© Hak cipta milik UIN Suska Riau

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

BAB II

LANDASAN TEORI

Dalam bab ini akan dibahas mengenai dasar-dasar teori yang akan digunakan untuk menganalisa model matematika penyebaran penyakit ebola dengan pengaruh adanya migrasi. Dasar-dasar teori tersebut meliputi persamaan diferensial, titik ekuilibrium, dan analisis kestabilan titik ekuilibrium model matematika menggunakan beberapa teorema dan definisi yang berhubungan dengan analisis kestabilan, definisi matriks *Jacobian* dan nilai eigen, serta kriteria *Routh-Hurwitz*.

2.1 Pengertian Penyakit Ebola

Ebola adalah penyakit menular yang disebabkan oleh virus dari genus Ebolavirus, familia Filoviridae. Menurut *World Organization Health (WHO)*, Ebola adalah salah satu penyakit yang diketahui paling mematikan. Virus ebola pertamakali ditemukan di afrika tepatnya pada tanggal 27 juni tahun 1976 yang lalu. Mula-mula ada seorang pekerja toko di Nzara, Sudan tiba-tiba sakit. Lima hari berselang, ia meninggal dunia. Dengan kematiannya, dunia tanpa sadar mulai menyaksikan dampak dari virus ebola pertama yang menakutkan. Virus ini kemudian menjadi wabah di seluruh area tersebut. Dilaporkan terjadi 284 kasus, setengah di antaranya memuat korban sekarat. Menurut organisasi kesehatan dunia *(WHO)*, sejak saat itu terjadi 15 epidemi di Negara-negara Afrika.

Hingga saat ini secara genetis telah teridentifikasi empat tipe virus ebola, masing-masing dinamai dengan nama lokasi dimana virus tersebut pertamakali diakui atau ditemukan. Pertama ebola zaire, dimana virus ini ditemukan di Zaire tahun 1976 yaitu tempat pertamakali terjangkitnya virus ebola, kedua ebola sudan dimana tipe ini pertamakali ditemukan dibagian barat sudan pada akhir tahun 1976 dan menyerang kembali pada tahun 1979, yang ketiga ebola reston dimana virus ini merupakan variasi dari virus ebola yang ditemukan pada monyet afrika yang didatangkan dari amerika, dan yang terakhir ebola ivory coast yang ditemukan pada tahun 1995 di daerah pantai ivory, Afrika Barat di hutan Tai. Dari

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

keempat virus tersebut, terdapat tiga tipe virus ebola yang dapat menyerang manusia yaitu ebola zaire, sudan dan ivory coast, sedangkan ebola reston hanya dapat menyerang primata seperti monyet, kera dan simpanse.

2.2 Cara Penularan Penyakit Ebola

Penyakit ebola dapat ditularkan lewat kontak langsung dengan cairan tubuh dari orang yang terinfeksi. Virus ebola hidup ditempat yang lembab, lingkungan yang gelap dan tidak akan menyebabkan tipikal penularan melalui udara tetapi bisa menetap pada partikel udara yang mengambang dan darah orang yang terinfeksi, cairan tubuh, kotak langsung dengan kotoran, urine, air liur dan air mani akan memungkinkan terinfeksi. Kondisi pria yang telah pulih, sampai tujuh minggu setelah masa pemulihan masih bisa menyebarkan virus melalui air mani mereka. Ketika kulit orang yang sehat terluka atau selaput mukosa melakukan kontak dengan lingkungan yang terkontaminasi oleh cairan lendir pasien ebola (seperti pakaian kotor, sprei atau jarum suntik yang telah digunakan), juga akan terinfeksi. Mayat tubuh seseorang yang terinfeksi virus ebola juga adalah sumber infeksi, oleh sebab itu virus ebola ini juga disebut virus zombie dan maka dari itu mayat orang yang mati karena virus ebola harus dilakukan perlindungan dari sentuhan dan segera menguburkannya.

