BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Graf

Teori graf pertama kali ada pada tahun 1736, ketika Euler mencoba untuk mencari solusi dari permasalahan jembatan Konigsberg (Vasudev, 2006). Graf merupakan gambaran antara himpunan elemen-elemen tidak kosong yang disebut titik(*vertex*) dengan himpunan pasangan tidak terurut titik-titik tersebut yang disebut sisi (*edge*). Graf digunakan untuk merepresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut (Munir, 2009).

Berikut ini merupakan definisi graf:

Definisi 2.1 (Bondy dan Murty, 1976) Graf *G* adalah tripel terurut $(V(G), E(G), \psi_G)$ yang terdiri dari himpunan titik tak kosong $V(G)$, himpunan sisi $E(G)$, yang terpisah dari himpunan $V(G)$, dan fungsi insidensi ψ_G yang menghubungkan setiap sisi dari *G* dengan pasangan tak terurut dari titik *G*. Jika *e* adalah sisi dan *u* dan *v* adalah titik-titik sehingga $\psi_G(e) = uv$, kemudian *e* dikatakan terkait dengan *u* dan *v* ; titik-titik *u* dan *v* disebut ujung dari *e*.

Berikut adalah contoh graf untuk menjelaskan Definisi 2.1:

$$G = (V(G), E(G), \psi_G)$$

dimana

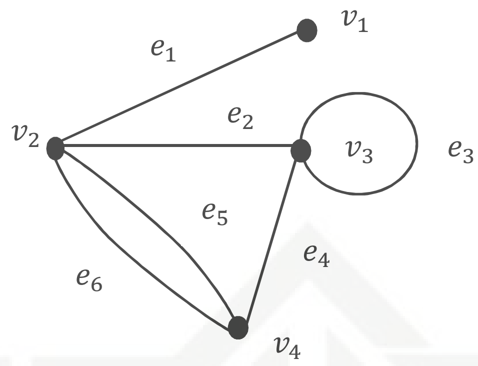
$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

dan ψ_G dapat didefinisikan sebagai

$$\psi_G(e_1) = v_1v_2, \psi_G(e_2) = v_2v_3, \psi_G(e_3) = v_3v_3$$

$$\psi_G(e_4) = v_3v_4, \psi_G(e_5) = v_2v_4, \psi_G(e_6) = v_2v_4$$



Gambar 2.1 Gambar Graf

Definisi 2.1 menyatakan bahwa $V(G)$ tidak boleh kosong , sedangkan $E(G)$ boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada, minimal satu. Graf yang hanya mempunyai satu buah titik tanpa sebuah sisi pun dinamakan graf trivial.

Titik pada graf dapat diberi nama dengan huruf, seperti $a, b, c, \ldots$ atau dengan bilangan asli $1, 2, 3, \ldots$ atau gabungan keduanya. Sedangkan sisi yang menghubungkan titik v_i dengan v_j dinyatakan dengan pasangan $v_i v_j$ atau dinyatakan dengan lambang $e_1, e_2, \ldots, e_n$ yang dapat ditulis sebagai $e = (v_i v_j)$. Banyaknya titik dari graf $G = (V, E)$ disebut *order* yang dinotasikan dengan $|V|$. Sedangkan banyaknya sisi dari graf $G = (V, E)$ disebut *size* yang dinotasikan dengan $|E|$.

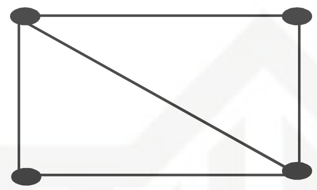
2.2 Jenis-jenis Graf

Pengelompokan graf dapat dilihat berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada graf, berdasarkan orientasi arah pada sisi, dan berdasarkan strukturnya.

