BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Variabel Acak Kontinu

Sebaran peluang variabel acak kontinu tidak dapat diberikan dalam bentuk tabel karena variabel acak kontinu perpeluang nol untuk mengambil tepat salah satu nilainya. Meskipun sebaran peluang dari variabel acak kontinu tidak bisa diberikan dalam bentuk tabel, tetapi sebaran ini dapat dinyatakan dalam bentuk rumus. Rumus itu merupakan fungsi nilai-nilai variabel acak kontinu X, sehingga dapat digambarkan sebagai suatu kurva kontinu.

Definisi 2.1 (Walpole & Myres, 1989) X dikatakan variabel acak kontinu, jika ruang sampel dari variabel acak tidak terbatas atau terbatas tapi tidak memiliki nilai yang pasti.

2.2 Fungsi Densitas

Fungsi peluang yang digambarkan oleh kurva kontinu dari variabel acak kontinu biasanya disebut fungsi densitas atau fungsi kepadatan peluang.

Definisi 2.2 (Walpole & Myres, 1989) Fungsi $f(x)$ adalah fungsi kepadatan peluang peubah acak kontinu X, yang biasanya disebut fungsi densitas, yang didefinisikan pada himpunan semua bilangan real R, bila:

1. $f(x) \geq 0$, untuk semua $x \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$ (2.1)

2.3 Fungsi Kumulatif

Jika $F(x)$ adalah fungsi distribusi kumulatif dari variabel acak kontinu, maka fungsi densitas peluang $f(x)$ dari X adalah turunan dari $F(x)$.

Definisi 2.3 (Harinaldi, 2005) Fugsi distribusi kumulatif variabel X dinotasikan sebagai F_x dan di definisikan sebagai $F_x(x) = p(X \leq x)$ untuk seluruh x yang real. Jika X adalah kontinu, maka:

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt \quad (2.2)$$

2.4 Fungsi Kuantil

Misalkan F fungsi distribusi dari suatu distribusi probabilitas pada himpunan bilangan real R jika $\alpha \in (0,1)$ maka terdapat dengan tunggal $X_\alpha \in R$ sehingga $F(X_\alpha) = \alpha$ maka disebut kuantil α dari F. Kuantil α dari F digunakan notasi $F^{-1}(\alpha)$.

Fungsi kuantil F didefiniskan sebagai:

$$F^{-1}(\alpha) = inv\{x|F(x) \geq \alpha\} \quad (2.3)$$

dengan $\alpha \in (0,1)$ artinya $F^{-1}(\alpha)$ adalah nilai terkecil dari x dengan $F(x) \geq \alpha$. Misalkan x mempunyai distribusi F dan fungsi distribusi dari $y = a + bx$ maka dapat dinyatakan sebagai:

$$Fy(x) = F\left(b^{-1}(x-a)\right)\ a \in R, b > 0 \quad (2.4)$$

Berdasarkan buku Warren Gilchrist (2000) menyatakan fungsi kuantil juga didefinisikan sebagai invers dari fungsi kumulatif.

2.5 Statistik Berurut

Secara umum, misalkan $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ variabel acak kontinu yang saling bebas dengan fungsi distribusi kumulatif $F(y)$ dengan fungsi densitas $f(y)$. Notasi variabel acak yang terurut Y_i atau $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ dimana $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \cdots \leq Y_{(n)}$.

dimana:

$Y_1 = Min\ Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\ (variabel\ acak\ minimum\ dari\ Y_i)$

$Y_n = Max\ Y_1, Y_2, \ldots, Y_n\ (variabel\ acak\ maksimum\ dari\ Y_i)$

Fungsi densitas peluang untuk Y_i dan Y_n dapat ditentukan dengan menggunakan metode fungsi distribusi kumulatif. Pertama kali kita akan menetukan fungsi densitas dari Y_n. Karena Y_n adalah maksimum dari $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, maka peristiwa $P(Y_{(n)} \leq y)$ akan terjadi jika dan hanya jika $(Y_i \leq y)$ terjadi, untuk setiap $i = 1,2, \ldots, n$, yaitu:

$$P\left(Y_{(n)} \leq y\right) = P(Y_1 \leq y, Y_2 \leq y, \ldots, Y_n \leq y) \quad (2.5)$$