Masa inkubasi virus ebola dari 2 sampai 21 hari, umumnya antara 5 sampai 10 hari. Dalam masa inkubasinya virus ebola belum bisa menularkan kepada orang lain. Sebenarnya manusia bukanlah sarang alami dari virus ebola. Orang pertamakali terjangkit virus ini diyakini mereka yang melakukan kontak langsung dengan hewan yang terinfeksi virus tersebut. Hewan yang berpotensi menyebarkan virus ebola kepada manusia anara lain simpanse, gorila, antelop hutan dan monyet cynomolgus. Setelah seseorang terinfeksi dari hewan maka orang tersebut berpotensi menyebarkan virus kepada orang lain melalui cairan darah, liur dan lendir.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

2.3 Gejala dan Pencegahan Penyakit Ebola

Gejala dari *Ebola Hemorrhagic Fever (EHF)* biasanya dimulai empat hingga 15 belas hari sesudah seseorang terinfeksi. Rata-rata gejala yang dialami berupa sakit seperti flu, demam tinggi dan nyeri. Semua gejala-gejala tersebut biasanya diikuti dengan diare, muntah, serta kemunculan ruam diseluruh tubuh. Lalu dimulailah gejala menyakitkan seperti keluarnya darah dari semua lubang di tubuh. Dilanjutkan dengan rusaknya organ-organ tubuh bagian dalam si penderita. Masuk ke hari ketujuh hingga kesepuluh, muncul rasa kelelahan dan dehidrasi dan shock. Dokter yang merawat para korban awal sadar, bahwa penyebaran virus ini terjadi ketika ada kontak yang cukup dekat. Sebagai contoh, di Rumah sakit Maridi, Sudan, 33 dari 61 suster yang merawat pasien penderita ebola, akhirnya ikut tewas karena virus tersebut.

Hingga saat ini belum ada obat atau vaksinasi untuk melawan virus ebola. Ada kekhawatiran, karena virus tersebut dapat menyebar melalui penumpang lalulintas manusia atau barang yang dapat menyebar sangat cepat. Penanganannya sampai saat ini berupa memberikan terapi *rehidrasi oral* atau pemberian minum air yang sedikit manis dan asin (cairan intravena) atau pemberian infus *intravena.* Cara satu-satunya untuk mengendalikan tertularnya atau mencegah penyebaran virus ebola bagi penderita yaitu dengan isolasi atau karantina.

2.4 Sistem Persamaan Diferensial

Suatu persamaan yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas disebut persamaan differensial **(Wartono, 2009).** Menurut banyaknya variabel bebas persamaan diferensial dibedakan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang hanya mempunyai satu peubah bebas, peubah bebas biasanya disimbolkan dengan x **(Munir, 2013)**. Sedangkan persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang mempunyai lebih dari satu peubah bebas. Turunan fungsi terhadap setiap peubah bebas dilakukan secara parsial.

Secara umum persamaan diferensial linier orde n berbentuk :

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x) \tag{2.1}$$

Sedangkan persamaan diferensial nonlinear adalah persamaan yang tidak dalam bentuk Persamaan (2.1).

Apabila terdapat beberapa persamaan diferensial, maka akan membentuk suatu sistem persamaan diferensial. Bentuk umum dari suatu sistem persamaan diferensial orde pertama sebagai berikut **(Kreyszig, 2011)** :

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' &= f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Persamaan diferensial (2.2) bisa ditulis sebagai persamaan vektor dengan vektor kolom $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \ldots, y_n]^T$ dan $\mathbf{f} = [f_1, f_2, \ldots, f_n]^T$. Sistem persamaan diferensial (2.2) dapat ditulis sebagai :

$$\mathbf{y}' = f(t, y). \tag{2.3}$$

Solusi dari Persamaan (2.3) adalah sekumpulan fungsi terdiferensial dari n pada suatu interval $a < t < b$

$$y_1 = h_1(t), \ldots, y_n = h_n(t),$$

yang memenuhi Persamaan (2.3) pada interval $a < t < b$.

Sistem persamaan diferensial (2.2) adalah sistem linear jika fungsi linear dalam $y_1, y_2, \ldots, y_n$, dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \ldots + a_{1n}(t)y_n + g_1(t) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \ldots + a_{nn}(t)y_n + g_n(t) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Persamaan (2.4) dapat ditulis menjadi :

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{g}$$

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

dengan

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\ \mathbf{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},\ \mathbf{g}=\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

2.5 Titik Kesetimbangan (*Equilibrium*) dan Analisa Kestabilan

Suatu sistem persamaan diferensial dikatakan setimbang jika sistem tersebut tidak mengalami perubahan sepanjang waktu (konstan). Dalam model matematika, terdapat dua titik ekuilibrium dalam model matematika penyebaran penyakit ebola, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit. Titik ekuilibrium bebas penyakit ebola terjadi jika dalam suatu populasi tidak terdapat individu yang terinfeksi penyakit dan titik ekuilibrium endemik penyakit, yaitu suatu keadaan dimana dalam populasi tersebut selalu terdapat individu yang terinfeksi penyakit.

Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui informasi yang menggambarkan perilaku sistem pada titik kesetimbangan. Keadaan setimbang tersebut dikatakan stabil jika semua solusi yang dekat dengan titik kesetimbangan menuju titik tersebut. Berikut ini diberikan definisi tentang kestabilan:

Definisi 2.1 (Widodo, 2007) Titik kesetimbangan (*equilibrium*) $\mathbf{x}^*$ yang memenuhi $f(\mathbf{x}^*)=0$ dikatakan :

1. Stabil jika untuk untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $\delta(\varepsilon)>0$, sedemikian sehingga untuk setiap solusi $\mathbf{x}(t)$ yang memenuhi $\left\|\mathbf{x}(t,x_0)-\mathbf{x}^*\right\|<\delta$ yang berakibat $\left\|\mathbf{x}(t,x_0)-\mathbf{x}^*\right\|<\varepsilon$, untuk setiap $t\geq 0$
2. Stabil asimtotik jika $\mathbf{x}^*$ stabil dan terdapat $\delta_1>0$, sehingga $\left\|\mathbf{x}(t,x_0)-\mathbf{x}^*\right\|<\delta_1$ yang berakibat $\lim_{t\to\infty}\left\|\mathbf{x}(t,x_0)-\mathbf{x}^*\right\|=0$
3. Tidak stabil jika titik *equlibrium* tidak memenuhi (1).

Kestabilan titik ekuilibrium $\mathbf{x}^*$ dapat ditentukan dengan memperhatikan nilai-nilai eigen, yaitu λ_i, $i=1,2,\ldots,n$ yang diperoleh dari persamaan karakteristik.

UIN SUSKA RIAU

© Hak cipta milik UIN Suska Riau

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Teorema 2.2 (Subiono, 2010) Diberikan persamaan diferensial $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ dengan A adalah matriks berukuran $n \times n$ memiliki k nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ dengan $k \leq n$.

a. Titik ekuilibrium x^* dikatakan stabil asimtotik, jika dan hanya jika $\Re e\ \lambda_i < 0$ untuk setiap $i = 1,2,\ldots,k$

b. Titik ekuilibrium x^* dikatakan stabil, jika dan hanya jika $\Re e\ \lambda_i \leq 0$ untuk setiap $i = 1,2,\ldots,k$.

c. Titik ekuilibrium x^* dikatakan tidak stabil, jika dan hanya jika $\Re e\ \lambda_i > 0$ untuk beberapa $i = 1,2,\ldots,k$.

Contoh 2.1 Diberikan beberapa persamaan differensial $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ dimana :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Akan dicari terlebih dahulu nilai eigen dari matriks diatas :

$\det(\lambda I - A) = 0$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} = 0$$

Sehingga didapatkan persamaan karakteristiknya sebagai berikut :

$$(\lambda+1)(\lambda+1) - 0 = 0$$

$$(\lambda+1)(\lambda+1) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1$$

Maka berdasarkan Teorema 2.2 dapat disimpulkan titik ekuilibrium stabil asimtotik karena nilai $\Re e\ \lambda_i < 0$

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

2.6 Matriks Jacobian dan Nilai Eigen

Sifat kestabilan titik ekuilibrium sistem nonlinier dapat didekati dengan menggunakan metode linearisasi. Metode ini digunakan untuk mengetahui perilaku sistem persamaan diferensial yang tidak dapat ditentukan penyelesaian eksaknya. Sebelum penyelesaian dengan metode linearisasi, perlu ditentukan terlebih dahulu matriks Jacobian di titik $\mathbf{x}^*$.

Diberikan suatu sistem persamaan differensial sebagai berikut

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(x,y)$$
$$\frac{d}{dt}y(t) = G(x,y) \tag{2.5}$$

Asumsikan bahwa (x^*, y^*) adalah titik *equilibrium*. Maka akan dicari sistem linier terdekat dimana (x,y) dekat dengan (x^*, y^*). Oleh karena itu dengan mengaproksimasi fungsi $F(x,y)$ dan $G(x,y)$ ketika (x,y) dekat dengan (x^*,y^*), diperoleh