Berdasarkan ada tidaknya gelang atau sisi ganda pada graf, maka secara umum graf dapat dibagi menjadi dua jenis, yaitu (Munir, 2009):

1. Graf Sederhana (*Simple Graph*)

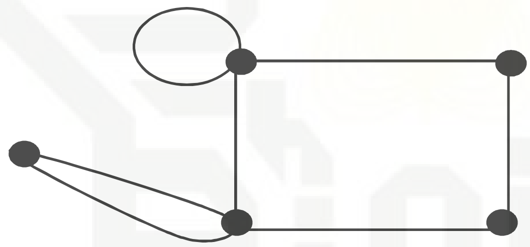
   Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung ganda maupun sisi gelang. Pada graf sederhana sisi adalah pasangan tidak terurut (*unordered pairs*). Berikut ini adalah contoh graf sederhana:



Gambar 2.2 Graf Sederhana

2. Graf Tak-Sederhana (*Unsimple-Graph*)

   Graf tak-sederhana adalah graf yang mengandung sisi ganda atau gelang. Graf tak sederhana dibagi dua jenis, yaitu : graf ganda (*multigraph*) dan graf semu (*pseudograph*). Berikut ini adalah contoh graf tak-sederhana:

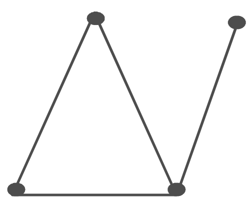


Gambar 2.3 Graf Tak Sederhana

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dapat dibagi menjadi dua jenis, yaitu (Vasudev, 2006):

1. Graf Tak Berarah (*Undirected Graph*)

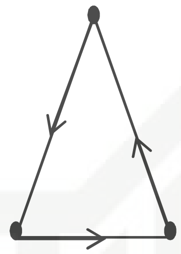
   Jika setiap sisi dari graf G tidak memiliki arah maka graf disebut graf tak berarah. Berikut ini adalah contoh graf tak-berarah:



Gambar 2.4 Graf Tak Berarah

2. Graf Berarah (*Directed Graph*)

Jika setiap sisi dari graf G memiliki arah maka graf disebut graf berarah. Berikut ini adalah contoh graf berarah:

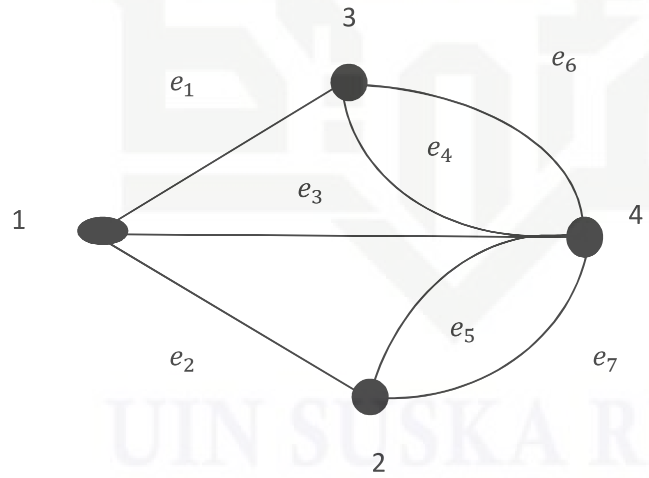


Gambar 2.5 Graf Berarah

Berdasarkan strukturnya, maka secara umum graf dapat dibagi menjadi enam jenis, yaitu (Wibisono, 2008):

1. *Multigraph,* yaitu graf yang mempunyai satu atau lebih pasangan sisi ganda yang menghubungkan dua buah titiknya.

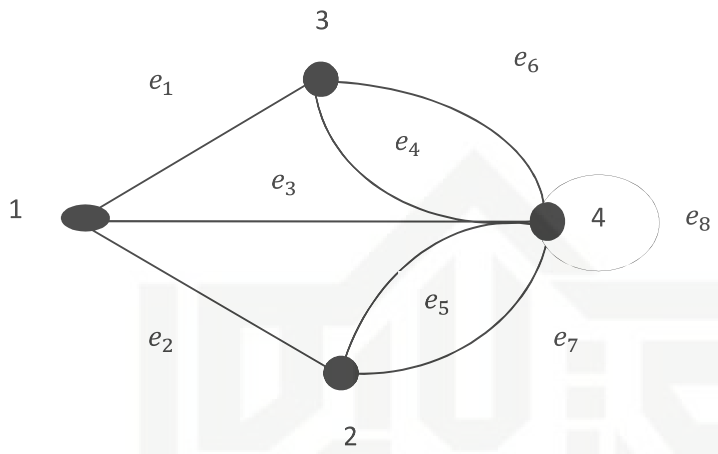
   Berikut ini adalah contoh *Multigraph*:



Gambar 2.6 *Multigraph*

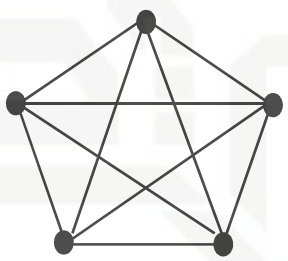
2. *Pseudograph,* yaitu graf yang mempunyai satu atau lebih pasangan sisi ganda yang menghubungkan dua buah titiknya *(multigraph)* dan memiliki satu atau lebih loop pada titiknya.

Berikut ini adalah contoh *Pseudograph*:



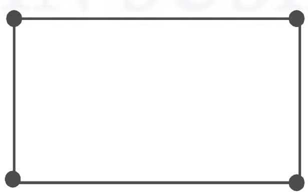
Gambar 2.7 *Pseudograph*

3. *Trivialgraph*, yaitu graf yang terdiri dari satu titik.
4. Graf lengkap, yaitu graf yang setiap titiknya terhubung dengan semua titik yang lain dengan hanya satu sisi. Berikut ini adalah contoh graf lengkap:



Gambar 2.8 Graf Lengkap

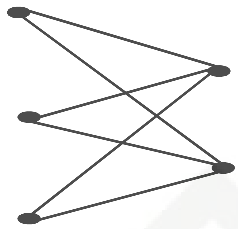
5. Graf teratur, yaitu graf yang setiap titiknya mempunyai sejumlah derajat yang sama. Berikut ini adalah contoh graf terarur:



Gambar 2.9 Graf Teratur

6. *Bipartitegraph,* yaitu graf yang titik-titiknya dapat dikelompokkan menjadi dua, titik-titik dalam satu kelompok tak terhubung dan titik-titik

antar kelompok terhubung lengkap. Berikut ini adalah contoh *Bipartitegraph*:

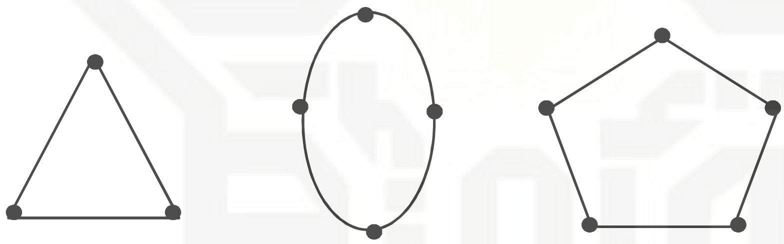


Gambar 2.10 *Bipartitegraph*

Pada graf sederhana (*Simple Graph*) terdapat beberapa graf khusus yang sering ditemui, yaitu:

1. Graf Lingkaran (*Cycle Graph*)

   Graf lingkaran adalah graf sederhana yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n titik dinotasikan dengan C_n.



C_3 C_4 C_5

Gambar 2.11 Graf Lingkaran C_3, C_4, dan C_5

2. Graf Lintasan (*Path Graph*)

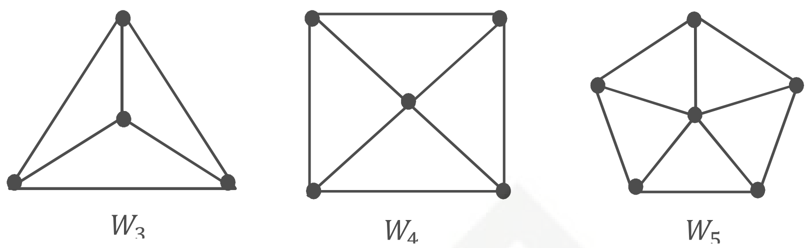
   Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari lintasan tunggal. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n.