Karena Y_i adalah saling bebas dan $P(Y_i \leq y) = F(y)\ untuk\ i = 1,2, \ldots, n$, hal ini menyatakan bahwa fungsi distribusi kumulatif dari $Y_{(n)}$ adalah sebagai berikut:

$$F_{y_n}(y) = P(Y_n \leq y) = P(Y_1 \leq y)P(Y_2 \leq y) \ldots P\big(Y_{(n)} \leq y\big)$$
$$= (F(y)^n) \quad (2.6)$$

Misal $g_{(n)} = n[F(y)]^{n-1}f(y)$ dengan cara yang sama kita akan dapat menetukan fungsi densitas untuk $Y_{(1)}$ sebagai berikut:

$$F_{y_1}(y) = P\big(Y_{(1)} \leq y\big) = 1 - P\big(Y_{(1)} > y\big) \quad (2.7)$$

Karena $Y_{(1)}$ adalah minimum dari $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, maka hal ini menyatakan bahwa peristiwa $(Y_{(1)} > y)$ terjadi jika dan hanya jika peristiwa $(Y_i \leq y)$ terjadi untuk $i = 1,2, \ldots, n$. Karena Y_i saling bebas dan $P(Y_i \leq y) = 1 - F(y)$ terjadi untuk $i = 1,2, \ldots, n$, kita lihat bahwa:

$$F_{y_1} = P\big(Y_{(1)} \leq y\big) = 1 - P\big(Y_{(1)} > y\big)$$
$$= 1 - P(Y_1 > y, Y_2 > y, \ldots, Y_n > y)$$
$$= 1 - P(Y_1 > y)P(Y_2 > y) \ldots P(Y_n > y)$$
$$= 1[1 - F(y)]^n \quad (2.8)$$

Misal $g_{(1)}(Y)$ adalah fungsi densitas $Y_{(1)}$, dengan menurunkan fungsi densitas kumulatif akan diperoleh:

$$g_{(1)}(Y) = n[1 - F(y)]^{n-1}f(y) \quad (2.9)$$

2.6 Distribusi Peluang

Distribusi peluang merupakan bagian penting dalam menganalisa peluang dari suatu eksperimen. Seluruh kemungkinan yang terjadi dari titik percobaan dan nilai peluangnya memiliki hubungan yang erat. Secara keseluruhan himpunan pasangan terurut dari titik percobaan dan nilai peluang padanannya inilah yang disebut distribusi peluang.

Definisi 2.6 (Walpole & Myres, 1989) Fungsi $f(x)$ adalah fungsi kepadatan peluang peubah acak kontinu X, yang didefinisikan pada himpunan semua bilangan real R, bila:

1. $f(x) \geq 0$, untuk semua $x \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$ (2.10)

2.6.1 Distribusi Peluang Kontinu

Menurut Pransanna Sahoo (2008), untuk suatu kejadian A dari ruang sampel S, maka peluang dari A dapat dicari dengan rumus:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} \tag{2.11}$$

dimana :

$P(A)$: Peluang dari kejadian A

$N(A)$: Banyaknya titik sampel

$N(S)$: Banyaknya ruang sampel

Definisi 2.6.1 (Pransanna Sahoo, 2008) Peluang dari suatu kejadian A adalah total dari semua titik sampel di A, sedemikian sehingga:

a. $0 \leq P(A) \leq 1$

b. $P(\emptyset) = 0$, dan

c. $P(S) = 1$

2.6.2 Rataan Distribusi Peluang

Nilai harapan atau rataan dari suatu peubah acak merupakan salah satu ukuran pemusatan data populasi yang terpenting. Nilai rata-rata atau rataan peubah acak X dan ditulis sebagai μ_x atau μ. Rataan ini disebut juga oleh para statistikawan dengan nilai harapan matematika atau nilai harapan peubah acak X dan dinyatakan dengan $E(X)$ (Walpole & Myres, 1989).

