

BAB II

LANDASAN TEORI

Pada Bab ini akan diberikan teori tentang distribusi Log Pearson III, distribusi Gumbel, estimasi parameter maksimum *Likelihood*, uji kesesuaian distribusi serta beberapa definisi yang berkaitan dengan penelitian penulis. distribusi ini juga membutuhkan beberapa fungsi khusus seperti fungsi gamma dan eksponensial serta beberapa teori yang mendukung penelitian seperti definisi variabel acak, distribusi peluang kontinu, dan fungsi pembangkit momen.

Distribusi Log Pearson III dan distribusi Gumbel merupakan distribusi peluang yang menggunakan variabel acak. Pada umumnya, terdapat dua macam distribusi peluang yang biasa dikenal dalam ilmu statistika yaitu distribusi peluang dengan variabel acak diskrit dan distribusi peluang dengan variabel acak kontinu.

2.1 Variabel Acak

Definisi 2.1.1 (Ronald E. Walpole dkk, 1995) Variabel acak merupakan fungsi yang memetakan setiap anggota ruang sampel S ke bilangan real.

Variabel acak biasa disimbol dengan X sedangkan nilainya disimbol dengan x .

Contoh :

Jika tiga mobil dipilih secara acak dengan kategori mobil dibagi menjadi dua yaitu mobil memiliki mesin disel (D) dan mobil tidak memiliki mesin disel (F) maka ruang sampel nya adalah $S = \{(DDD), (DDF), (DFF), (FFF), (DFD), (FFD), (FDF), (FDD)\}$. Akan diberikan tanda '3' untuk hasil yang menunjukkan tiga mobil disel. Tanda '2' untuk hasil yang menunjukkan dua mobil disel. Tanda '1' untuk hasil yang menunjukkan satu mobil disel. Tanda '0' untuk menunjukkan hasil nol mobil disel. Oleh karena itu, variabel acak X adalah 3, 2, 1, 0, 2, 1, 1, 2.

Definisi 2.1.2 (Pransanna Sahoo, 2008) Jika ruang sampel dari variabel acak X dapat dihitung, maka X dikatakan variabel acak diskrit.

Definisi 2.2.2 (Pransanna Sahoo, 2008) Peluang dari suatu kejadian A ialah total dari semua titik sampel di A , sedemikian sehingga :

- a. $0 \leq P(A) \leq 1$
- b. $P(\emptyset) = 0$, dan
- c. $P(S) = 1$

Definisi 2.2.3 (Pransanna Sahoo, 2008) Misalkan R_x adalah ruang sampel dari variabel acak X . Fungsi $f: R_x \rightarrow \mathbb{R}$ sehingga fungsi densitas peluang (*probability density function / pdf*) dari X didefinisikan sebagai berikut :

$$f(x) = P(X = x) \quad (2.2)$$

Definisi 2.2.4 (Pransanna Sahoo, 2008) Fungsi $f(x)$ dikatakan fungsi densitas peluang dari variabel acak X kontinu bila memenuhi syarat berikut :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (2.3)$$

Misalkan diberi suatu fungsi $f(x)$ dimana $a < x < b$ untuk setiap a, b anggota bilangan real, $f(x)$ dikatakan fungsi densitas peluang dari variabel acak X kontinu, apabila hasil dari $\int_a^b f(x) dx = 1$.

Definisi 2.2.5 (Pransanna Sahoo, 2008) Jika X adalah variabel acak dengan ruang sampel R_x yang mempunyai fungsi densitas $f(x)$ maka rata-rata dari X yang dinotasikan dengan $E(X)$ didefinisikan :

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{x \in R_x} xf(x) & , \text{jika } X \text{ diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx & , \text{jika } X \text{ kontinu} \end{cases} \quad (2.4)$$