P_1 P_2 P_3

Gambar 2.12 Graf Lintasan P_1, P_2, dan P_3

3. Graf Roda (*Wheel Graph*)

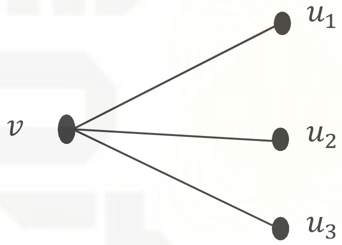
   Graf roda dibentuk dari C_n dengan $n \geq 3$, dan hubungan titik baru ke masing-masing n titik di C_n dengan sisi baru (Rosen, 2007). Graf roda dinotasikan dengan W_n yang terdiri dari $n + 1$ titik dan $2n$ sisi.



Gambar 2.13 Graf Roda W_3, W_4, dan W_5

4. Graf Bintang (Ramdani, 2014)

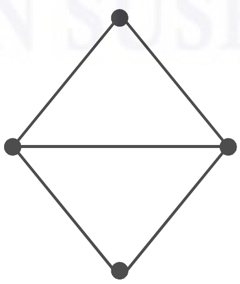
Graf bintang dinotasikan dengan S_n adalah suatu graf bipartit lengkap $K_{1,n}$. Gambar 2.9 merupakan salah satu contoh dari graf bintang.



Gambar 2.14 Graf Bintang $S_3 \approx K_{1,3}$

5. Graf Belah Ketupat

Graf belah ketupat, dinotasikan dengan Bk adalah graf sederhana yang diperoleh dari graf lingkaran $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4$ dengan penambahan satu sisi v_2 dan v_4. Graf belah ketupat menyerupai belah ketupat yang hanya memiliki satu diagonal.

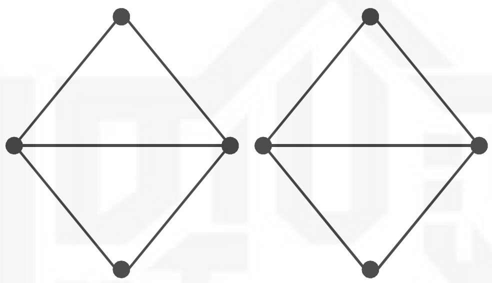


Bk

Gambar 2.15 Graf Belah Ketupat Bk

Dengan kata lain, graf belah ketupat merupakan graf lengkap K_4 yang dihilangkan satu sisi diagonalnya.

Graf mBk merupakan graf yang diperoleh dengan menggandakan graf Bk sebanyak m kali, dimana himpunan titik dan sisi dari setiap hasil penggandaan tidak ada yang beririsan. mBk dinamakan dengan *m-copy* graf *Bk.* Gambar 2.16 merupakan salah satu contoh graf *copy.*



Gambar 2.16 Graf *2Bk*

2.3 Pelabelan Graf

Pelabelan graf adalah pemetaan yang memasangkan elemen-elemen graf dengan bilangan-bilangan bulat positif atau non negatif. Pelabelan dengan domain himpunan titik disebut pelabelan titik (*vertex labelling*), pelabelan dengan domain himpunan sisi disebut pelabelan sisi (*edge labelling*), dan pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi disebut pelabelan total (*total labelling*).

Bobot (*weight*) dari elemen graf adalah jumlah dari semua label yang berhubungan dengan elemen graf tersebut. Bobot dari titik v dengan pelabelan f adalah $wt(v) = f(v) + \sum_{uv \in E} f(uv)$. Sedangkan bobot dari sisi uv adalah $wt(uv) = f(u) + f(uv) + f(v)$.

Pelabelan graf yang belakangan ini banyak mendapat perhatian adalah pelabelan total tak teratur. Tahun 2007, Bača, Jendrol, Miller, dan Ryan memperkenalkan dua jenis dari pelabelan total tak teratur yaitu: pelabelan total tak teratur titik dan pelabelan total tak teratur sisi. Kemudian pada tahun 2013, Marzuki, Salman, dan Miller memperkenalkan pelabelan total tak teratur total yang merupakan kombinasi pelabelan total tak teratur titik dan pelabelan total tak teratur sisi. Berikut ini penjelasan tentang pelabelan total tak teratur berdasarkan jenis-jenisnya:

a. Pelabelan Total Tak Teratur Titik

Pelabelan total tak teratur titik merupakan salah satu jenis pelabelan total tak teratur yang diperkenalkan oleh Bača, dkk. Pelabelan total tak teratur titik sudah banyak digunakan untuk mencari nilai total ketakteraturan titik berbagai jenis graf. Berikut ini definisi pelabelan total tak teratur titik:

Definisi 2.2 (Bača, dkk., 2007) Pelabelan-k total dikatakan pelabelan-k total tak teratur titik dari graf G, jika untuk setiap titik x dan y yang berbeda maka $wt(x) \neq wt(y)$, dimana $wt(x) = f(x) + \sum_{ux \in E} f(ux)$. Nilai total ketakteraturan titik (*total vertex irregularity strength)* dari graf G, yang dinotasikan dengan $tvs\ (G)$ adalah label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur titik.

Penelitian mengenai nilai $tvs\ (G)$ dilakukan oleh Bača, dkk., dengan diberikan batas atas dan batas bawah seperti dituliskan pada teorema berikut ini:

Teorema 2.1 (Bača, dkk., 2007) Misalkan G adalah graf (p, q) dengan derajat minimum δ dan derajat maksimum Δ, maka:

$$\left\lceil \frac{p + \delta}{\Delta + 1} \right\rceil \leq tvs(G) \leq p + \Delta - 2\delta + 1$$

b. Pelabelan Total Tak Teratur Sisi

Pelabelan total tak teratur sisi juga diperkenalkkan oleh Bača, dkk., dan juga banyak digunakan untuk mencari nilai total ketakteraturan sisi berbagai jenis graf. Berikut ini definisi pelabelan total tak teratur sisi:

Definisi 2.3 (Bača, dkk., 2007) Pelabelan-k total dikatakan pelabelan-k total tak teratur sisi dari graf G, jika untuk sembarang dua sisi $e = u_1v_1$ dan $w = u_2v_2$ yang berbeda di graf G berlaku $wt(e) \neq wt(w)$, dengan $wt(e) = f(u_1) + f(e) + f(v_1)$

dan $wt(w) = f(u_2) + f(w) + f(v_2)$. Nilai total ketakteraturan sisi *(total edge irregularity strength)* dari graf G, yang dinotasikan dengan *tes* (G) adalah label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur sisi.

Penelitian mengenai nilai $tes\,(G)$ dilakukan oleh Bača, dkk., dengan diberikan batas atas dan batas bawah seperti dituliskan pada teorema berikut ini:

Teorema 2.2 (Bača, dkk., 2007) Misalkan $G = (V, E)$ adalah suatu graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi tak kosong E, maka:

$$\left\lceil \frac{|E| + 2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E|$$

c. Pelabelan Total Tak Teratur Total

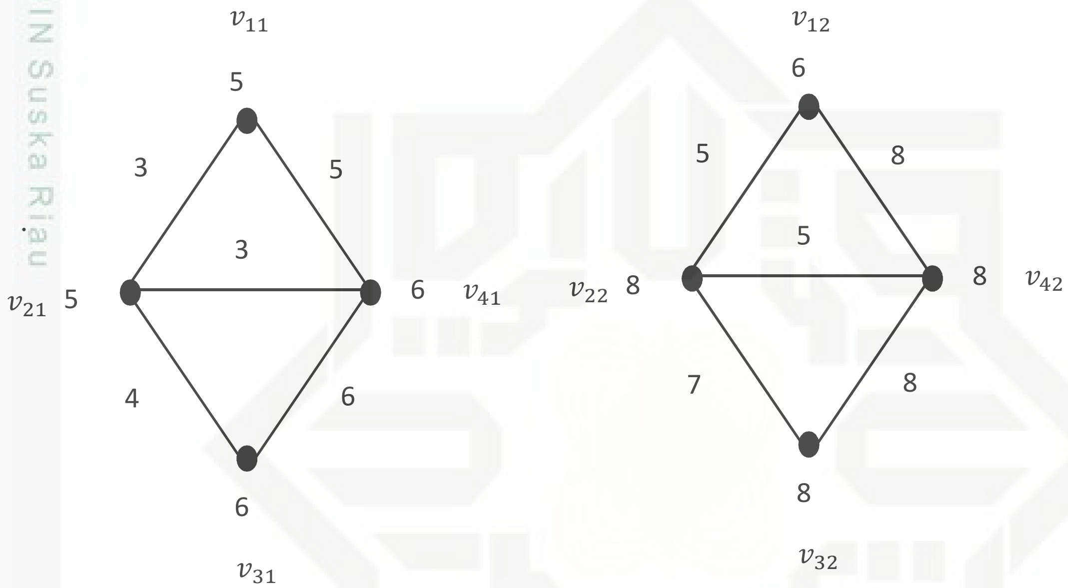
Pelabelan total tak teratur total merupakan kombinasi pelabelan total tak teratur titik dan pelabelan total tak teratur sisi yang diperkenalkan oleh Marzuki, dkk. Pelabelan total tak teratur total banyak digunakan untuk mencari nilai ketakteraturan total berbagai jenis graf. Berikut ini definisi pelabelan total tak teratur total:

