BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Jenis-Jenis Matriks

Matriks adalah kumpulan bilangan, simbol, atau ekspresi, berbentuk persegi panjang yang disusun menurut baris dan kolom. Bilangan-bilangan yang terdapat disuatu matriks disebut dengan elemen atau anggota matriks. Matriks banyak dimanfaatkan untuk menyelesaikan berbagai permasalahan matematika misalnya dalam menentukan solusi masalah persamaan linear.

Jenis-jenis matriks yaitu :

1. Matriks Bujur Sangkar

Matriks bujur sangkar adalah matriks yang ukuran baris dan kolomnya sama atau disebut matriks $n \times n$. Matriks ini disebut juga dengan matriks persegi berordo n.

Berikut diberikan contoh matriks bujur sangkar.

Contoh 2.1

Matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ adalah matriks persegi yang berukuran 2×2

Matriks $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ adalah matriks persegi yang berukuran 3×3

Selanjutnya akan membahas tentang matriks nol.

2. Matriks Nol

Sebuah matriks yang semua anggotanya nol disebut matriks nol.

Berikut diberikan contoh matriks nol.

Contoh 2.2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sebuah matriks nol akan dinyatakan dengan 0, jika ukurannya merupakan suatu yang penting ditekankan, kita dapat menuliskan $0_{m \times n}$ untuk matriks nol $m \times n$.

Selanjutnya akan membahas tentang matriks identitas.

3. Matriks Identitas

Matriks yang diminati secara khusus adalah matriks-matriks bujur sangkar dengan 1 pada diagonal utamanya, 0 untuk anggota selain diagonal utama.

Berikut diberikan contoh matriks identitas.

Contoh 2.3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sebuah matriks yang berbentuk seperti ini disebut suatu matriks identitas dan dinyatakan dengan *I*.

Selanjutnya akan membahas tentang matriks diagonal.

4. Matriks Diagonal

Sebuah matriks bujur sangkar yang semua entrinya yang tidak terletak pada diagonal utama adalah nol disebut matriks diagonal.

Berikut diberikan contoh matriks diagonal.

Contoh 2.4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan membahas tentang matriks segitiga.

5. Matriks Segitiga

Matriks bujur sangkar yang semua entri di atas diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga bawah (*lower triangular*) dan matriks bujur sangkar yang semua entrinya di bawah diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga atas (*upper triangular*). Suatu matriks, baik segitiga bawah atau segitiga atas disebut matriks segitiga (*triangular*).

Berikut diberikan contoh matriks segitiga.

Contoh 2.5

$$\overset{\text{matriks segitiga atas}}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}} \overset{\text{matriks segita bawah}}{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}}$$

Selanjutnya akan membahas tentang matriks simetris.

6. Matriks Simetris

Matriks simetris adalah suatu matriks bujur sangkar yang elemenya simetris secara diagonal. Dapat juga dikatakan bahwa matriks simetris adalah matriks yang transposenya sama dengan dirinya sendiri.

Berikut diberikan contoh matriks simetris.

Contoh 2.6

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{dan} A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan membahas tentang operasi matriks.

2.2 Operasi Matriks

Operasi pada matriks pada dasarnya sama dengan operasi-operasi matematika pada umumnya, operasi pada matriks antara lain adalah penjumlahan, pengurangan dan perkalian.

1. Penjumlahan Matriks

Penjumlahan matriks hanya dapat dilakukan terhadap matriks-matriks yang mempunyai ukuran (orde) yang sama.

Definisi 2.1(Anton, H; 1987) Jika A dan Badalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka jumlah $A + B$adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut. Matriks-matriks yang ukurannya berbeda tidak dapat ditambahkan. Jika $A + B = C$, maka elemen-elemen C diperoleh dari penjumlahan elemen-elemen Adan B yang seletak, yaitu $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$untuk elemen C pada baris ke-i dan kolom ke-j. Akibatnya, matriks A dan B dapat dijumlahkan apabila kedua matriks memiliki ordo yang sama.

Selanjutnya akan membahas tentang pengurangan matriks.

2. Pengurangan Matriks

Pengurangan matriks hanya dapat dilakukan terhadap matriks-matriks yang mempunyai ukuran (orde) yang sama. Jika ukurannya berbeda hasil matriks tidak terdefinisikan.Jika $A - B = C$, maka elemen-elemen C diperoleh dari pengurangan elemen-elemen Adan B yang seletak, yaitu $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ atau pengurangan dua matriks ini dapat dipandang sebagai penjumlahan, yaitu $A + (-B)$.

