ;\text{jika } 1 \le i \le m \text{ dan } i(mod\ 3) = 1 \text{ dan } k = 3 \\ 4i+2 & ;\text{jika } 1 \le i \le m \text{ dan } i(mod\ 3) = 1 \text{ dan } k = 4 \\ 4i-1 & ;\text{jika } 4 \le i \le m \text{ dan } i(mod\ 3) = 1 \text{ dan } k = 1 \\ 4i-1 & ;\text{jika } 2 \le i \le m \text{ dan } i(mod\ 3) = 2 \text{ dan } k = 1 \\ 4i & ;\text{jika } 2 \le i \le m \text{ dan } i\ (mod\ 3) = 2 \text{ dan } k = 2 \\ 4i+1 & ;\text{jika } 2 \le i \le m \text{ dan } i\ (mod\ 3) = 2 \text{ dan } k = 3 \\ 4i+2 & ;\text{jika } 2 \le i \le m \text{ dan } i\ (mod\ 3) = 2 \text{ dan } k = 4 \\ 4i-1 & ;\text{jika } 3 \le i \le m \text{ dan } i\ (mod\ 3) = 0 \text{ dan } k = 1 \\ 4i & ;\text{jika } 3 \le i \le m \text{ dan } i(mod\ 3) = 0 \text{ dan } k = 2 \\ 4i+1 & ;\text{ jika } 3 \le i \le m \text{ dan } i\ (mod\ 3) = 0 \text{ dan } k = 3 \\ 4i+2 & ;\text{jika } 3 \le i \le m \text{ dan } i\ (mod\ 3) = 0 \text{ dan } k = 4 \end{cases}
$$

Bobot titik dari graf $P_m \rhd C_5$ pada $wt(y_i{}^k)$ adalah bilangan bulat positif berurut dimulai dari 3 sampai ke $4m + 2$. Sedangkan pada $wt(x_i)$ yaitu bilangan bulat positif berurut yang dimulai dari $4m + 3$ sampai ke $5m + 2$. Hal ini menunjukkan bahwa setiap titik dalam pelabelan total tak teratur titik dari graf $P_m \rhd C_5$ memiliki bobot yang berbeda. Sehingga pelabelan tersebut dinamakan pelabelan total tak teratur titik. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa $tvs(P_m \rhd C_5) \le \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$.

Telah diperoleh bahwa $tvs(P_m \rhd C_5) \le \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$ dan $tvs(P_m \rhd C_5) \ge \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$, maka dapat disimpulkan bahwa $tvs(P_m \rhd C_5) = \left\lceil \frac{4m+2}{3} \right\rceil$ ■

Berikut ini contoh pelabelan total tak teratur titik :



Gambar 2.9 Pelabelan-5 Total Tak Teratur Titik Graf $P_3 \rhd C_5$

Berdasarkan pelabelan pada Gambar 2.9 di atas diperoleh bobot setiap titik-titiknya sebagai berikut:

$wt(y_1^1) = 1 + 1 + 1 = 3$

$wt(y_1^2) = 2 + 1 + 1 = 4$

$wt(y_1^3) = 2 + 1 + 2 = 5$

$wt(y_1^4) = 2 + 2 + 2 = 6$

$wt(y_2^1) = 2 + 2 + 3 = 7$

$wt(y_2^2) = 2 + 3 + 3 = 8$

$wt(y_2^3) = 2 + 3 + 4 = 9$

$wt(y_2^4) = 2 + 4 + 4 = 10$

$wt(y_3^1) = 4 + 3 + 4 = 11$

$wt(y_3^2) = 4 + 4 + 4 = 12$

$wt(y_3^3) = 4 + 4 + 5 = 13$

$wt(y_3^4) = 4 + 5 + 5 = 14$

$wt(x_1) = 2 + 1 + 2 + 5 + 5 = 15$

$wt(x_2) = 5 + 2 + 4 + 5 = 16$

$wt(x_3) = 4 + 3 + 5 + 5 = 17$

Terlihat bahwa bobot setiap titik dari graf $P_3 \rhd C_5$ berbeda semua. Label terbesar yang digunakan pada graf pelabelan tersebut adalah 5, $tvs(P_3 \rhd C_5) \geq \left\lceil \frac{4(3)+2}{3} \right\rceil = 5$ dan pelabelan tersebut mengakibatkan bobot setiap titiknya berbeda maka pelabelan ini adalah pelabelan-5 total tak teratur titik pada $P_3 \rhd C_5$.