Definisi 2.4 (Marzuki, dkk., 2013) Pelabelan-*k* total dikatakan pelabelan-*k* total tak teratur total dari graf G, jika untuk setiap titik *x* dan *y* yang berbeda maka $wt(x) \neq wt(y)$, dan untuk setiap sisi x_1x_2 dan y_1y_2 yang berbeda maka $wt(x_1x_2) \neq wt(y_1y_2)$. Nilai ketakteraturan total (*totally irregularity strength*) dari graf *G*, yang dinotasikan dengan $ts(G)$ adalah label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf *G* dengan pelabelan total tak teratur total.

Penelitian mengenai nilai $ts\,(G)$ dilakukan oleh C. C. Marzuki, dkk., dengan diberikan batas atas dan batas bawah seperti dituliskan pada teorema berikut ini:

Teorema 2.3 (Marzuki, dkk., 2013) Untuk setiap graf *G*, maka $ts(G) \geq \max\{tes(G), tvs(G)\}$.

Berikut ini diberikan contoh pelabelan-k total tak teratur total mBk, untuk m bilangan bulat positif $m = 2$. Untuk mendapatkan pelabelan-k total tak teratur total pada graf $2Bk$, maka pelabelan setiap titik memiliki bobot berbeda dan pelabelan setiap sisi juga memiliki bobot yang berbeda.



Gambar 2.17 Pelabelan-8 Total Tak Teratur Total pada $2Bk$

Gambar 2.17 label maksimum yang digunakan adalah 8. Berikut ini cara perhitungan bobot titik dan sisinya:

Perhitungan bobot titik pada graf $2Bk$ dengan menjumlahkan setiap label titik dan label sisi yang terkait dengan titik tersebut.

$wt(v_{11}) = f(v_{11}) + f(v_{11}v_{21}) + f(v_{11}v_{41}) = 5 + 3 + 5 = 13.$

$wt(v_{21}) = f(v_{21}) + f(v_{11}v_{21}) + f(v_{21}v_{31}) + f(v_{21}v_{41}) = 5 + 3 + 5 + 3 = 16.$

$wt(v_{31}) = f(v_{31}) + f(v_{21}v_{31}) + f(v_{31}v_{41}) = 5 + 6 + 6 = 17.$

$wt(v_{41}) = f(v_{41}) + f(v_{11}v_{41}) + f(v_{31}v_{41}) + f(v_{21}v_{41}) = 6 + 5 + 6 + 3 = 20.$

$wt(v_{12}) = f(v_{12}) + f(v_{12}v_{22}) + f(v_{12}v_{42}) = 6 + 5 + 8 = 19$

$wt(v_{22}) = f(v_{22}) + f(v_{12}v_{22}) + f(v_{22}v_{32}) + f(v_{22}v_{42}) = 8 + 5 + 7 + 5 = 25.$

$wt(v_{32}) = f(v_{32}) + f(v_{22}v_{32}) + f(v_{32}v_{42}) = 8 + 7 + 8 = 23.$

$wt(v_{42}) = f(v_{42}) + f(v_{12}v_{42}) + f(v_{32}v_{42}) + f(v_{22}v_{42}) = 8 + 8 + 8 + 5 = 29.$

Perhitungan bobot sisi pada graf $2Bk$ dengan menjumlahkan setiap label titik dan label sisi yang terkait dengan sisi tersebut.