Selanjutnya akan membahas tentang perkalian matriks.

3. Perkalian Matriks

Definisi 2.2 (Anton, H; 1987) Jika matriks m x r dan B adalah matriks r x n, maka hasil kali AB adalah matriks m x n yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri dalam baris i dan kolom j dari AB, pilihlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikanlah entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil kali yang dihasilkan.

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} = x_1$$

$$a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} = x_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \cdots + a_{nn}b_{n1} = x_2$$

Selanjutnya akan membahas tentang determinan matriks.

2.3 Determinan Matriks

Determinan matriks hanya dimiiki oleh matriks persegi. Determinan matriks digunakan ketika mencari invers matriks dan ketika menyelesaikan sistem persamaan linear dengan menggunakan aturan *cramer*. Determinan dari matriks A dapat ditulis $det(A)$ atau $|A|$. Jika nilai determinan itu nol, matriks bujur sangkar tersebut singular, artinya tidak memiliki invers. Jika nilai determinan suatu matriks tidak nol, berarti matriks A tersebut nonsingular, yaitu matriks tersebut mempunyai invers.

Definisi 2.3(Anton, H; 1987) Misalkan A adalah matriks kuadrat. Fungsi determinan dinyatakan oleh det, dan kita defenisikan det(A) sebagai jumlah semua hasil kali elementer bertanda dari A. Jumlah det(A) kita namakan determinan A.

Berikut diberi dua bentuk determinan matriks 2×2 dan matriks 3×3 :

a. Determinan matriks ordo 2×2

Misalkan diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Determinan A didefinisikan sebagai berikut :

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

b. Determinan matriks ordo 3×3

Misalkan diketahui matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Untuk menentukan determinan matriks berordo 3×3 terdapat dua cara, yaitu dengan menggunakan metode sarrus dan cara penjumlahan dari perkalian komponen matriks 3×3 dengan kofaktornya. Perkalian komponen matriks 3×3 dengan kofaktornya terbagi dengan dua cara penyelesaiannya yaitu dengan cara ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke j dan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke i.

Adapun cara menyelesaikan determinan matriks dengan metode sarrus 3×3 adalah sebagai berikut :

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Adapun cara menyelesaikan determinan matriks dengan ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke j dan ekspansi kofaktor sepanjang baris ke i adalah sebagai berikut :

1. Ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke j adalah :
   $det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$
2. Ekspansi kofaktor sepanjang baris ke i adalah :
   $det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$

Selanjutnya akan membahas tentang sifat-sifat determinan matriks.

2.4 Sifat-Sifat Determinan Matriks

Sifat-sifat determinan akan membantu kita dalam menyelesaikan soal-soal yang ada kaitannya dengan determinan lebih mudah.

Sifat-sifat determinan matriks yaitu :

Teorema 2.1(Anton, H; 1987) Jika A adalah sebarang matriks kuadrat, maka

$$det(A) = det(A^t)$$

Berikut diberikan contohTeorema 2.1.

Contoh 2.7

Matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, maka transpos matriks $A^t = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

$det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (15 - 2) = 13$

$det(A^t) = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (15 - 2) = 13$

$det(A) = 13 = 13 = det(A^t)$.

Misalkan A dan B adalah matriks-matriks $n \times n$ dan k adalah sebarang skalar. Maka didapat :

$$det(kA) = k^n det(A)$$

Berikut diberikan contohfaktor bersama sebesar k.

Contoh 2.8

Matriks $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ dan Matriks $5A = \begin{bmatrix} 25 & 5 \\ 10 & 15 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

$det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 2 = 13$

$det(5A) = \begin{vmatrix} 25 & 5 \\ 10 & 15 \end{vmatrix} = 375 - 50 = 325$

$det(kA) = 5^2(13) = 325$

Diperoleh bahwa $det(5A) = 5^2 det(A)$.

Teorema 2.2 (Anton, H; 1987) Misalkan *A,B* dan *C* adalah matriks-matriks $n \times n$ yang berbeda hanya pada satu baris, misalkan baris ke-*r* dari *C* diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri yang bersesuaian pada baris ke-*r* dari *A* dan *B*.

maka :

$$det(C) = det(A) + det(B)$$

Berikut diberikan contohTeorema 2.2.