b. Pelabelan Total Tak Teratur Sisi

Misalkan suatu graf $G = (V, E)$ dengan himpunan titik tak kosong V dan himpunan sisi E merupakan suatu pelabelan total $\lambda : V \cup E \rightarrow (1,2, \ldots, k)$ disebut pelebelan-k total tak teratur sisi jika untuk sebarang dua sisi $e = u_1 v_1$ dan $f = u_2 v_2$ yang berbeda di G berlaku $wt(e) \neq wt(f)$, dengan $wt(e) = \lambda(u_1) + \lambda(u_2) + \lambda(v_1)$ dan $wt(f) = \lambda(u_2) + \lambda(f) + \lambda(v_2)$ (Baca et al, 2003) . Nilai total ketakteraturan sisi dari G (*total edge irregularity strength*) dinotasikan dengan

$tes(G)$ adalah lebal terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur sisi.

Teorema 2.2 (Baca, dkk 2008)

Jika $G(V, E)$ adalah suatu graf dengan himpunan titik tak kosong V dan himpunan sisi E, maka :

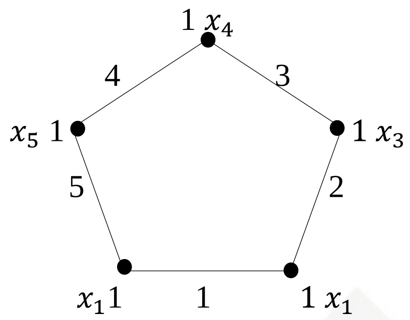
$$\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil \leq tes\ (G) \leq |E|$$

Bukti :

Untuk menunjukan batas atas nya pilih $\lambda(x) = 1; \forall\, x\ \in V$ dan semua sisi dilabeli berturut-turut dari 1 sampai $|E|$. Dengan menggunakan label tersebut diperoleh $wt(e) \neq wt(f)$ untuk sembarang dua sisi e dan f yang berbeda dari G. Hal ini menunjukkan bahwa pelabelan tersebut adalah pelabelan total tak teratur sisi dengan label terbesar $|E|$, sehingga batas atas nilai ketakteraturan total sisi yang dinotasikan dengan $tes(G)$ adalah $|E|$.

Batas bawah dimisalkan λ adalah pelabelan total tak teratur sisi yang optimal dari G. Bobot terbesar sisi e dari G, yaitu $wt(e) \geq |E|$+2. Bobot tersebut merupakan jumlah dari tiga label, sehingga terdapat satu sisi atau titik yang diberi label paling sedikit $\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil$. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa batas bawah $tes(G)$ adalah $\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil$ ■

Menurut Teorema 2.2 nilai total ketakteraturan sisi dari suatu graf G yang dinotasikan dengan $tes(G) \geq \left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil$dan tidak melebihi jumlah sisinya. Sebagai ilustrasi dari pembuktian Teorema 2.2 $\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil$ Diberikan pelabelan untuk menentukan batas atas seperti yang ditunjukkan pada gambar dibawah ini :



Gambar 2.10 Pelabelan Total Tak Teratur Sisi Graf C_5

Graf pada Gambar 2.10 menunjukkan pelabelan total tak teratur sisi graf C_5 dengan bobot setiap sisinya-sisinya adalah:

$wt(x_{1,}x_2) = 1 + 1 + 1 = 3$

$wt(x_{2,}x_3) = 1 + 2 + 1 = 4$

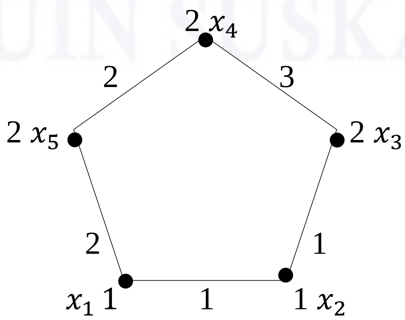
$wt(x_{3,}x_4) = 1 + 3 + 1 = 5$

$wt(x_{4,}x_5) = 1 + 4 + 1 = 6$

$wt(x_{5,}x_1) = 1 + 5 + 1 = 7$

Terlihat bahwa bobot untuk setiap sisinya dari graf C_5 berbeda, hal ini menunjukkan bahwa pelabelan tersebut merupakan pelabelan total tak teratur sisi. Nilai ketakteraturan total sisi graf tersebut merupakan jumlah sisi yaitu $tes\ (C_5) = 5$. Oleh karena itu, nilai ketakteraturan total sisi dari suatu graf tidak mungkin lebih dari jumlah sisinya $|E|$.

Selanjutnya akan diberikan contoh untuk pelabelan optimal dengan graf yang sama untuk menentukan batas bawah seperti yang ditunjukkan pada gambar dibawah ini:



Gambar 2.11 Pelabelan Total Tak Teratur Sisi Optimal Graf C_5

Graf pada Gambar 2.11 diatas merupakan C_5 graf yang diberi pelabelan optimal dengan bobot setiap sisinya adalah :

$wt(x_{1,}x_2) = 1 + 1 + 1 = 3$

$wt(x_{2,}x_3) = 1 + 1 + 2 = 4$

$wt(x_{3,}x_4) = 2 + 3 + 2 = 7$

$wt(x_{4,}x_5) = 2 + 2 + 2 = 6$

$wt(x_{5,}x_1) = 2 + 2 + 1 = 5$

Bobot sisi terbesarnya adalah $wt(x_{3,}x_4) = 7 \geq |E| + 2 = 7$. Oleh karena itu, label terbesar dari graf C_5 tersebut paling sedikit $\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil = 3$. Pada gambar tersebut menunjukkan bahwa label terbesarnya adalah 3, sehingga diperoleh $tes\ (C_5) = 3 \geq \left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil = 3$.

Pelabelan yang lebih kecil untuk pelabelan seperti gambar diatas tidak mungkin dilakukan. Oleh karena itu, nilai ketakteraturan total sisi dari suatu graf tidak mungkin kurang dari $\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil$.

c. Pelabelan Total Tak Teratur Total

Pelabelan total tak teratur total pada graf G adalah pemetaan $F: V \cup E \rightarrow \{1,2,3, \dots .k\}$ yang memenuhi $wf(uv) = f(u) + f(uv) + f(v)$ berbeda untuk setiap $uv \in (G)$ dan $wf(u) = wf(v) = f(v) + \sum_{u,v \in (E)} f(uv)$ berbeda untuk setiap titik $v \in V(G)$.

Nilai total ketakteraturan total (*totally irregularity strength*) dinotasikan dengan $ts(G)$ adalah nilai k minimum atau label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur total.

Observasi 2.1.(C.C Marzuki, dkk)

Untuk setiap graf G,maka *max* $\{tes(G), tvs(G)\} \leq ts(G)$

Teorema 2.3. (C.C. Marzuki, dkk, 2013)

Untuk $n \geq 3$ dan C_n adalah graf lingkaran dengan n sisi, maka $ts(C_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$.

Bukti:

Dari penelitian yang dilakukan oleh Baca, dkk diperoleh $tes(C_n) = tvs(C_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$. Sehingga $ts(C_n) \geq max\{tes(G), tvs(G)\} = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $ts(C_n) \leq \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$.