$wt(v_{11}v_{21}) = f(v_{11}v_{21}) + f(v_{11}) + f(v_{21}) = 3 + 5 + 5 = 13.$

$wt(v_{21}v_{41}) = f(v_{21}v_{41}) + f(v_{21}) + f(v_{41}) = 3 + 5 + 6 = 14.$

$wt(v_{21}v_{31}) = f(v_{21}v_{31}) + f(v_{21}) + f(v_{31}) = 4 + 5 + 6 = 15.$

$wt(v_{11}v_{41}) = f(v_{11}v_{41}) + f(v_{11}) + f(v_{41}) = 5 + 5 + 6 = 16.$

$wt(v_{31}v_{41}) = f(v_{31}v_{41}) + f(v_{31}) + f(v_{41}) = 6 + 6 + 6 = 18.$

$wt(v_{12}v_{22}) = f(v_{12}v_{22}) + f(v_{12}) + f(v_{22}) = 5 + 6 + 8 = 19.$

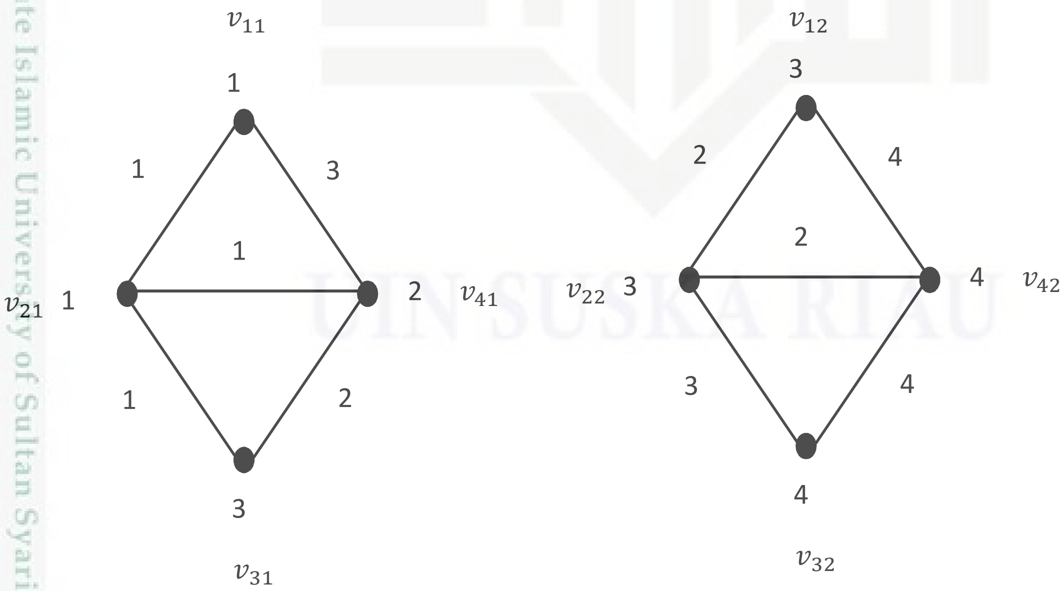
$wt(v_{22}v_{42}) = f(v_{22}v_{42}) + f(v_{22}) + f(v_{42}) = 5 + 8 + 8 = 21.$

$wt(v_{22}v_{32}) = f(v_{22}v_{32}) + f(v_{22}) + f(v_{32}) = 7 + 8 + 8 = 23.$

$wt(v_{12}v_{42}) = f(v_{12}v_{42}) + f(v_{12}) + f(v_{42}) = 8 + 6 + 8 = 22.$

$wt(v_{32}v_{42}) = f(v_{32}v_{42}) + f(v_{32}) + f(v_{42}) = 8 + 8 + 8 = 24.$

Dengan menggunakan label maksimum 8 diperoleh bobot setiap titiknya berbeda dan bobot setiap sisinya berbeda. Oleh karena itu pelabelan f dinamakan pelabelan-8 total tak teratur total pada $2Bk$.