Definisi 2.6.2 (Harinaldi, 2005) Jika X adalah suatu vaariabel acak diskrit yang mengambil nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang mempunyai peluang $p(x_1), p(x_2), \ldots, p(x_n)$ dengan $p(x_1) + p(x_2) + \cdots + p(x_n) = 1$, maka nilai harapan atau rataan X untuk variabel acak diskrit adalah:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X) = x_i \tag{2.12}$$

bila variabel acak X kontinu maka nilai harapan X adalah:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx, \tag{2.13}$$

Menetukan rataan pada peubah acak diskrit dapat dilakukan dengan mengalikan tiap nilai $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dari peubah acak X dengan nilai peluangnya $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$, selanjutnya dijumlahkan hasilnya sebagai berikut:

$p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n) = 1$.

Metode ini hampir sama dengan menentukan nilai rataan pada peubah acak kontinu. Nilai rataan dicari dengan menggunakan metode integral untuk mengganti penjumlah. Penggunaan metode integral ini tidak merubah dafinisi dari nilai rataan matematik.

2.6.3 Variansi Distribusi Peluang

Rataan atau nilai harapan suatu peubah acak X memiliki peran khusus dalam statistika karena menggambarkan keterangan cukup mengenai bentuk distribusi peluang. Ukuran keragaman terpenting suatu peubah acak X diperoleh dengan mengambil $g(X) = (X - \mu)^2$, karena pentingnya dalam statistika maka diberi nama variansi peubah acak X atau variansi distribusi peluang X dan dinyatakan dengan $Var(X)$ atau ${\sigma_x}^2$ atau σ^2. Selanjutnya $Var(X)$ akan digunakan untuk menyatakan variansi dari distribusi peluang X (Dudewicz & Misra,1988).

Definsi 2.6.3 (Dudewicz & Misra,1988) Diberikan X adalah peubah acak dengan distribusi peluang $f(x)$ dan rataan μ. Variansi X adalah:

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_x (X-\mu)^2 f(x) \text{ , bila } X \text{ diskrit} \quad (2.14)$$

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X-\mu)^2 f(x)dx, \text{ bila } X \text{ kontinu} \quad (2.15)$$

Teorema 2.1 (Dudewicz & Misra,1988) Variansi dari peubah acak X adalah:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (2.16)$$

Bukti:

$$Var(X) = E[(X-\mu)^2]$$
$$= E[(X^2 - 2\mu X + \mu^2)]$$
$$= E(X^2) - [E(X)]^2$$

2.6.4 Distribusi Eksponensial

Defenisi 2.6.4.1 fungsi eksponensial didefinisikan sebagai :

$$f(x) = \theta e^{-x\theta}$$

Defenisi 2.6.4.2 (Walpole & Myres, 1989) variabel acak kontinu X dikatakan berditribusi eksponensial dengan parameter β, bila fungsi densitasnya berbentuk :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} & 0 \leq x \leq \infty \\ 0 & untuk\ x\ lainnya \end{cases}$$

dimana $\beta > 0$

2.7 Distribusi *Generalized Pareto*

Dalam statistika, distribusi *Generalized Pareto* merupakan keluarga distribusi peluang kontinu. Distribusi *Generalized Pareto* mempunyai tiga parameter yaitu parameter lokasi (ξ), parameter skala (α) dan parameter bentuk (k). Tetapi sering kali hanya dilihat dari parameter skala dan parameter bentuknya (Ruckdeschel dan Horbenko, 2010).