Pemberian nama titik dan sisi pada graf lingkaran (C_n)

$v_1 e_1 v_2 e_4 v_4 e_6 v_6 \dots e_n v_n e_{n-1} v_{n-1} e_{n-3} v_{n-3} \dots e_5 v_5 e_3 v_3 e_1 v_1$

n bilangan genap

$v_1 e_1 v_2 e_4 v_4 e_6 v_6 \dots e_{n-1} v_{n-1} e_n v_n e_{n-2} v_{n-2} e_{n-4} v_{n-4} \dots e_3 v_3 e_1 v_1$

n bilangan ganjil, terbentuk pelabelan- k tak teratur total sebagai berikut :

- $n \equiv 0 \pmod 3$ atau $n \equiv 1 \pmod 3$,

$$f(v_i) = f(e_i) = \left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil, \text{ jika } i = 1,2,\dots,n.$$

- $n \equiv 2 \pmod 3$,

$$f(v_i) = f(e_i) = \begin{cases} \left\lceil \dfrac{i+1}{3} \right\rceil, & \text{jika } i = 1,2,\dots,n-1 \\ \left\lceil \dfrac{i+2}{3} \right\rceil, & \text{jika } i = n. \end{cases}$$

Karena $\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{i+2}{3} \right\rceil$ untuk setiap $n \equiv 0 \pmod 3$ atau $n \equiv 1 \pmod 3$, maka kita menyimpulkan bahwa f adalah pelabelan dari $V(C_n) \cup E(C_n)$ ke $\left\{1,2,\dots,\left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil\right\}$.

Akan ditunjukkan bahwa :

- n genap dan ($n \equiv 0 \pmod 3$ atau $n \equiv 1 \pmod 3$),

$$wt(v_i) = \begin{cases} 3 & \text{, jika } i = 1; \\ 2\left\lceil \dfrac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \dfrac{i+3}{3} \right\rceil & \text{, jika } i \text{ genap dan } i < n; \\ 2\left\lceil \dfrac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \dfrac{i-1}{3} \right\rceil & \text{, jika } i \text{ ganjil dan } i < n; \\ n+2 & \text{, jika } 1 = n; \end{cases}$$

$$wt(e_i) = \begin{cases} 3 & \text{, jika } i = 2; \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i-1}{3} \right\rceil & \text{, jika } i \text{ genap dan } i \neq 2; \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+3}{3} \right\rceil & \text{, jika } i \text{ ganjil dan } i \neq n-1; \\ n+1 & \text{, jika } i = n-1 \text{ dan } n \equiv 0 \text{ (mod 3)}; \\ n+2 & \text{, jika } i = n-1 \text{ dan } n \equiv 1 \text{ (mod 3)}. \end{cases}$$

- n ganjil dan ($n \equiv 0$ (mod 3) atau $n \equiv 1$ (mod 3)),

$$wt(v_i) = \begin{cases} 3 & \text{, jika } i = 1; \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i-1}{3} \right\rceil & \text{, jika } i \text{ ganjil dan } i \neq 1; \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+3}{3} \right\rceil & \text{, jika } i \text{ genap dan } i \neq n-1; \\ n+1 & \text{, jika } i = n-1 \text{ dan } n \equiv 0 \text{ (mod 3)}; \\ n+2 & \text{, jika } i = n-1 \text{ dan } n \equiv 1 \text{ (mod 3)}; \end{cases}$$

$$wt(e_i) = \begin{cases} 3 & \text{, jika } i = 2; \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i-1}{3} \right\rceil & \text{, jika } i \text{ genap dan } i \neq 2; \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+3}{3} \right\rceil & \text{, jika } i \text{ ganjil dan } i \neq n; \\ n+2 & \text{, jika } 1 = n. \end{cases}$$

- n genap dan $n \equiv 2$(mod 3)

$$wt(v_i) = \begin{cases} 3 & \text{, jika } i = 1; \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i-1}{3} \right\rceil & \text{, jika } i \text{ ganjil dan } i \neq 1; \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+3}{3} \right\rceil & \text{, jika } i \text{ genap dan } i \neq n-4; \\ n+2 & \text{, jika } i = n-2\,; \\ n+3 & \text{, jika } i = n; \end{cases}$$

$$wt(e_i) = \begin{cases} 3 & \text{, jika } i = 2; \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i-1}{3} \right\rceil & \text{, jika } i \text{ genap dan } 2 < i < n; \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+3}{3} \right\rceil & \text{, jika } i \text{ ganjil dan } i < n-1; \\ n+2 & \text{, jika } i = n-1\,; \\ n+3 & \text{, jika } i = n. \end{cases}$$