Contoh 2.9

Dengan menghitung determinan, anda dapat memeriksa bahwa :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1+0 & 4+1 & 7+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$det(A) = det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} = (21 + 40) - (98 + 12) = -49$

$det(B) = det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = (10) - (-14 + 3) = 21$

$det(A + B) = det \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} = (21 + 50) - (84 + 15) = -28$

$det(A + B) = -28 = -49 + 21 = -28 = det(A) + det(B)$

Teorema 2.3(Anton, H; 1987) Jika *A* dan *B* adalah matriks kuadrat yang ukurannya sama, maka :

$$det(AB) = det(A)det(B).$$

Berikut diberikan contohTeorema 2.3.

Contoh 2.10

Matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ $\quad AB = \begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

$det(A) = det\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = (3) - (2) = 1$

$det(B) = det\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} = (-8) - (15) = -23$

$det(AB) = det\begin{bmatrix} 2 & 17 \\ 3 & 14 \end{bmatrix} = (28) - (51) = -23$

$det(AB) = -23 = (1)(-23) = det(A)det(B)$.

Teorema 2.4 (Anton, H; 1987) Jika A adalah sembarang matriks kuadrat yang mengandung sebaris bilangan nol, maka $det(A) = 0$.

Berikut diberikan contohTeorema 2.4.

Contoh 2.11

Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

Dengan menggunakan reduksi baris, maka :

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} b_2 - b_1$

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

$= 0.$

Teorema 2.5 (Anton, H; 1987) Misalkan A adalah sembarang matrik $n \times n$.

a) Jika A'adalah matriks yang dihasilkan dari satu baris tunggal A dikalikan oleh skalar$k$, maka$det(A) = k\ det(A)$.

b) Jika A' adalah matriks yang dihasilkan bila dua baris A dipertukarkan, maka $det(A') = -det(A)$.

c) Jika A'adalah matriks yang dihasilkan bila kelipatan satu baris A ditambakan pada baris lain, maka $det(A') = det(A)$.

Berikut diberikan contohTeorema 2.5.

Contoh 2.12

Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan$k = 4 A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

$$det(A) = det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (1 + 8 + 0) - (0 + 8 + 3)$$

$$= -2$$

$$k\, det(A) = 4 \times -2 = -8$$

$$det(A_1) = det \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (4 + 32 + 0) - (0 + 32 + 12)$$

$$= -8$$

Contoh 2.13

Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

$$det(A) = det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (1 + 8 + 0) - (0 + 8 + 3)$$

$$= -2$$

$$det(A_2) = det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (0 + 3 + 8) - (1 + 0 + 8)$$

$$= 2$$

Contoh 2.14

Matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

$$det(A) = det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (1 + 8 + 0) - (0 + 8 + 3)$$

$$= -2$$

$$det(A_3) = det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (-3 + 4 - 12) - (-4 + 4 - 9)$$

$$= -2$$

Selanjutnya akan membahas determinan radic.

2.5 Determinan Radic

Definisi 2.4 Misalkan $A = [A_1, A_2, \cdots, A_n]$ menjadi $m \times n$ matriks dengan n kolom $A_1, \cdots, A_n$ dan $m \leq n$. Determinan A didefinisikan sebagai

$$|A| = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq n} (-1)^{r + j_1 + j_2 + \cdots + j_m} |A_{j_1}, A_{j_2}, \cdots, A_{j_m}|,$$

dengan $r = 1 + 2 + \cdots + m$.

Berikut akan diberikan contoh untuk lebih memahami Definisi 2.4

Contoh 2.15

Carilah determinan dari matriks $[a_1, a_2, a_3]$ matriks ukuran 1×3.

$$|a_1, a_2, a_3| = (-1)^{1+1} a_1 + (-1)^{1+2} a_2 + (-1)^{1+3} a_3$$

$$= a_1 - a_2 + a_3$$

Berikut diberikan contohDefinisi 2.4.