Distribusi *Generalized Pareto* termasuk distribusi acak kontinu yang mempunyai fungsi kepadatan peluang. Muraleedharan dan Soares (2014) mendefinisikan fungsi kepadatan peluang Distribusi *Generalized Pareto* sebagai berikut:

$$f(x; k, \xi, \alpha) = \frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{k(x-\xi)}{\alpha}\right)^{-\left(\frac{1}{k}\right)-1} \quad , untuk\ k \neq 0 \tag{2.17}$$

$$f(x; k, \xi, \alpha) = \frac{1}{\alpha} e^{\left(-\frac{(x-\xi)}{\alpha}\right)} \quad , untuk\ k = 0$$

dengan $x \geq \xi$ utnuk $k \geq 0$ dan $\xi \leq x \leq \xi - \frac{\alpha}{k}$ untuk $k < 0$.

Fungsi kumulatif distribusi *Generalized Pareto* menurut Singh dan Guo (2009) didefinisikan sebagai berikut:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{k(x-\xi)}{\alpha}\right)^{-\left(\frac{1}{k}\right)} & , untuk\ k \neq 0 \\ 1 - e^{-\left(\frac{k(x-\xi)}{\alpha}\right)} & , untuk\ k = 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

2.8 Distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV)

Adanya model distribusi yang dapat menggambarkan kejadian ekstrim pada data kekuatan gempa akan sangat membantu keakuratan pendugaan parameter dan simulasi untuk data ekstrim berikutnya. Salah satu distribusi nilai ekstrim yang baik digunakan adalah distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV).

GEV merupakan suatu distribusi yang dikembangkan untuk mengkaji kejadian-kejadian ekstrim. Oleh karena itu distribusi GEV ini sangat bermanfaat untuk memodelkan data ekstrim (Jantje Denny Prang, 2006).

Enrick Castillo dalam penelitiannya menyatakan bahwa distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) termasuk kedalam distribusi acak kontinu dan diterbitkan dalam buku *"Extreme Value and Related Models with Applications in Engineering and Science"*. Dalam bukunya Enrick Castillo menyatakan distribusi GEV baik untuk memodelkan data ekstrim (Enrick Castillo, 2009).

Penelitian terkait lainnya adalah *"Mixed Methods for Fitting the GEV Distribution"* yang ditulis oleh Pierre dan Craig pada Tahun 2008. Dalam penelitiannya disebutkan bahwa distribusi GEV banyak digunakan untuk pemodelan data yang bersifat ekstrim. Hal ini dikarenakan distribusi ini mempunyai tiga parameter yang merupakan gabungan dari tiga distribusi yaitu Pareto, Freceth dan Weibull. Distribusi ini termasuk kedalam distrbusi kontinu yang dikhususkan untuk memodelkan data ekstrim (Pierre dan Craig, 2008).

Pada umumnya distribusi GEV memang digunakan untuk memodelkan data ekstrim. Data ekstrim yang dipakai berada dalam rentang maksimum jangka waktu tertentu seperti dalam skala harian, bulanan, dan tahunan. Pada kenyataannya data ekstrim maksimum memang sangat bergunan untuk dijadikan acuan dalam tindakan pencegahan ekstrim mendatang (Gilli dan Kellezi, 2006).

Distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) memiliki 3 parameter yaitu parameter skala (σ), parameter lokasi (μ) dan parameter bentuk (ξ). Pembuktian syarat kontinu distrbusi GEV menggunakan cara yang sama pada pembuktian syarat kontinu pada distrbusi Generalized Pareto. Sehingga fungsi kepadatan peluang distribusi *Generalized Extreme Value* (GEV) sebagai berikut:

$$f(x,\mu,\sigma,\xi) = \frac{1}{\sigma}\left\{1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}^{\frac{1}{\xi}-1} e^{\left\{-1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}^{\frac{1}{\xi}}} \qquad ,\xi \neq 0 \qquad (2.19)$$

$$f(x,\mu,\sigma,\xi) = \frac{1}{\sigma} e^{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)} e^{-e^{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}} \qquad ,\xi = 0 \qquad (2.20)$$

Diperoleh fungsi distribusi kumulatif, yaitu:

$$F(x) = \begin{cases} e^{\left\{-1+\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}^{\frac{1}{\xi}}}, \xi \neq 0 \\ e^{e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\xi}}}}, \xi = 0 \end{cases} \tag{2.21}$$

Sehingga berdasarkan penelitan dari Jantje Denny Prang, Enrick Castillo, Pierre dan Craig, serta Gilli dan Kellezi maka jelas bahwa distribusi GEV merupakan distribusi yang termasuk kedalam distribusi acak kontinu.