Definisi 2.2.6 (Pransanna Sahoo, 2008) Jika X adalah variabel acak dengan rata-rata $E(X)$ maka varians dari X yang dinotasikan dengan $Var(X)$ didefinisikan :

$$Var(X) = E([X - E(X)]^2) \quad (2.5)$$

Definisi 2.2.7 (Pransanna Sahoo, 2008) Jika X adalah variabel acak dengan rata-rata $E(X)$ dan varians $Var(X)$ maka :

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \quad (2.6)$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Definisi 2.2.8 (Ronald E. Walpole dkk, 1995) Fungsi Gamma didefinisikan sebagai berikut :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad (2.7)$$

Definisi 2.2.9 (Ronald E. Walpole dkk, 1995) Variabel acak kontinu X dikatakan berdistribusi gamma dengan parameter $a > 0$ dan $\beta > 0$ jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & x > 0 \\ 0 & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases} \quad (2.8)$$

dimana $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$.

Akan dibuktikan bahwa fungsi densitas peluang gamma memenuhi sifat distribusi peluang kontinu sebagai berikut :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx$$

Misal :

$$y = \frac{x}{\beta}$$

$$x = y\beta$$

$$dx = \beta dy$$

Sehingga :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y\beta)^{\alpha-1} e^{-y}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^{\alpha-1} \beta^{\alpha-1} e^{-y}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} \beta dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Jadi, terbukti bahwa fungsi densitas peluang gamma memenuhi sifat distribusi peluang kontinu.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Definisi 2.2.10 (Ronald E. Walpole dkk, 1995) Fungsi eksponensial didefinisikan sebagai :

$$f(x) = \beta e^{-x\beta} \quad (2.9)$$

Definisi 2.2.11 (Ronald E. Walpole dkk, 1995) Variabel acak kontinu X dikatakan berdistribusi eksponensial dengan parameter β , bila fungsi densitasnya berbentuk:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & 0 \leq x \leq \infty \\ 0 & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases} \quad (2.10)$$

dimana $\beta > 0$.

Akan dibuktikan bahwa fungsi densitas peluang eksponen memenuhi sifat distribusi peluang kontinu.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} dx$$

Misal :

$$u = \frac{x}{\beta}$$

$$x = \beta u$$

$$dx = \beta du$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} dx = \int_0^{\infty} e^{-u} du$$

$$= -e^{-u} \Big|_0^{\infty}$$

$$= -e^{-x/\beta} \Big|_0^{\infty}$$

$$= -e^{-\theta\infty} - (-e^{-\theta 0})$$

$$= 0 + 1$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} dx = 1$$

Jadi, terbukti bahwa fungsi densitas peluang eksponen memenuhi sifat distribusi peluang kontinu.

Definisi 2.2.12 (Agung Primadi, 2013) Jika X adalah variabel acak dengan fungsi densitas peluang $f(x)$, fungsi pembangkit momen dari X dinotasikan dengan $\mu_x(t)$ adalah sebagai berikut :

$$\mu_x(t) = E(e^{tx}) \quad (2.11)$$

$$\mu_x(t) = \begin{cases} \sum_x e^{tx} f(x) , & \text{jika } X \text{ diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx , & \text{jika } X \text{ kontinu} \end{cases} \quad (2.12)$$

Untuk menentukan rata-rata dan variasi suatu fungsi densitas peluang dengan menggunakan fungsi pembangkit momen dapat ditentukan melalui turunan pertama fungsi pembangkit momen pada saat $t = 0$ dan turunan keduanya pada saat $t = 0$.

Penjelasan diatas merupakan beberapa teori yang terkait dengan model yang digunakan dalam penelitian ini. Distribusi Log Pearson III dan distribusi Gumbel termasuk ke dalam distribusi peluang dengan variabel acak kontinu.

2.3 Distribusi Log Pearson III

Distribusi Log Pearson III merupakan anggota dari keluarga distribusi Pearson. Distribusi Log Pearson III juga merujuk pada distribusi Gamma. Distribusi ini mirip dengan *Generalized Extreme Value* menggunakan tiga parameter yaitu parameter skala, bentuk, dan lokasi (Nick Millington dkk, 2011).