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(x,y) \approx F(x^*,y^*) + \frac{\partial F}{\partial x}(x^*,y^*)(x-x^*) + \frac{\partial F}{\partial y}(x^*,y^*)(y-y^*)$$
$$\frac{d}{dt}y(t) = G(x,y) \approx G(x^*,y^*) + \frac{\partial G}{\partial x}(x^*,y^*)(x-x^*) + \frac{\partial G}{\partial y}(x^*,y^*)(y-y^*)$$

karena $F(x^*,y^*) = G(x^*,y^*) = 0$, maka

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(x,y) \approx \frac{\partial F}{\partial x}(x^*,y^*)(x-x^*) + \frac{\partial F}{\partial y}(x^*,y^*)(y-y^*)$$
$$\frac{d}{dt}y(t) = G(x,y) \approx \frac{\partial G}{\partial x}(x^*,y^*)(x-x^*) + \frac{\partial G}{\partial y}(x^*,y^*)(y-y^*) \tag{2.6}$$

Sistem (2.5) merupakan sistem persamaan linier. Koefisien matriksnya adalah sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(x^*,y^*) & \frac{\partial F}{\partial y}(x^*,y^*) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(x^*,y^*) & \frac{\partial G}{\partial y}(x^*,y^*) \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Matriks (2.7) merupakan matrik jacobian dari Sistem Persamaan (2.6) pada titik ekuilibrium (x^*, y^*).

Setelah ditentukan matriks Jacobian, maka penyelesaian dengan metode linearisasi dapat dilakukan untuk mengetahui perilaku sistem yang tidak dapat ditentukan penyelesaian eksaknya. Berikut definisi mengenai metode linearisasi :

Definisi 2.2 (Perko, 1991) Diberikan matriks jacobian $\mathbf{J}(\mathbf{F}(\mathbf{x}))$ pada Persamaan 2.7 . Sistem linier $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{F}(\mathbf{x}^*))\mathbf{x}$ disebut linearisasi Sistem (2.5) di sekitar $(\mathbf{x}^*)$. dengan menggunakan matriks Jacobian $\mathbf{J}(\mathbf{F}(\mathbf{x}^*))$ sifat kestabilan titik ekuilibrium x^* dapat diketahui asalkan titik tersebut hiperbolik. Berikut diberikan definisi titik hiperbolik.

Definisi 2.3 (Perko, 1991) Titik ekuilibrium x^* disebut titik ekuilibrium hiperbolik jika semua nilai eigen $\mathbf{J}(\mathbf{F}(\mathbf{x}^*))$ mempunyai bagian real tak nol.

Kestabilan dari titik ekuilibrium pada Sistem (2.5) dapat ditentukan berdasarkan nilai eigen matriks Jacobian pada metode linearisasi. Nilai eigen dapat ditentukan melalui persamaan karakterisrik dari matriks Jacobian di titik x^*.

Apabila nilai eigen dari persamaan karakteristik suatu sistem tidak dapat ditentukan dengan mudah, maka dapat digunakan kriteria Routh-Hurwitz. Kriteria Routh-Hurwitz dapat dipakai untuk mengecek langsung kestabilan melalui koefisien a_j tanpa menghitung akar-akar dari polinomial yang ada **(Subiono, 2010).**

Teorema 2.3 (Allen, 2006) Jika diberikan persamaan karakteristik, yaitu :

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

dimana a_j adalah koefisien yang merupakan bilangan real, $j = 1, 2, \dots, n$

Diperoleh matriks Hurwitz menggunakan koefisen a_j dari persamaan polinomial karakteristik yang didefinisikan sebagai berikut :

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

$$H_1 = (a_1)\,,\; H_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix},\; H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 \end{pmatrix}$$

dimana $a_j = 0$ jika $j > n$.

Akar-akar dari persamaan karakteristik polinomial $p(\lambda)$ adalah negatif atau memiliki bagian real negatif jika dan hanya jika determinan dari semua matriks Hurwitz adalah positif :

$$\det(H_j) > 0, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

Ketika $n = 2$ kriteria Routh-Hurwitz untuk $\det H_1 = a_1 > 0$ dan

$$\det H_2 = \det\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = a_1 a_2 > 0 \text{ dan } a_1 > 0 \text{ dan } a_2 > 0$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz untuk polinomial berderajat $n = 2,3,4,$ dan 5, dinyatakan bahwa titik ekuilibrium stabil, jika :

$n = 2 : a_1 > 0$ dan $a_2 > 0$

$n = 3 : a_1 > 0$, $a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 > 0$

$n = 4 : a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $a_4 > 0$ dan $\boldsymbol{a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4}$

$n = 5 : a_i > 0,\; i = 1,2,3,4,5,\; a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$, dan

$$(a_1 a_4 - a_5)(a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4) > a_5 (a_1 a_2 - a_3)^2 + a_1 a_5^2 .$$

Contoh 2.2

Selidiki apakah persamaan karakteristik di bawah termasuk kriteria Routh-Hurwitz ?