2.9 Distribusi Weibull

Distribusi Weibull diambil dari nama seorang fisikawan yang berasal dari Swedia bernama Waloddi Weibull pada Tahun 1939. Distribusi Weibull merupakan distribusi yang sering digunakan karena menggambarkan keseluruhan data secara jelas terutama dalam pengujian dan memodelkan data, sehingga distribusi Weibull sering diaplikasikan untuk pemodelan antara lain pemodelan dibidang teknologi, kecepatan angin, unsur-unsur kimia juga dibidang hodrologi (Rinne, 2009).

$$f(x|\alpha,\beta) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right]} \tag{2.22}$$

Fungsi kumulatif dari fungsi ini adalah:

$$F(x) = 1 - e^{\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right]} \tag{2.23}$$

dengan $x \geq 0$, $\beta > 0$ adalah parameter bentuk dan $\alpha > 0$ adalah parameter skala (Rinnie, 2009).

2.9.1 Distribusi *Generalized Weibull*

Distribusi *Generalized Weibull* merupakan metode analisis Weibull yang membuat tiga parameter secara simultan yaitu parameter lokasi (γ), parameter skala (η) dan parameter bentuk (β). Rumus Distribusi *Generalized Weibull* di kemukakan sebagai berikut:

$$f(x|\gamma,\eta,\beta) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{\left\{-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right\}}, x \geq \gamma \tag{2.24}$$

Fungsi kumulatif distribusi *Generalized Weibull* adalah sebagai berikut:

$$F(x) = 1 - e^{\left\{-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta}\right\}}, x \geq \gamma \tag{2.25}$$

2.10 Estimasi Parameter

Dalam menentukan model distribusi yang sesuai untuk satu data, terlebih dahulu ditentukan parameter dari distribusi tersebut. Metode yang digunakan adalah metode L-Moment, *Probability Weighted Moments* (PWM) dan maksimum *likelihood*.

2.10.1 Estimasi Metode L-Moment

Misalkan $X_1, X_2, \dots X_n$ adalah observasi dari n sampel acak dengan populasi
kontinu dan memiliki fungsi komulatif dan $F(x)$ fungsi kuantil $x(f)$.
Sederetan $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ adalah statistik berurut L-Moment ke$-r$ ditulis sebagai λ_r bagi populasi, didefinisikan sebagai:

$$\lambda_r = \frac{1}{r}\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j \binom{r-1}{j} E\left[X_{r-j:r}\right], \qquad r = 1,2,\dots,n \tag{2.26}$$

Dengan $X_{r-j:r}$ merupakan variabel acak bagi statistik berurut ke$-(r-j)$ dari r observasi dan

$$E[X_{r:n}] = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\int_0^1 x(F)\big(F(x)\big)^{r-1}\big(1-F(x)\big)^{n-r} dF \tag{2.27}$$

atau $E[X_{r:n}]$ juga dapat ditulis dalam notasi β_r:

$$E[X_{r:n}] = n\binom{n-1}{r-1}\sum_{j=0}^{n-r}\binom{n-r}{j}(-1)^{n-r-j}\beta_{n-1-j} \tag{2.28}$$

dengan β_r didefinisikan sebagai:

$$\beta_r = \int_0^1 x(F)F^r dF \tag{2.29}$$

dengan $xs(F)$ adalah fungsi kuantil. Dengan menggantikan Persamaan (2.29) ke dalam Persamaan (2.26), L-Momen dalam notasi kombinasi liner gabungan linier β_r, boleh ditulis sebagai:

$$\lambda_{r+1} = \sum_{j=0}^{r}(-1)^{r-j}\binom{r}{j}\binom{r+j}{j}\beta_j \tag{2.30}$$