Definisi 2.3.1 (Kishore Arora dkk, 1989) Misalkan $Y = \ln X$ merupakan variabel acak dari distribusi Pearson maka fungsi densitas peluang dari Y didefinisikan sebagai berikut :

$$g(y) = \frac{1}{|\alpha|\Gamma(\beta)} \left[\frac{y-\sigma}{\alpha} \right]^{\beta-1} e^{-\left[\frac{y-\delta}{\alpha} \right]} \quad (2.13)$$

Definisi 2.3.2 (Kishore Arora dkk, 1989) Jumlah dari X didefinisikan sebagai variabel acak dari Log Pearson III, berdasarkan turunan Persamaan 2.13 yang diturunkan diperoleh fungsi densitas peluang dari X adalah sebagai berikut :

$$f(x) = \frac{1}{|\alpha|x\Gamma(\beta)} \left[\frac{\ln x - \sigma}{\alpha} \right]^{\beta-1} e^{-\left[\frac{\ln x - \sigma}{\alpha} \right]} \quad (2.14)$$

dimana $\beta > 0, \alpha \neq 0$.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
 1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

2.4 Distribusi Gumbel

Distribusi Gumbel pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan Jerman yang bernama Emil Gumbel. Distribusi Gumbel merupakan salah satu bentuk khusus dari distribusi nilai ekstrim dimana parameter lokasinya bernilai nol (Miftahul Jannah, 2015).

Definisi 2.4.1 (Merran Evans, 1975) Fungsi densitas kumulatif variabel X Gumbel didefinisikan sebagai berikut:

$$F(x) = \exp\left(-\exp\left(\frac{\alpha-x}{\beta}\right)\right), \quad -\infty < x < \infty, \beta > 0 \quad (2.22)$$

Definisi 2.4.2 (Merran Evans, 1975) Variabel acak kontinu X berdistribusi gumbel jika fungsi densitas peluangnya sebagai berikut :

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \exp\left(\frac{\alpha-x}{\beta}\right) \exp\left(\exp\left(\frac{\alpha-x}{\beta}\right)\right), \quad -\infty < x < \infty \quad (2.23)$$

dimana $\beta > 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

dengan,

$f(x)$: fungsi densitas peluang dari distribusi gumbel

x : Variabel acak kontinu

α : Parameter lokasi

β : Parameter skala

dengan rata-rata, variansi, koefisien kemencengan dan kurtosis sebagai berikut :

$$\text{rata-rata} \quad : \mu_x = \alpha - \beta\Gamma'(1) \quad (2.24)$$

$$\text{variansi} \quad : \sigma^2_x = \beta^2\pi^2/6 \quad (2.25)$$

$$\text{koefisien kemencengan} \quad : \gamma = 1.139547 \quad (2.26)$$

$$\text{kurtosis} \quad : \omega = 5.4 \quad (2.27)$$

$\Gamma'(1) = -0.57721$ adalah turunan pertama dari fungsi gamma $\Gamma(n)$ dengan $n = 1$.

Salah satu tujuan penelitian ini yaitu ingin mendapatkan model distribusi yang sesuai untuk data curah hujan Kota Pekanbaru. Oleh sebab itu, terlebih dahulu dilakukan estimasi atau dugaan parameter dari suatu data. Dalam penelitian ini penulis memilih estimasi parameter menggunakan metode maksimum *Likelihood*.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

2.6 Metode Newton-Raphson

Metode Newton-Raphson merupakan proses iterasi yang dilakukan dalam metode numerik yang dapat digunakan untuk mencari solusi atau pemecahan suatu persamaan non linier. Proses iterasi merupakan teknik penghampiran numerik yang dilakukan secara berulang-ulang, dan setiap hampiran disebut dengan iterasi (Elisa T. lee dkk, 2001).