Contoh 2.16

Carilah determinan dari matriks $A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

$$\begin{vmatrix}7 & 5 & 6\\4 & 3 & 2\end{vmatrix} = (-1)^{(1+2)+(1+2)}\begin{vmatrix}7 & 5\\4 & 3\end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)+(1+3)}\begin{vmatrix}7 & 6\\4 & 2\end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(1+2)+(2+3)}\begin{vmatrix}5 & 6\\3 & 2\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}7 & 5\\4 & 3\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}7 & 6\\4 & 2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}5 & 6\\3 & 2\end{vmatrix}$$

$$= 1 + 10 - 8$$

$$= 3$$

Contoh 2.17

Carilah determinan dari matriks $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 1 & 1 & 2\\1 & 3 & 4 & 2\end{bmatrix}$

Penyelesaian :

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 1 & 1 & 2\\1 & 3 & 4 & 2\end{vmatrix} = (-1)^{(1+2+3)+(1+2+3)}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 1\\1 & 3 & 4\end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+4)}\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\2 & 1 & 2\\1 & 3 & 2\end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(1+2+3)+(1+3+4)}\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\2 & 1 & 2\\1 & 4 & 2\end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(2+3+4)}\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\1 & 1 & 2\\3 & 4 & 2\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 1\\1 & 3 & 4\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\2 & 1 & 2\\1 & 3 & 2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\2 & 1 & 2\\1 & 4 & 2\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\1 & 1 & 2\\3 & 4 & 2\end{vmatrix}$$

$$= 2 - 12 + 16 - 4$$

$$= 2$$

Contoh 2.18

Hitunglah determinan dari matriks $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\2 & 1 & 1 & 2 & 3\\1 & 3 & 4 & 2 & 1\\3 & 4 & 0 & 5 & 4\end{bmatrix}$

Penyelesaian :

$$|A| = (-1)^{(1+2+3+4)+(1+2+3+4)}\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&1&1&2\\1&3&4&2\\3&4&0&5\end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3+4)+(1+2+3+5)}\begin{vmatrix}1&2&3&5\\2&1&1&3\\1&3&4&1\\3&4&0&4\end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(1+2+3+4)+(1+2+4+5)}\begin{vmatrix}1&2&4&5\\2&1&2&3\\1&3&2&1\\3&4&5&4\end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3+4)+(1+3+4+5)}\begin{vmatrix}1&3&4&5\\2&1&2&3\\1&4&2&1\\3&0&5&4\end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(1+2+3+4)+(2+3+4+5)}\begin{vmatrix}2&3&4&5\\1&1&2&3\\3&4&2&1\\4&0&5&4\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&1&1&2\\1&3&4&2\\3&4&0&5\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1&2&3&5\\2&1&1&3\\1&3&4&1\\3&4&0&4\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1&2&4&5\\2&1&2&3\\1&3&2&1\\3&4&5&4\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1&3&4&5\\2&1&2&3\\1&4&2&1\\3&0&5&4\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}2&3&4&5\\1&1&2&3\\3&4&2&1\\4&0&5&4\end{vmatrix}$$

$$= 62 - 95 - 19 + 77 - 27$$

$$= -2$$

Contoh 2.19

Hitunglah determinan dari matriks $A = \begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&1&2&3&4\\1&3&4&2&1&1\\3&4&0&5&4&1\\4&1&2&3&2&3\end{bmatrix}$

Penyelesaian :

$$|A| = (-1)^{(1+2+3+4+5)+(1+2+3+4+5)}\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&1&2&3\\1&3&4&2&1\\3&4&0&5&4\\4&1&2&3&2\end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3+4+5)+(1+2+3+4+6)}\begin{vmatrix}1&2&3&4&6\\2&1&1&2&4\\1&3&4&2&1\\3&4&0&5&1\\4&1&2&3&3\end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(1+2+3+4+5)+(1+2+3+5+6)}\begin{vmatrix}1&2&3&5&6\\2&1&1&3&4\\1&3&4&1&1\\3&4&0&4&1\\4&1&2&2&3\end{vmatrix}+(-1)^{(1+2+3+4+5)+(1+2+4+5+6)}\begin{vmatrix}1&2&4&5&6\\2&1&2&3&4\\1&3&2&1&1\\3&4&5&4&1\\4&1&3&2&3\end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(1+2+3+4+5)+(1+3+4+5+6)}\begin{vmatrix}1&3&4&5&6\\2&1&2&3&4\\1&4&2&1&1\\3&0&5&4&1\\4&2&3&2&3\end{vmatrix}+(-1)^{(1+2+3+4+5)+(2+3+4+5+6)}\begin{vmatrix}2&3&4&5&6\\1&1&2&3&4\\3&4&2&1&1\\4&0&5&4&1\\1&2&3&2&3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&1&2&3\\1&3&4&2&1\\3&4&0&5&4\\4&1&2&3&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&2&3&4&6\\2&1&1&2&4\\1&3&4&2&1\\3&4&0&5&1\\4&1&2&3&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&3&5&6\\2&1&1&3&4\\1&3&4&1&1\\3&4&0&4&1\\4&1&2&2&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&2&4&5&6\\2&1&2&3&4\\1&3&2&1&1\\3&4&5&4&1\\4&1&3&2&3\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}1&3&4&5&6\\2&1&2&3&4\\1&4&2&1&1\\3&0&5&4&1\\4&2&3&2&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&3&4&5&6\\1&1&2&3&4\\3&4&2&1&1\\4&0&5&4&1\\1&2&3&2&3\end{vmatrix}$$