Empat L-Momen rata (λ_1), variasi (λ_2), skewness (λ_3) dan kurtosis (λ_4) ialah:

$$\lambda_1 = \beta_0$$

$$\lambda_2 = 2\beta_1 - \beta_0$$

$$\lambda_3 = 6\beta_2 - 6\beta_1 + \beta_0$$

$$\lambda_4 = 20\beta_3 - 30\beta_2 + 12\beta_1 - \beta_0$$

dan rasio L-Momen diperoleh sebagai berikut:

L-koefisien variasi (LCV), $\tau = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$

L-koefisien skewness (LCS), $\tau_3 = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$

L-koefisien kurtosis (LCK), $\tau_4 = \frac{\lambda_4}{\lambda_2}$

Persamaan (2.26) sampai (2.30) adalah L-Moment untuk populasi. Sedangkan untuk sampel, misalkan $X_1, X_2, \dots X_n$ adalah observasi dari n sampel acak. L-Moment untuk sampel dapat ditulis sebagai berikut:

$$\hat{\lambda}_{r+1} = \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r-j} \binom{r}{j} \binom{r+j}{j} \hat{\beta}_j, \qquad r = 0,1, \dots, n-1$$

dengan estimasi estimasi β_r sebagai berikut:

$$\hat{\beta}_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)(i-2)\cdots(i-r)}{(n-1)(n-2)\cdots(n-r)} X_{i:n} \tag{2.31}$$

Empat estimasi untuk L-Moment untuk sampel dalam bentuk β_r, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_{i:n}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)}{(n-1)} X_{i:n}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)(i-2)}{(n-1)(n-2)} X_{i:n}$$

$$\hat{\beta}_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)} X_{i:n}$$

dan seterusnya, empat L-Moment sampel dalam bentuk λ_r dapat ditulis sebagai berikut:

$$\hat{\lambda}_1 = \hat{\beta}_0$$

$$\hat{\lambda}_2 = 2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0$$

$$\hat{\lambda}_3 = 6\hat{\beta}_2 - 6\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_0$$

$$\hat{\lambda}_4 = 20\hat{\beta}_3 - 30\hat{\beta}_2 + 12\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0$$

rasio L-Moment sampel $\hat{\lambda}_r$ adaalah estimasi bagi λ_r. Adalah sebagai berikut:

L-koefisien variasi (LCV), $\hat{\tau} = \frac{\hat{\lambda}_1}{\hat{\lambda}_2}$

L-koefisien skewness (LCS), $\hat{\tau}_3 = \frac{\hat{\lambda}_3}{\hat{\lambda}_2}$

L-koefisien kurtosis (LCK), $\hat{\tau}_4 = \frac{\hat{\lambda}_4}{\hat{\lambda}_2}$

2.10.2 Estimasi *Probability Weighted Moments* (PWM)

Fungsi PWM dari variabel random x dengan CDF $f(x)$ adalah

$$M_{p,r,s} = E[x^p(F(X))^r(1 - F(X))^s] \tag{2.32}$$

Dengan $p, r, s =$ bilangan real. Langkh-langkah estimasi dengan *Probability Weighted Moments* adalah:

1. Memformulasikan fungsi PWM β_r dengan $r = 0,1,2$
2. Memformulasikan estimator *unbiased* untuk fungsi PWM $(\hat{\beta}_r)$ dengan $r = 0,1,2$
3. Menghitung $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ dari fungsi PWM
4. Hasil persamaan yang diperoleh dari $\hat{\beta}_0$ digunakan untuk memperoleh $\hat{\mu}$
5. Menghitung $2\beta_1 - \beta_0$ dan $3\beta_2 - \beta_0$ dari fungsi PWM sehingga diperoleh $2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0$ dan $3\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_0$
6. Hasil yang diperoleh dari $2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0$ digunakan untuk memperoleh $\hat{\sigma}$
7. Membuat perbandingan $3\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_0$ dan $2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0$
8. Hasil persamaan yang diperoleh dari perbandingan $3\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_0$ dan $2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0$