Metode Newton-Raphson bertujuan mencari permasalahan x_1, x_2, \dots, x_n yang ditunjukkan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Misalkan a_{ij} adalah turunan parsial dari fungsi f_i terhadap x_j atau dapat ditulis

$a_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ sehingga dapat dibentuk matriks yang disebut sebagai matriks

Jacobian seperti berikut :

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Selanjutnya akan dicari invers dari Persamaan 2.33 yang disimbolkan dengan J^{-1} ditunjukkan sebagai berikut :

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Selanjutnya misalkan $x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k$ merupakan nilai-nilai hampiran pada iterasi k dan misalkan $f_1^k, f_2^k, \dots, f_n^k$ adalah nilai-nilai yang berhubungan dengan fungsi f_1, f_2, \dots, f_n yaitu :

$$\begin{aligned} f_1^k(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2^k(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$f_n^k(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (2.35)$$

Misalkan b_{ij}^k dengan ij elemen pada matriks J^{-1} yang memiliki $x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k$, sehingga perkiraan nya ditunjukkan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= x_1^k - (b_{11}^k f_1^k + b_{12}^k f_2^k + \dots + b_{1n}^k f_n^k) \\ x_2^{k+1} &= x_2^k - (b_{21}^k f_1^k + b_{22}^k f_2^k + \dots + b_{2n}^k f_n^k) \\ &\vdots \\ x_n^{k+1} &= x_n^k - (b_{n1}^k f_1^k + b_{n2}^k f_2^k + \dots + b_{nn}^k f_n^k) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Proses iterasi ini dimulai dengan penentuan nilai awal $x_1^0, x_2^0, \dots, x_p^0$ terlebih dahulu. Proses iterasi ini dilakukan secara berulang-ulang dan dapat dihentikan apabila f_1, f_1, \dots, f_n yang diperoleh menghasilkan nilai yang mendekati nol atau ketika perbedaan nilai x pada dua iterasi berturut-turut tidak terlalu berarti (Elisa T. lee dkk, 2001).

Selanjutnya, untuk menentukan model yang terbaik diantara distribusi Log Pearson III dan distribusi Gumbel untuk data curah hujan Kota Pekanbaru maka perlu dilakukan uji kesesuaian distribusi.

2.7 Uji Kesesuaian Distribusi

Uji kesesuaian dimaksudkan untuk menentukan persamaan distribusi peluang yang telah dipilih dapat mewakili distribusi statistik sampel data yang dianalisis. Dalam penelitian ini penulis menggunakan dua macam uji yaitu uji *Akaike Information Criterion (AIC)* dan *Bayesian Information Criterion (BIC)*.

2.7.1 Uji Akaike Information Criterion (AIC)

Akaike Information Criterion (AIC) merupakan ukuran informasi yang dikembangkan oleh Hirotugu Akaike pada tahun 1971 mengenai ukuran terbaik dalam kelayakan pengukuran estimasi model. Dengan kata lain, *AIC* merupakan alat ukur untuk memilih model yang tepat. Semakin kecil nilai *AIC* maka model yang digunakan semakin baik (Suci Fratama Sari, 2015). Adapun rumus *AIC* adalah sebagai berikut:

$$AIC = 2k - 2 \ln(L) \quad (2.37)$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

dimana k adalah banyaknya parameter dan L adalah nilai maksimum dari fungsi *likelihood* berdasarkan estimasi model.

2.7.2 Uji Bayesian Information Criterion (BIC)

Bayesian Information Criterion (BIC) sering disebut sebagai *Schwarz criterion* yang dikembangkan oleh Gideon Schwarz. Kriteria uji ini hampir sama dengan *AIC*. Semakin kecil nilai *BIC* maka model yang digunakan semakin baik (Suci Fratama Sari, 2015). Adapun rumus *BIC* adalah sebagai berikut:

$$BIC = -2 \ln(L) + k \ln(m) \quad (2.38)$$

dimana L adalah nilai maksimum dari fungsi *likelihood* berdasarkan estimasi model, k adalah banyaknya parameter, dan m adalah ukuran sampel.