$$= -230 + 370 - 170 + 150 - 160 + 80$$

$$= 40$$

Determinan persegi dan determinan persegi panjang dari matriks $m \times n$, dengan $m \leq n$, memiliki beberapa sifat umum diantaranya :

1. Jika suatu baris pada matriks A identik pada baris yang lain atau merupakan kombinasi linear baris lain maka $|A| = 0$

Bukti :

Misalkan matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Jika baris ke i dan baris ke j identik, maka $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in} = a_{j1}, a_{j2} \cdots a_{jn}$, sehingga untuk matris yang bukan bujur sangkar dengan $m \leq n$ menjadi sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

maka akan dibuktikan bahwa $|A| = 0$.

$$|A| = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_m \le n} (-1)^{r + j_1 + j_2 + \cdots + j_m} \left| A_{j_1}, A_{j_2}, \cdots, A_{j_m} \right|$$

$$|A| = (-1)^{(1+\cdots+m)+(1+2+\cdots+m)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{(1+\cdots+m)+((n-m+1)+\cdots+n)} \begin{vmatrix} a_{1(n-m+1)} & a_{1(n-m+2)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i(n-m+1)} & a_{i(n-m+2)} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i(n-m+1)} & a_{i(n-m+2)} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(n-m+1)} & a_{m(n-m+2)} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Matriks yang diperoleh merupakan matriks bujur sangkar, selanjutnya untuk mendapatkan $|A| = 0$ maka akan dilakukan reduksi baris pada matriks yaitu:

$$|A| = (-1)^{(1+\cdots+m)+(1+2+\cdots+m)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{(1+\cdots+m)+((n-m+1)+\cdots+n)}\begin{vmatrix} a_{1(n-m+1)} & a_{1(n-m+2)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i(n-m+1)} & a_{i(n-m+2)} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(n-m+1)} & a_{m(n-m+2)} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

dengan menggunakan Teorema 2.4 maka $det(A)$ diperoleh :

$$= 0 + \cdots + 0$$

$$= 0$$

Jadi, terbukti bahwa $|A| = 0$. ■

Berikut diberikan contoh.

Contoh 2.20

Hitunglah determinan dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Penyelesaiannya :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{(1+2+3)+(1+2+3)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+4)}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(1+2+3)+(1+3+4)}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(2+3+4)}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 0 + 0 - 0 = 0$$

2. Jika deretan A dikalikan dengan sejumlah k, maka determinan matriks dihasilkan adalah sama dengan $k|A|$.

Bukti :

Misalkan

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dikalikan sebaris A dengan k maka didapatlah matriks baru

$$A^*=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

maka akan dibuktikan bahwa $|A^*| = k|A|$.

$$|A| = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_m\le n} (-1)^{r+j_1+j_2+\cdots+j_m}\left|A_{j_1}, A_{j_2}, \cdots, A_{j_m}\right|$$

$$|A| = (-1)^{(1+\cdots+m)+(1+2+\cdots+m)}\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{(1+\cdots+m)+\left((n-m+1)+\cdots+n\right)}\begin{vmatrix} ka_{1(n-m+1)} & ka_{1(n-m+2)} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i(n-m+1)} & a_{i(n-m+2)} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j(n-m+1)} & a_{j(n-m+2)} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(n-m+1)} & a_{m(n-m+2)} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

matriks yang diperoleh adalah matriks bujur sangkar, maka dapat digunakan Teorema 2.5 sehingga diperoleh :

$$|A| = (-1)^{(1+\cdots+m)+(1+2+\cdots+m)} k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{(1+\cdots+m)+((n-m+1)+\cdots+n)} k \begin{vmatrix} a_{1(n-m+1)} & a_{1(n-m+2)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i(n-m+1)} & a_{i(n-m+2)} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j(n-m+1)} & a_{j(n-m+2)} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(n-m+1)} & a_{m(n-m+2)} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