2.10.3 Fungsi *Likelihood*

Fungsi likelihood dapat dijelaskan dengan fungsi kepadatan peluang yang dievaluasi pada setiap titik $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Fungsi kepadatan peluang bersama dari variabel acak $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yaitu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ yang dievaluasi pada titik $x_1, x_2, \ldots, x_n$ yang disebut fungsi *likelihood* yang dinotasikan dengan $L(\theta; X)$ maka:

$$L(\theta; X) = f(X; \theta) \tag{2.33}$$

karena $f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$adalah fungsi kepadatan peluang bersama dari variabel acak yang saling bebas, sehingga:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1;\ \theta) f(x_2;\ \theta) \ldots f(x_n;\ \theta) \tag{2.34}$$

Selanjutnya Persamaan (2.34) disubstitusikan ke Persamaan (2.33), maka (Lee&Wang,2003):

$$L(\theta; X) = f(x_1;\ \theta) f(x_2;\ \theta) \ldots f(x_n;\ \theta)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta) \tag{2.35}$$

2.10.4 Estimasi Maksimum *Likelihood*

Estimasi Maksimum *Likelihood* adalah suatu metode yang memaksimumkan fungsi *likelihood*. Prinsip estimasi maksimum *likelihood* adalah memilih $\hat{\theta}$ sebagai estimator titik untuk θ yang memksimumkan $L(\theta; X)$. Metode estimasi maksimum *likelihood* dapat digunakan jika fungsi kepadatan peluang atau distribusi dari variabel acak diketahui.

Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah sampel acak dari suatu distribusi dengan fungsi kepadatan peluang $f(X; \theta)$, kemudian dibentuk fungsi kepadatan peluang bersama $x_1, x_2, \dots, x_n$, setelah itu ditentukan fungsi *likelihood* dari θ yaitu $L(\theta; X)$.

Metode estimasi maksimum *likelihood* membuat fungsi *likelihood* $L(\theta; X)$ menjadi maksimum dan digunakan fungsi logaritma. Sehingga fungsi logaritma *likelihood* dinotasikan dengan $\ln L(\theta; X) = l(\theta; X)$, dimana $l(\hat{\theta}; X) \geq l(\theta; X)$. Dengan menggunakan logaritma $L(\theta; X)$, maka estimator *likelihood* diperleh dari turunan fungsi *likelihood* terhadap parameternya, yaitu $\frac{dl(\theta;X)}{d\theta} = 0$ (Lee & Wang, 2003).

2.10.5 Metode Newton-Raphson untuk menghampiri Nilai Parameter

Metode Newton-Raphson adalah proses iterasi yang dilakukan dalam metode numerik yang dapat digunakan untuk mencari solusi atau pemecahan suatu persamaan. Proses iterasi adalah suatu teknik penghampiran yang dilakukan secara berulang-ulang, dimana setiap pengulangan disebut iterasi. Pada umumnya para ahli statistik sering menggunakan metode Newton-Raphson untuk menghampiri nilai parameter dari suatu persamaan (Yendra, 2010).

Metode Newton-Raphson untuk mencari pemecahan dari $x_1, x_2, \dots, x_p$ sehingga:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_p(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$$

kemudian misalkan a_{ij} adalah turunan parsial dari f_i terhadap x_j atau dapat ditulis sebagai $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

Selanjutnya dibentuk ke dalam sebuah matriks yang disebut dengan matriks Jacobian, yaitu:

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{p1} & a_{12} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