- n ganjil dan dan $n \equiv 2 (\text{mod } 3)$

$$wt(v_i) = \begin{cases} 3 & \text{, jika } i = 1; \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i-1}{3} \right\rceil & \text{, jika } i \text{ ganjil dan } 1 < i < n; \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+3}{3} \right\rceil & \text{, jika } i \text{ genap dan } i < n-1; \\ n+2 & \text{, jika } i = n-1\,; \\ n+3 & \text{, jika } i = n. \end{cases}$$

$$wt(e_i) = \begin{cases} 3 & \text{, jika } i = 2; \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i-1}{3} \right\rceil & \text{, jika } i \text{ genap dan } i \neq 2; \\ 2\left\lceil \frac{i+1}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+3}{3} \right\rceil & \text{, jika } i \text{ ganjil dan } i \neq n-4; \\ n+2 & \text{, jika } i = n-2\,; \\ n+3 & \text{, jika } i = n. \end{cases}$$

Dari empat kasus di atas, tidak ada titik yang memiliki bobot yang sama dan tidak ada sisi yang memiliki bobot yang sama. Jadi f adalah pelabelan-*k* total tak teratur total, sehingga $ts(C_n) \leq \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$.

Teorema 2.4. (C. C. Marzuki, dkk, 2013) Untuk n bilangan bulat positif dan P_n adalah graf lintasan dengan n titik, maka :

$$ts(P_n) = \begin{cases} \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil, & \text{jika } n = 2 \text{ atau } 5; \\ \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil, & \text{untuk } n \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Bukti : Akan dibuktikan dalam 2 kasus :

Kasus 1 : $n = 2$ atau $n = 5$

Jika P_n adalah graf lintasan $v_1 e_1 v_2 e_2 \ldots e_{n-1} v_n$. Dapat disimpulkan f pelabelan total tak teratur total sebagai berikut :

- $n = 2$, $f(v_i) = i$ dan $f(e_i) = 1$.
- $n = 5$,

$$f(v_i) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i = 1,2; \\ 2, & \text{jika } i = 3,4,5; \end{cases}$$

$$f(e_i) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i = 1,2,3; \\ 3, & \text{jika } i = 4; \end{cases}$$

Dari defenisi sebelumnya, f adalah fungsi dari $V(P_n) \cup E(P_n) \rightarrow \left\{1,2, \ldots, \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil\right\}$. Selain itu, tidak terdapat titik-titik yang memiliki bobot yang sama dan tidak terdapat sisi-sisi yang memiliki bobot yang sama. Maka (P_n) $\leq \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$.

Kemudian akan ditunjukkan $ts(P_n) \geq \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$

- Pertama akan ditunjukkan $ts(P_2) > 1$

  Misalkan $ts(P_n) = 1$. Kemudian $f(v_1) = f(v_2) = f(e_1) = 1$. Sehingga $wt(v_1) = wt(v_2)$, kontradiksi dengan asumsi bahwa f adalah pelabelan tak teratur total. Maka $ts(P_2) > 1$.