$P(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda - 6 = 0$

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Berdasarkan persamaan di atas, maka didapat $a_1 = 6$, $a_2 = 3$, $a_3 = -6$. Dan nilai j dari persamaan karakteristik di atas adalah 3, sehingga matriks hurwitznya hanya sampai a_5. Akan dibuktikan semua determinan matriks hurwitznya adalah positif.

untuk $H_1 = (a\ ) = (6)$, karena 6 positif, sehingga didapat $\det H_1 = |6| > 0$.

untuk $H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$, sehingga didapat

$$\det H_2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = 24 > 0$$

untuk $H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, sehingga didapat

$$\det H_3 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = -144 < 0$$

karena, $\det H_3 < 0$, maka persamaan karakteristik di atas tidak memenuhi kriteria Routh-Hurwitz dan dapat dinyatakan tidak stabil.

2.7 Determinan Matriks

Ada beberapa definisi yang dikembangkan dalam rangkaian determinan ini, dua yang terkenal yakni menggunakan permutasi dan menggunakan kofaktor. Dalam tulisan ini akan dibahas pendefenisian matriks menggunakan permutasi.

Berikut adalah definisi-definisi yang berhubungan dengan pendefinisian determinan:

Definisi 2.4 (Howward, 2000) Sebuah permutasi dari himpunan bilangan bulat postif (1,2,3,…,n) adalah susunan bilangan-bilangan bulat ini menurut aturan tertentu tanpa menghilangkan atau tanpa mengurangi bilangan tersebut.

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Contoh 2.3

Ada enam permutasi berbeda dari himpunan bilangan-bilangan bulat $\{1,2,3\}$, permutasi-permutasinya adalah

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$(1,2,3)$ $(2,1,3)$ $(3,1,2)$

$(1,3,2)$ $(2,3,1)$ $(3,2,1)$

Selanjutnya akan dilakukan simbolisasi untuk permutasi dari himpunan $\{1,2,3,\ldots,n\}$. permutasi secara umum dapat dinyatakan dalam bentuk $(j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n)$ atau

j_1 adalah bilangan pertama dari himpunan $\{1,2,3,\ldots,n\}$

j_2 adalah bilangan kedua dari himpunan $\{1,2,3,\ldots,n\}$

j_3 adalah bilangan ketiga dari himpunan $\{1,2,3,\ldots,n\}$

$\vdots$

j_n adalah bilangan ke-n dari himpunan $\{1,2,3,\ldots,n\}$

Definisi 2.5 (R. Gunawan Santosa, 2009) Dalam permutasi, dikatakan terjadi sebuah inversi (inversion) apabila sebuah bilangan bulat yang lebih besar mendahului bilangan yang lebih kecil.

Contoh 2.4

Akan dihitung banyak inversi dalam permutasi (2, 4, 1, 3) yaitu dengan cara sebagai berikut:

Banyaknya bilangan bulat yang lebih kecil dari pada $j_1 = 2$ dan mengikutinya $j_3 = 1$. Dapat dilihat pada permutasi (2, 4, 1, 3). Dalam permutasi tersebut $j_1 = 2$, $j_2 = 4$ $j_3 = 1$, $j_4 = 3$

Banyaknya bilangan bulat yang lebih kecil dari pada $j_2 = 4$ dan mengikutinya, ada dua yaitu ($j_3 = 1$ dan $j_4 = 3$)

Banyaknya bilangan bulat yang lebih kecil dari pada $j_3 = 1$ dan mengikutinya adalah nol (tidak ada).

Sehingga banyaknya inversi dalam permutasi ini adalah 1+2+0 = 3.

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Definisi 2.6 (Howard, 1998) Sebuah permutasi dinamakan permutasi genap jika jumlah inversi dalam permutasi tersebut adalah genap. Tanda dari permutasi genap adalah $(+)$. Sebaliknya, sebuah permutasi dinamakan permutasi ganjil jika jumlah inversi dalam permutasi tersebut adalah ganjil. Adapun tanda dari permutasi ganjil adalah $(-)$.