$$|A| = k \left((-1)^{(1+\cdots+m)+(1+2+\cdots+m)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} + \cdots + \right.$$

$$\left. (-1)^{(1+\cdots+m)+((n-m+1)+\cdots+n)} \begin{vmatrix} a_{1(n-m+1)} & a_{1(n-m+2)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i(n-m+1)} & a_{i(n-m+2)} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j(n-m+1)} & a_{j(n-m+2)} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(n-m+1)} & a_{m(n-m+2)} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \right)$$

$$= k|A|$$

Jadi, terbukti bahwa $|kA| = k|A|$. ■

Berikut diberikan contoh.

Contoh 2.21

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ dan $k = 2$

Penyelesaiannya :

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 1 & 1 & 2\\1 & 3 & 4 & 2\end{vmatrix} = (-1)^{(1+2+3)+(1+2+3)}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 1\\1 & 3 & 4\end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+4)}\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\2 & 1 & 2\\1 & 3 & 2\end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(1+2+3)+(1+3+4)}\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\2 & 1 & 2\\1 & 4 & 2\end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(2+3+4)}\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\1 & 1 & 2\\3 & 4 & 2\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 1 & 1\\1 & 3 & 4\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\2 & 1 & 2\\1 & 3 & 2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\2 & 1 & 2\\1 & 4 & 2\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\1 & 1 & 2\\3 & 4 & 2\end{vmatrix}$$

$$= 2 - 12 + 16 - 4$$

$$= 2$$

$$k|A| = 2 \times 2 = 4$$

$$kA = 2\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\2 & 1 & 1 & 2\\1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$|kA| = \begin{bmatrix}2 & 4 & 6 & 8\\2 & 1 & 1 & 2\\1 & 3 & 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$= (-1)^{(1+2+3)+(1+2+3)}\begin{vmatrix}2 & 4 & 6\\2 & 1 & 1\\1 & 3 & 4\end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+4)}\begin{vmatrix}2 & 4 & 8\\2 & 1 & 2\\1 & 3 & 2\end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(1+2+3)+(1+3+4)}\begin{vmatrix}2 & 6 & 8\\2 & 1 & 2\\1 & 4 & 2\end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(2+3+4)}\begin{vmatrix}4 & 6 & 8\\1 & 1 & 2\\3 & 4 & 2\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}2 & 4 & 6\\2 & 1 & 1\\1 & 3 & 4\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}2 & 4 & 8\\2 & 1 & 2\\1 & 3 & 2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2 & 6 & 8\\2 & 1 & 2\\1 & 4 & 2\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}4 & 6 & 8\\1 & 1 & 2\\3 & 4 & 2\end{vmatrix}$$

$$= 4 - 24 + 32 - 8$$

$$= 4$$

3. Jika matriks A^* diperoleh dari pertukaran dua buah baris pada matriks A maka $det(A^*) = det(A)$.

Bukti :

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ dan } A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Maka akan dibuktikan bahwa $det(A^*) = -det(A)$

$$|A| = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_m \le n} (-1)^{r+j_1+j_2+\cdots+j_m} \left| A_{j_1}, A_{j_2}, \cdots, A_{j_m} \right|$$

$$|A^*| = (-1)^{(1+\cdots+m)+(1+2+\cdots+m)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} + \cdots +$$

$$(-1)^{(1+\cdots+m)+((n-m+1)+\cdots+n)} \begin{vmatrix} a_{1(n-m+1)} & a_{1(n-m+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j(n-m+1)} & a_{j(n-m+1)} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i(n-m+1)} & a_{i(n-m+1)} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m(n-m+1)} & a_{m(n-m+1)} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Matriks yang diperoleh adalah matriks bujur sangkar, sehngga dengan menggunakan Teorema 2.5 maka diperoleh :

$|A^*| = -det(A)$

Jadi, terbukti bahwa $det(A^*) = -det(A)$. ■

Berikut diberikan contoh.

Contoh 2.22

Hitunglah determinan dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Penyelesaiannya :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{(1+2+3)+(1+2+3)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+4)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(1+2+3)+(1+3+4)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(2+3+4)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 - 12 + 16 - 4$$

$$= 2$$

Menukar dua baris

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{(1+2+3)+(1+2+3)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(1+2+4)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{(1+2+3)+(1+3+4)} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2+3)+(2+3+4)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 + 12 - 16 + 4$$

$$= -2$$