Kemudian dicari invers dari Persamaan (2.36), yaitu:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & a_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{bmatrix} \tag{2.37}$$

selanjutnya misalkan $x_1{}^k, x_2{}^k, \dots, x_p{}^k$ adalah nilai-nilai hampiran pada iterasi ke k, dan misalkan $f_1{}^k, f_2{}^k, \dots, f_p{}^k$ adalah nilai-nilai yang berhubungan dengan fungsi $f_1, f_2, \dots, f_p$, yaitu:

$$f_1{}^k = f_1(x_1{}^k, x_2{}^k, \dots, x_p{}^k)$$
$$f_2{}^k = f_2(x_1{}^k, x_2{}^k, \dots, x_p{}^k)$$
$$\vdots$$
$$f_p{}^k = f_p(x_1{}^k, x_2{}^k, \dots, x_p{}^k)$$

dan misalkan $b_{ij}{}^k$ adalah elemen dari J^{-1} yang dihasilkan pada $x_1{}^k, x_2{}^k, \dots, x_p{}^k$, maka hampiran iterasi selanjutnya dapat dibentuk secara umum, yaitu:

$$\begin{aligned} x_1{}^{k+1} &= x_1{}^k - \left(b_{11}{}^k f_1{}^k + b_{12}{}^k f_2{}^k + \cdots + b_{1p}{}^k f_p{}^k\right) \\ x_2{}^{k+1} &= x_2{}^k - \left(b_{21}{}^k f_1{}^k + b_{22}{}^k f_2{}^k + \cdots + b_{2p}{}^k f_p{}^k\right) \\ &\vdots \\ x_p{}^{k+1} &= x_p{}^k - \left(b_{p1}{}^k f_1{}^k + b_{p2}{}^k f_2{}^k + \cdots + b_{pp}{}^k f_p{}^k\right) \end{aligned} \tag{2.38}$$

Proses itersi dapat dimulai dengan penentuan nilai-nilai awal terlebih dahulu. Nilai awal dapat dicari salah satunya dengan menghampiri fungsi kumulatif dan membentuk persamaan regresi linier sederhana. Selanjutnya, proses iterasi dapat dihentikan jika iterasi yang diperoleh menghasilkan nilai yang sama dengan iterasi sebelumnya (Yendra, 2010).

2.11 Uji Kebaikan (*Goodness of Fit*)

Secara umumnya, uji kebaikan (*Goodness of Fit*) adalah uji yang dilakukan untuk memperoleh model distribusi yang sesuai terhadap data observasi yang digunakan dalam sebuah penelitian. Uji kebaikan digunakan berdasarkan fungsi distribusi kumulatif secara lengkap dengan parameter-parameter yang telah ditentukan. Pada penelitian ini, model distribusi yang sesuai untuk data akan ditentukan dengan menggunakan uji Kolmogrov-Smirnov (*D*) dan Anderson-Darling (A^2) (Thode,2002).

2.11.1 Uji Kolmogrov-Smirnov

Uji statistik Kolmogrov-Smirnov ditunjukkan pada persamaan berikut:

$$D = \max[D^+, D^-] \tag{2.39}$$

dimana,

$$D^+ = \max_{i=1,\ldots,n}\left[\frac{i}{n} - F(x_i)\right] \tag{2.40}$$

dan,

$$D^- = \max_{i=1,\ldots,n}\left[F(x_i) - \frac{(i-1)}{n}\right] \tag{2.41}$$

dengan $F(x_i)$ adalah fungsi distribusi kumulatif. Nilai *D* berdasarkan pada jarak maksimum antara D^+dan D^-. Model distribusi dikatakan sesuai untuk data jika uji statistik *D*pada suatu model distribusi tersebut bernilai minimum (Thode, 2002).

2.11.2 Uji Anderson-Darling

Uji Anderson-Darling ditunjukkan pada persamaan berikut:

$$A^2 = -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\begin{bmatrix}(2i-1)\ln F(x_i) + \\ (2n+1-2i)\ln\big(1-F(x_i)\big)\end{bmatrix} \tag{2.42}$$

dengan $F(x_i)$ adalah fungsi distribusi kumulatif. Model distribusi dikatakan sesuai untuk data jika uji statistik A^2 pada suatu model distribusi tersebut bernilai minimum (Pani, 2009).