Contoh 2.5

Permutasi (2, 4, 1, 3) adalah permutasi ganjil karena jumlah inversi dalam permutasi tersebut adalah ganjil yaitu 1+2+0 = 3 . Sementara permutasi (2, 1, 4, 3) jumlah inversinya yaitu 1+0+1 = 2 sehingga permutasi (2, 1, 4, 3) adalah permutasi genap.

Definisi 2.7 (Rorres, 2004) Suatu hasil kali elementer (*elementary product)* dari suatu matriks A, $n \times n$ adalah hasil kali dari n entri dari A, yang tidak satu pun berasal dari baris atau kolom yang sama.

Contoh 2.6

Buatlah daftar hasil kali elementer bertanda dari matriks berikut!

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

untuk menentukan hasil kali elementer dari baris yang berbeda maka dapat ditulis dalam bentuk :

$$a_{1\Lambda}\, a_{2\Lambda}$$

Karena kolom juga harus berbeda maka isian kolom haruslah (1, 2) atau (2, 1) sehingga hasil kali elementernya adalah $a_{11}a_{22}$ dan $a_{12}a_{21}$. Perhatikan bahwa isian kolom tersebut merupakan permutasi dari $\{1,2\}$.

Maka untuk menentukan hasil kali elementer bertanda dari matriks A bisa dilihat dari tabel berikut:

© Hak cipta milik UIN Suska Riau
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.

Tabel 2.1 Hasil kali elementer Mariks A

Hasil Kali Elementer	Permutasi yang Berkaitan	Genap atau Ganjil	Hasil Kali Elementer Bertanda
$a_{11}a_{22}$	$(1,2)$	Genap	$a_{11}a_{22}$
$a_{12}a_{21}$	$(2,1)$	Ganjil	$-a_{12}a_{21}$

Begitu pula jika diberikan matriks $B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Untuk menentukan hasil kali elementer dari baris yang berbeda maka dapat ditulis dalam bentuk :

$$a_{1\wedge}\, a_{2\wedge}\, a_{2\wedge}$$

Karena kolom juga harus berbeda maka isian kolom haruslah (1, 2, 3) atau (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (1, 3, 2) dan (2, 1, 3) yang merupakan permutasi dari $\{1,2,3\}$ sehingga hasil kali elementernya adalah $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$, $a_{13}a_{22}a_{31}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$ dan $a_{12}a_{21}a_{33}$. Tanda dari hasil kali elementer mengikuti jenis permutasi kolom. Maka untuk menentukan hasil kali elementer bertanda dari matriks A bisa dilihat dari tabel berikut:

Tabel 2.2 Hasil Kali Elementer Matriks B

Hasil Kali Elementer	Permutasi yang Berkaitan	Genap atau Ganjil	Hasil Kali Elementer Bertanda
$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1, 2, 3)	Genap	$+a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2, 3, 1)	Genap	$+a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3, 1, 2)	Genap	$+a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3, 2, 1)	Ganjil	$-a_{13}a_{22}a_{31}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1, 3, 2)	Ganjil	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2, 1, 3)	Ganjil	$-a_{12}a_{21}a_{33}$

Konsep inversi permutasi dan hasil kali elementer di atas digunakan sebagai dasar menghitung determinan suatu matriks yang dikenal dengan metode Sarrus.

UIN SUSKA RIAU
© Hak cipta milik UIN Suska Riau
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar UIN Suska Riau.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin UIN Suska Riau.
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau

Perhitungan determinan matriks dengan metode sarrus hanya dapat diterapkan pada matriks berukuran 2 × 2 dan 3 × 3.

Metode sarrus menggunakan perkalian elemen matriks secara diagonal. Perkalian elemen matriks pada diagonal turun (dari kiri atas kekanan bawah) diberi tanda positif $(+)$ sedangkan perkalian elemen matriks pada diagonal naik (dari kiri bawah kekanan atas) diberi tanda negatif $(-)$.

Dari definisi-definisi diatas maka dapat didefinisikan determinan yaitu sebagai berikut :

Definisi 2.8 (R. Gunawan Santosa, 2009) A adalah matriks bujur sangkar. Determinan matriks A yang disimbolkan $\det(A)$ dapat didefinisikan sebagai jumlah semua hasil perkalian elementer bertanda dari matriks A.

Definisi diatas apabila dinotasikan akan berbentuk:

$$\det(A) = \sum_{(j_1, j_1, j_1, \Lambda\ j_n)} \pm a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_2} \Lambda\ a_{nj_n}$$