Gambar 2.18 Pelabelan-4 Total Tak Teratur Total pada $2Bk$

Pada Gambar 2.18 label maksimum yang digunakan adalah 4. Berikut ini cara perhitungan bobot titik dan sisinya:

Perhitungan bobot titik pada graf $2Bk$ dengan menjumlahkan setiap label titik dan label sisi yang terkait dengan titik tersebut.

$wt(v_{11}) = f(v_{11}) + f(v_{11}v_{21}) + f(v_{11}v_{41}) = 1 + 1 + 3 = 5.$

$wt(v_{21}) = f(v_{21}) + f(v_{11}v_{21}) + f(v_{21}v_{31}) + f(v_{21}v_{41}) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$

$wt(v_{31}) = f(v_{31}) + f(v_{21}v_{31}) + f(v_{31}v_{41}) = 3 + 1 + 2 = 6.$

$wt(v_{41}) = f(v_{41}) + f(v_{11}v_{41}) + f(v_{31}v_{41}) + f(v_{21}v_{41}) = 2 + 3 + 2 + 1 = 8.$

$wt(v_{12}) = f(v_{12}) + f(v_{12}v_{22}) + f(v_{12}v_{42}) = 3 + 2 + 4 = 9.$

$wt(v_{22}) = f(v_{22}) + f(v_{12}v_{22}) + f(v_{22}v_{32}) + f(v_{22}v_{42}) = 3 + 2 + 3 + 2 = 10.$

$wt(v_{32}) = f(v_{32}) + f(v_{22}v_{32}) + f(v_{32}v_{42}) = 4 + 3 + 4 = 11.$

$wt(v_{42}) = f(v_{42}) + f(v_{12}v_{42}) + f(v_{32}v_{42}) + f(v_{22}v_{42}) = 4 + 4 + 4 + 2 = 14.$

Perhitungan bobot sisi pada graf $2Bk$ dengan menjumlahkan setiap label titik dan label sisi yang terkait dengan sisi tersebut.

$wt(v_{11}v_{21}) = f(v_{11}v_{21}) + f(v_{11}) + f(v_{21}) = 1 + 1 + 1 = 3.$

$wt(v_{21}v_{41}) = f(v_{21}v_{41}) + f(v_{21}) + f(v_{41}) = 1 + 1 + 2 = 4.$

$wt(v_{21}v_{31}) = f(v_{21}v_{31}) + f(v_{21}) + f(v_{31}) = 1 + 1 + 3 = 5.$

$wt(v_{11}v_{41}) = f(v_{11}v_{41}) + f(v_{11}) + f(v_{41}) = 3 + 1 + 2 = 6.$

$wt(v_{31}v_{41}) = f(v_{31}v_{41}) + f(v_{31}) + f(v_{41}) = 2 + 3 + 2 = 7.$

$wt(v_{12}v_{22}) = f(v_{12}v_{22}) + f(v_{12}) + f(v_{22}) = 2 + 3 + 3 = 8.$

$wt(v_{22}v_{42}) = f(v_{22}v_{42}) + f(v_{22}) + f(v_{42}) = 2 + 3 + 4 = 9.$

$wt(v_{22}v_{32}) = f(v_{22}v_{32}) + f(v_{22}) + f(v_{32}) = 3 + 3 + 4 = 10.$

$wt(v_{12}v_{42}) = f(v_{12}v_{42}) + f(v_{12}) + f(v_{42}) = 4 + 3 + 4 = 11.$

$wt(v_{32}v_{42}) = f(v_{32}v_{42}) + f(v_{32}) + f(v_{42}) = 4 + 4 + 4 = 12.$

Dengan menggunakan label maksimum 4 diperoleh bobot setiap titiknya berbeda dan bobot setiap sisinya berbeda. Oleh karena itu pelabelan f dinamakan pelabelan-4 total tak teratur total pada $2Bk$.

Telah diketahui nilai ketakteraturan total yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf G dengan pelabelan total tak teratur total, yang dinotasikan dengan $ts(G)$. Oleh karena itu, akan dicari nilai k minimum sedemikian sehingga terdapat pelabelan-k total tak teratur total pada graf $2Bk$. Sehingga dapat disimpulkan $ts(2Bk) \leq 4$.