- Kemudian akan ditunjukkan $ts(P_5) > 2$

  Misalkan $ts(P_5) = 2$. Kemudian bobot untuk 4 sisi P_5 adalah 3,4,5, dan 6 dan bobot untuk 5 titik P_5 adalah 2,3,4,5, dan 6. Untuk w_V adalah jumlah semua bobot titik. Jika v adalah jumlah semua label pada titik dan e adalah jumlah semua label pada sisi, maka

$$\begin{aligned} w_V &= wt(v_1) + wt(v_2) + wt(v_3) + wt(v_4) + wt(v_5) \\ &= v + 2e = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20 \end{aligned}$$

Untuk w_E adalah jumlah semua bobot sisi, maka

$$\begin{aligned} w_E &= wt(e_1) + wt(e_2) + wt(e_3) + wt(e_4) \\ &= 2v + e - (v_1 + v_5) = 3 + 4 + 5 + 6 = 18 \end{aligned}$$

Walaupun demikian, nilai 2 dan 3 tidak mungkin karena e tidak akan bernilai integer, dan nilai 4 juga tidak mungkin karena jika kedua ujung lintasan diberi label 2, maka bobot titik tidak ada yang bernilai 3. Sehingga $ts(P_5) > 2$.

Terbukti bahwa $ts(P_n) \geq \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil$ untuk $n = 2$ atau $n = 5$.

Kasus 2. $n \neq 2$ dan $n \neq 5$

Dari penelitian sebelumnya didapatkan, $tes(P_n) = tvs(P_n) = \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil$. Jadi $(P_n) \geq max\,\{tes(G), tvs(G)\} \leq ts(G) = \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil = tvs(P_n)$.

Akan ditunjukkan $ts(P_n) \leq \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil$. Untuk P_n adalah sebuah graf lintasan $v_1 e_1 v_2 e_2 \ldots e_{n-1} v_n$.

Misalnya f adalah pelabelan tak teratur total :

- $n \neq 2$ dan salah satu $n \equiv 2$ (mod 9) atau $n \equiv 8$ (mod 9)

$$f(e_i) = \begin{cases} 1 & \text{, jika } i = 1,2; \\ i - f(e_{i-2}) - f(e_{i-1}) & \text{, jika } i = 3,4,\ldots,\frac{n+4}{3}; \\ i + 1 - f(e_{i-2}) - f(e_{i-1}) & \text{, jika } i = \frac{n+7}{3} \text{ atau } i = \frac{2n+8}{3}, \frac{2n+11}{3}, \ldots, n-3; \\ i + 2 - f(e_{i-2}) - f(e_{i-1}) & \text{, jika } i = \frac{n+10}{3}, \frac{n+13}{3}, \ldots, \frac{2n+5}{3}; \\ n - 1 - f(e_{n-4}) - f(e_{n-3}) = \frac{n+1}{3} & \text{, jika } i = n-2 \\ n - f(e_{n-3}) - f(e_{n-2}) = \frac{n+1}{3} & \text{; jika } i = n-1, i \neq 7 \end{cases}$$

Bobot untuk pelabelan titiknya adalah :

$$wt(v_i) = \begin{cases} i + 1 & \text{, jika } i = 1,2,\ldots,\frac{n+4}{2}; \\ i + 2 & \text{, jika } i = \frac{n+7}{3}, \frac{n+10}{3}, \ldots n-1; \\ \frac{n+10}{3} & \text{, jika } i = n. \end{cases}$$

Karena

$$wt(e_{i-1}) = wt(v_i) + wt(v_{i-1}) - f(e_{i-2}) - f(e_{i-1}) - f(e_i),$$

Diperoleh

$$wt(e_i) = \begin{cases} i+2\ , & \text{jika } i = 1,2,\dots,\dfrac{2n+2}{3}; \\ i+3\ , & \text{jika } i = \dfrac{2n+5}{3},\dfrac{2n+8}{3},\dots n-2; \\ \dfrac{2n+11}{3}\ , & \text{jika } i = n-1. \end{cases}$$

f adalah fungsi dari $V(P_n) \cup E(P_n) \to \left\{1,2,\dots,\left\lceil\frac{n+2}{3}\right\rceil\right\}$ yang mana tidak terdapat titik-titik yang memiliki bobot yang sama dan tidak terdapat sisi yang memiliki bobot yang sama. Jadi f adalah pelabelan-k tak teratur total. Dapat disimpulkan bahwa $ts(P_n) \leq \left\lceil\frac{n+1}{3}\right\rceil$.